Corrigé Examen terminal Mat 307

Janvier 2019

Exercice 1

1) * $r(\theta)$ est défini ssi $1+\sqrt{2}\cos\theta \neq 0 \iff \cos\theta \neq -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \theta \neq \frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4} \ [2\pi]$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ domaine de définition.

* $\theta \mapsto r(\theta)$ est 2π périodique : il suffit donc d'étudier r sur $]-\pi, -\frac{3\pi}{4}[\cup]-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; \pi]$.

La fonction r est paire ($r(-\theta) = r(\theta)$)

il suffit donc de l'étudier sur $\underbrace{[0; \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; \pi]}_{\text{domaine d'étude}}$ puis de faire une symétrie d'axe (Ox).

* Branche infinie autour de $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$:

$r(\theta)\sin(\theta-\theta_0) = \frac{\sin(\theta-\theta_0)}{1+\sqrt{2}\cos\theta}$. On pose $u = \theta - \theta_0 = \theta - \frac{3\pi}{4}$ qui tend vers 0 quand $\theta \to \theta_0$.

On a $r(\theta)\sin(\theta-\theta_0) = \frac{\sin u}{1+\sqrt{2}\cos(u+\frac{3\pi}{4})} = \frac{\sin u}{1+\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u)}$

$= \frac{\sin u}{-\sin u + 1 - \cos u} = \frac{u + o(u)}{-u + o(u)} = \frac{1+o(1)}{-1+o(1)} \xrightarrow[u\to 0]{} -1$

$\xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} -1$

On a donc une asymptote d'équation $Y = -1$ dans le repère tourné d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

Dans le repère cartésien asymptote d'éq. $y = -x + \sqrt{2}$

* $r'(\theta) = \dfrac{+\sqrt{2}\sin\theta}{(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2} \geqslant 0$ sur $[0; \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; \pi]$

θ	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
r'	0	$+$	||	$+$	0
r	$\frac{1}{1+\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1}{\sqrt{2}-1}$

Pas de point singulier car r ne s'annule pas

$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

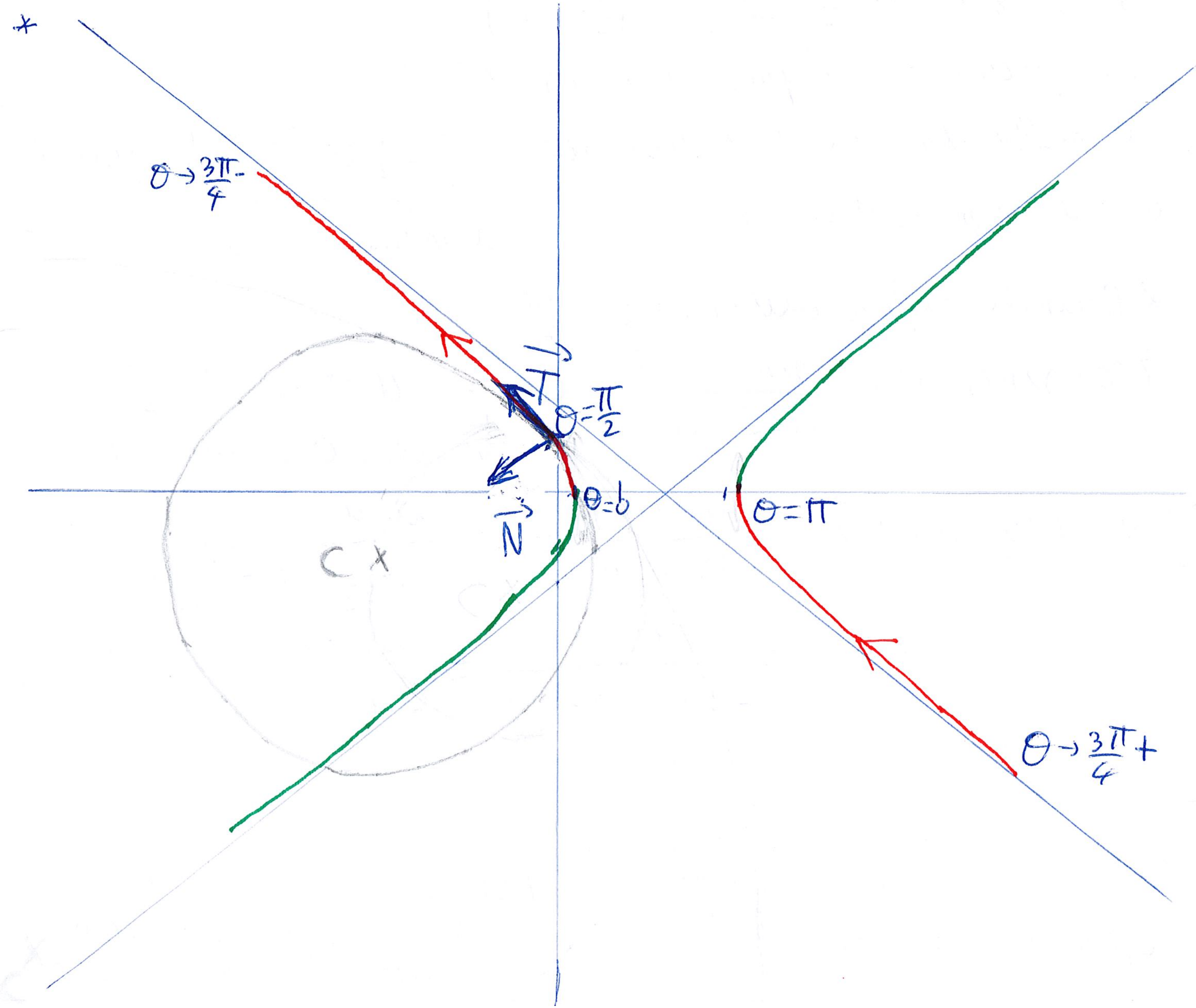
$r'(0) = r'(\pi) = 0$

$\Rightarrow$ tangente verticale en $\theta = 0$ et π.

* $\dfrac{1}{r} + \left(\dfrac{1}{r}\right)'' = 1+\sqrt{2}\cos\theta + (1+\sqrt{2}\cos\theta)'' = 1+\sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\cos\theta = 1$

La fonction $\theta \mapsto \dfrac{1}{r(\theta)} + \left(\dfrac{1}{r(\theta)}\right)''$ ne change pas de signe, la courbe ne change donc pas de convexité.

*



2) $\vec{OM} = r(\theta)\,\vec{e}_r(\theta)$

$$\vec{v}(\theta) = r'(\theta)\,\vec{e}_r(\theta) + r(\theta)\,\vec{e}_\theta(\theta)$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2}\,\vec{e}_r(\theta) + \frac{1}{1+\sqrt{2}\cos\theta}\,\vec{e}_\theta(\theta)$$

$$\|\vec{v}(\theta)\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}\cos\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2\sin^2\theta + (1+\sqrt{2}\cos\theta)^2}}{(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2}$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}(\frac{\pi}{2})}{\|\vec{v}(\frac{\pi}{2})\|} = \frac{\sqrt{2}\vec{e}_r(\frac{\pi}{2}) + \vec{e}_\theta(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(\theta) = (r''(\theta) - r(\theta))\,\vec{e}_r(\theta) + 2r'(\theta)\,\vec{e}_\theta$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}\cos\theta(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2 + 2\sqrt{2}\sin^2(\theta)(1+\sqrt{2}\cos\theta)}{(1+\sqrt{2}\cos\theta)^4} - \frac{1}{1+\sqrt{2}\cos\theta}\right]\vec{e}_r(\theta)$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}\sin\theta}{(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2}\,\vec{e}_\theta(\theta)$$

$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (4 - 1)\,\vec{e}_r\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sqrt{2}\,\vec{e}_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(4 - 3) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\|\vec{v}(\frac{\pi}{2})\|^2}{R} = \frac{3}{R}$$

On a donc $R = 3\sqrt{3} > 0$

$$\vec{OC} = \vec{OM} + R\vec{N} = r\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_r\left(\frac{\pi}{2}\right) + R\vec{N} = 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le cercle osculateur est donc le cercle de centre $C = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -4,24 \\ -2 \end{pmatrix}$ et de rayon $R = 3\sqrt{3} \simeq 5,2$

3.) $\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\vec{v}(\theta)\| \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2\sin^2\theta + (1+\sqrt{2}\cos\theta)^2}}{(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2} \, d\theta$

$\simeq 1,1$ (avec calculatrice).

exercice 2

1) $x(t) = t$ vérifie $x'(t) = 1$ et $x''(t) = 0$

et on vérifie que $t^2 x''(t) + t\,x'(t) - x(t) = t^2 \times 0 + t \times 1 - t$
$= 0$

d'où $t \mapsto t$ est une solution de (H)

2.) $x(t) = \lambda(t)\,t \Rightarrow x'(t) = \lambda'(t)\,t + \lambda(t)$; $x''(t) = \lambda''(t)\,t + 2\lambda'(t)$

x est solution de $(H) \Leftrightarrow t^2(\lambda''(t)\,t + 2\lambda'(t)) + t(\lambda'(t)\,t + \lambda(t)) - \lambda(t)\,t = 0$

$\Leftrightarrow t^3 \lambda''(t) + 3t^2 \lambda'(t) = 0 \quad \forall t$

$\Leftrightarrow \lambda''(t) + \frac{3}{t}\lambda'(t) = 0$

$\Leftrightarrow y = \lambda'$ est solution de (E')

c.) (E') est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient non constant en dimension 1, sans second membre.

Une primitive de $t \mapsto \frac{3}{t}$ est $t \mapsto 3 \ln t$ (sur $\mathbb{R}_*^+$)

et une solution de (E') est donc $y(t) = e^{-3\ln t}$

$$= \frac{1}{t^3}$$

On a donc $\lambda'(t) = y(t) = \frac{1}{t^3}$

d'où $\lambda(t) = -\frac{1}{2t^2}$ est une primitive

et $x(t) = \lambda(t) t = -\frac{t}{2t^2} = -\frac{1}{2t}$ est une solution de (H)

d.) (H) est une eq. diff. linéaire d'ordre 2 en dim 1 à coeff. non constant sans second membre.

$\mathcal{S}_H = \{ t \mapsto \alpha t + \frac{\beta}{t}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$ espace vectoriel de dimension deux.

2.) a) $x_p'(t) = \alpha'(t) t + \frac{\beta'(t)}{t} + \alpha(t) - \frac{\beta(t)}{t^2}$

$= \alpha(t) - \frac{\beta(t)}{t^2}$ ssi $\alpha'(t) t + \frac{\beta'(t)}{t} = 0$

b.) On a alors $x_p''(t) = \alpha'(t) - \frac{\beta'(t)}{t^2} + \frac{2\beta(t)}{t^3}$

$x_p \in \mathcal{S}_E$ ssi $t^2\left[\alpha'(t) - \frac{\beta'(t)}{t^2} + \frac{2\beta(t)}{t^3}\right] + t\left[\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{t^2}\right] - \left[\alpha(t) t + \frac{\beta(t)}{t}\right] = t^2 e^t$

$\Leftrightarrow \alpha'(t) - \frac{\beta'(t)}{t^2} = e^t$

c.) On a donc

$$\begin{cases} (1) & t\,\alpha'(t) + \frac{1}{t}\beta'(t) = 0 \\ (2) & t\,\alpha'(t) - \frac{1}{t}\beta'(t) = t e^t \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow \alpha'(t) = \frac{1}{2}e^t \Rightarrow \alpha(t) = \frac{1}{2}e^t$ convient

$(1)-(2) \Rightarrow \beta'(t) = -\frac{t^2}{2}e^t \Rightarrow \beta(t) = (at^2+bt+c)e^t$ convient

si $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ 2a+b = 0 \\ b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

Une solution particulière est donc

$$x_p(t) = \frac{1}{2}t e^t + \frac{-\frac{1}{2}t^2+t-1}{t}e^t = \left(1-\frac{1}{t}\right)e^t.$$

3.) $\mathcal{S}_E = \left\{ t \mapsto \alpha t + \frac{\beta}{t} + \left(1-\frac{1}{t}\right)e^t,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$

<u>exo 3</u>

a.) $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$; $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$; $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-\frac{1}{2}mMG\,2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-mMGx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-mMGy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. On a $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\gamma(t), \gamma'(t), t) = m\,x'(t)$ et $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(\gamma(t), \gamma'(t), t) = m\,y'(t)$

Euler Lagrange $\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\,x'(t)) = \frac{-mMGx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{d}{dt}(m\,y'(t)) = \frac{-mMGy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$

4

d'où $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = -MG \frac{1}{(x^2+y^2)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$= -MG \frac{1}{x^2(t)+y^2(t)} \vec{e}_r(t)$$

b.) $\sigma(t) = \det(\vec{OS}(t), \vec{v}(t))$

$$\sigma'(t) = \det\left(\frac{d}{dt}\vec{OS}(t), \vec{v}(t)\right) + \det\left(\vec{OS}(t), \frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right)$$

$$= \det(\vec{v}(t), \vec{v}(t)) + \det\left(r(t)\vec{e}_r(t), \frac{MG}{r^2(t)}\vec{e}_r(t)\right)$$

$$= 0$$

c)

$$H(t) = \left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L\right)(\gamma(t), \gamma'(t))$$

$$= m(x'(t))^2 + m(y'(t))^2 - \frac{1}{2}m\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right) - \frac{mMG}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}}$$

$$= m\left[\frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{1}{2}y'(t)^2 - \frac{MG}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}}\right]$$

$$H'(t) = m\left[x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) + \frac{MG(x(t)x'(t)+y(t)y'(t))}{(x(t)^2+y(t)^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= m\left[-\frac{MG\,x'(t)x(t)}{(x(t)^2+y(t)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{MG\,y'(t)y(t)}{(x(t)^2+y(t)^2)^{\frac{3}{2}}} + \text{———}\right]$$

$$= 0.$$

2.) On décompose le lacet $\gamma(T)$ en trois:

* segment $[0, S(0)]$: $\tilde{x}(t) = t$, $\tilde{y}(t) = 0$ pour $t \in [0, a]$

$$\int_{[0,S(0)]} w = \int_0^a (t \times 0 - 1 \times 0)\, dt = 0$$

* courbe entre $S(0)$ et $S(T)$:

$$\int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt = \int_0^T C_0 dt = C_0 T$$

* segment $[S(T), 0]$: $\tilde{x}(t) = x(T)t$, $\tilde{y}(t) = y(T)t$ pour $t \in [0,1]$

$$\int_{[S(T),0]} \omega = -\int_0^1 (x(T)t\, y(T) - y(T)t\, x(T))dt = 0$$

On a donc $\displaystyle\int_{\gamma(T)} \omega = C_0 T$.

b) D'après la formule de Green-Riemann,

$$A(T) = \iint_U dx\,dy = \frac{1}{2}\iint (1+1)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\gamma(T)} \omega = \frac{C_0}{2} T.$$

Ce qui est proportionnel à T.