UJF 2013-2014 UE MAT237   Examen du 7 janvier 2014 de 8h à 10h

Calculettes, documents et portable interdits.
Une feuille A4 recto-verso de résumé de cours autorisée.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Exercice 1 (12 pts) Soit la courbe Γ paramétrée $t \in [-\pi, \pi] \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) = (\cos^2 t) \sin t \\ y(t) = (\sin^2 t + 1) \cos t \end{cases}$$

On notera $f(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$ l'affixe du point $M(t)$.

1) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$. Vérifier que $f'(t) = (3\cos^2 t - 2)e^{it}$.

2) En déduire la longueur d'arc L entre les points de paramètre 0 et $\pi/6$.

3) Déterminer les paramètres des points singuliers de la courbe Γ à l'aide de $\alpha = \arccos(\sqrt{2}/\sqrt{3})$.

4) Calculer $f''(t) = x''(t) + iy''(t)$. En déduire la courbure signée $\kappa(t)$ en un point non singulier de paramètre t.
[on pourra calculer le déterminant $\det(f'(t), f''(t))$ en se plaçant dans le repère orthonormé direct (u, v) où $u = e^{it}$ et $v = ie^{it}$ ou introduire un paramétrage par abscisse curviligne s]

5) Indiquer les symétries de la courbe Γ qui permettent de ramener son tracé à celui de l'arc Γ' des points de paramètres $t \in [0, \pi/2]$.

6) On note toujours $\alpha = \arccos(\sqrt{2}/\sqrt{3}) \sim 0,615$. Vérifier que le point $f(\alpha)$ est le seul point singulier de l'arc Γ'. Déterminer la tangente à la courbe en ce point. Montrer que $f'''(\alpha)$ est linéairement indépendant de $f''(\alpha)$, en déduire la nature du point singulier $f(\alpha)$.

7) Dresser un tableau de variation pour $t \in [0, \pi/2]$. En déduire un tracé de Γ' puis de Γ grâce à ses symétries.

8) Déterminer une paramétrisation $t \in [-\pi, \pi] \to O(t)$ de la développée D de Γ.

Exercice 2 (10 pts) Etant donné un réel a, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+a & -a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$

1) Trouver en fonction de a les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres
[Indication : l'une des valeurs propre est égale à 1].

2) En déduire une matrice P à coefficients réels (ne dépendant pas de a) telle que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

3) Résoudre le système différentiel (cas $a = 1$) avec la condition initiale $x(0) = 2$ et $y(0) = 0$

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$

et tracer la courbe paramétrée solution $t \to (x(t), y(t))$.

4) Résoudre le système différentiel (S) $\begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = (1 + 2t)v(t) \end{cases}$

5) Montrer comment à l'aide de 1) et 2) (cas $a = t$) la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) \begin{cases} x' = (1 + t)x - ty \\ y' = -tx + (1 + t)y \end{cases}$$

peut être ramenée à celle de (S). En déduire la solution générale de (Σ).

T.S.V.P.

Exercice 3 (3 pts)

On considère sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle du second ordre (où $x = x(t)$ est la fonction inconnue)

$$t^2 x'' - 2x = 0 \qquad (E)$$

1) Trouver une solution particulière $x_0(t)$ de (E) de la forme $x_0(t) = at^2 + bt + c$ où a, b et c sont des constantes réelles.

2) En déduire la solution générale de (E) en posant $x(t) = C(t)x_0(t)$ (variation des constantes).

Exercice 4 (4 pts) (**Les trois questions peuvent être abordées indépendamment**)

Rappel de cours : Si $f(x, y, z)$ est un lagrangien, pour que l'intégrale $I(\gamma) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))dt$ soit extremale, il faut que l'équation suivante (Euler-Lagrange) soit satisfaite :

$$(EL) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t, y, y') \; - \; \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial z}(t, y, y') = 0$$

***

On cherche parmi les fonctions $y(t)$ de classe C^2 définies sur $[0, 1]$ et telles que $y(0) = 0$ et $y(1) = \text{sh } 1$ une fonction $y_0(t)$ rendant l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 (y^2 + y'^2)\, dt$ minimale.

1) A l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange montrer qu'une telle fonction, si elle existe, satisfait l'équation différentielle du second ordre

$$(E) \quad y'' - y = 0.$$

2) Résoudre l'équation (E) avec les conditions $y(0) = 0$ et $y(1) = \text{sh } 1$ (où $\text{sh } t$ désigne le sinus hyperbolique de t).

3) Vérifier que $y_0(t) = \text{sh } t$ rend effectivement $I = \displaystyle\int_0^1 (y^2 + y'^2)\, dt$ minimale parmi les fonctions $y(t)$ de classe C^2 définies sur $[0, 1]$ et telles que $y(0) = 0$ et $y(1) = \text{sh } t$.
[Poser $y(t) = y_0(t) + u(t)$ avec u de classe C^2 telle que $u(0) = u(1) = 0$.]

***

Corrigé de l'examen du 7 janvier 2014

1) On a $x(t) = (\cos^2 t)\sin t$ et $y(t) = (1 + \sin^2 t)\cos t$.

Le calcul donne $x'(t) = (3\cos^2 t - 2)\cos t$ et $y'(t) = (3\cos^2 t - 2)\sin t$ et donc

$$f'(t) = x'(t) + iy'(t) = (3\cos^2 t - 2)e^{it}.$$

2) $L = \int_0^{\pi/6}(3\cos^2 t - 2)dt = \int_0^{\pi/6}((3\cos 2t - 1)/2)dt = \Big[(3\sin 2t)/4 - t/2\Big]_0^{\pi/6} = 3\sqrt{3}/8 - \pi/12.$

3) Les paramètres t des points singuliers de la courbe Γ sont ceux qui vérifient $3\cos^2 t-2=(\sqrt{3}\cos t-\sqrt{2})(\sqrt{3}\cos t+\sqrt{2})=0$ c'est-à-dire $t = \pm\alpha$ ou $t=\pm(\pi-\alpha)$ où $\alpha = \arccos(\sqrt{2}/\sqrt{3})$.

4) On a

$$f''(t) = (f'(t))' = -6(\sin t\cos t)e^{it} + (3\cos^2 t - 2)ie^{it}$$

et donc la courbure signée $\kappa(t) = \det(f'(t), f''(t))/|f'(t)|^3 = (3\cos^2 t - 2)^2/|v|^3 = 1/|3\cos^2 t - 2|$ en un point non singulier de paramètre t.

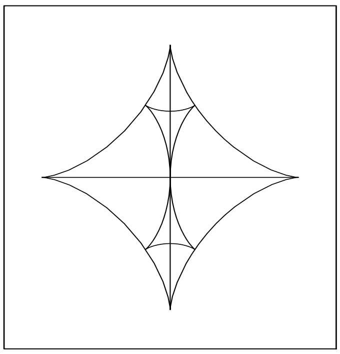
5) Le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe Oy et $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe Ox. Pour tracer la courbe Γ, il suffit donc de tracer l'arc Γ' des points de paramètres $t \in [0, \pi/2]$. En ajoutant à Γ' le symétrique de Γ' par rapport à l'axe Ox, on obtient l'arc Γ'' des points de paramètres $t \in [0, \pi]$ et en ajoutant le symétrique de Γ'' par rapport à l'axe Oy, on obtient la courbe Γ tout entière.

6) Le point $f(\alpha)$ est le seul point singulier de l'arc Γ' d'après 3). En ce point, on a $f''(\alpha) = -6\sin\alpha\cos\alpha e^{i\alpha} = -2\sqrt{2}e^{i\alpha} \neq 0$ donc le vecteur d'affixe $f''(\alpha)$ dirige la tangente à la courbe en ce point. On a $f'''(t) = a(t)e^{it} + ((3\cos^2 t - 2) - 6\sin t\cos t)ie^{it}$ et donc $f'''(\alpha) = a(\alpha)e^{i\alpha} - 2\sqrt{2}ie^{i\alpha}$ a une composante non nulle selon $ie^{i\alpha}$. Les deux vecteurs d'affixes $f''(\alpha)$ et $f'''(\alpha)$ sont linéairement indépendants donc $p = 2$ et $q = 3$: le point singulier $f(\alpha)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce.

7) Tableau de variation pour $t \in [0, \pi/2]$:

t	0		α		$\pi/2$
x'	1	$+$	0	$-$	0
x	0	$\nearrow$	$2/3\sqrt{3}$	$\searrow$	0
y'	0	$+$	0	$-$	-2
y	1	$\nearrow$	$4\sqrt{2}/3\sqrt{3}$	$\searrow$	0

Tracé de l'arc Γ et de l'astroïde D :



8) Le calcul donne $O(t) = M(t) + \rho(t)\vec{n}(t) = (2\cos^3 t, 2\sin^3 t)$. La développée D est une *astroïde*.

Exercice 2. 1)2) Les valeurs propres sont données par

$$\begin{vmatrix} 1+a-\lambda & -a \\ -a & 1+a-\lambda \end{vmatrix} = (1+a-\lambda)^2 - a^2 = (\lambda-1)(\lambda-1-2a) = 0 \text{ ce sont donc } 1 \text{ et } 1+2a.$$

Le vecteur (x,y) est vecteur propre de valeur propre λ si on a $\begin{pmatrix} 1+a-\lambda & -a \\ -a & 1+a-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$.

On trouve ainsi $a(x-y)=0$ pour la valeur propre 1 et $a(x+y)=0$ pour la valeur propre $1+2a$. Pour toute valeur de a, les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$ forment une base de vecteurs propres respectivement pour les valeurs propres 1 et $1+2a$ et donc la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est telle que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix} = P^{-1}AP$.

3) Le système différentiel en posant $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ s'écrit $Y' = AY$ et en faisant le changement d'inconnu $Y(t) = PZ(t)$ où $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ s'écrit $PZ' = APZ$ équivalent à $Z' = P^{-1}APZ = DZ$ (en multipliant à gauche par P^{-1}). Dans le cas présent A est la matrice pour le cas $a=1$ et donc $D == \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Donc $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} be^t \\ ce^{3t} \end{pmatrix}$ d'où $Y(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} be^t + ce^{3t} \\ be^t - ce^{3t} \end{pmatrix}$.

La condition initiale $x(0) = b+c = 2$ et $y(0) = b-c = 0$ fixe les constantes $b = c = 1$.

Dans les coordonnées propres (u,v), la courbe solution a pour équation $v = u^3$ et $u(0) = 1$. Dans ce système de coordonnées, la courbe est donc le graphe pour les $u > 0$ de la fonction u^3.

4) $u'(t) = u(t) \iff u(t) = be^t$ et $v'(t) - (1+2t)v(t) = 0$ a pour solution $v(t) = ce^{t+t^2}$.

5) Avec les mêmes notations qu'en 3) le système (Σ) s'écrit $Y' = AY$ où $A = \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -t & t+1 \end{pmatrix}$ (la matrice A du début pour $a = t$) qui en posant encore $Y(t) = PZ(t)$ où $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ devient $PZ' = APZ$ équivalent à $Z' = DZ$ (en multipliant à gauche par P^{-1}) et donc, résoudre (Σ) revient à résoudre $Z' = DZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2t \end{pmatrix} Z$ qui est le sytème (S).

La solution générale de (Σ) est donc $Y(t) = P\begin{pmatrix} be^t \\ ce^{t+t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} be^t + ce^{t+t^2} \\ be^t - ce^{t+t^2} \end{pmatrix}$ où $b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 On considère sur l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation différentielle du second ordre (où $x = x(t)$ est la fonction inconnue) $t^2x'' - 2x = 0 \quad (E)$

1) $x_0(t) = t^2$ est solution particulière de (E).

2) En posant $x(t) = C(t)t^2$ (variation des constantes), on a

$t^2(C''(t)t^2 + 4C'(t)t + 2C(t)) - 2C(t)t^2 = t^4C''(t) + 4t^3C'(t) = 0 \iff C''(t)/C'(t) = -4/t$ car $t > 0$. Donc $C'(t) = ct^{-4}$ d'où $C(t) = \gamma t^{-3} + \delta$ et finalement $x(t) = \gamma t^{-1} + \delta t^2$ où γ, δ sont des réels.

Exercice 4 On cherche parmi les fonctions $y(t)$ de classe C^2 définies sur $[0,1]$ et telles que $y(0) = 0$ et $y(1) = \operatorname{sh} 1$ une fonction $y_0(t)$ rendant l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 (y^2 + y'^2)\,dt$ minimale.

1) Ici $f(x,y,z) = y^2 + z^2$ l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit donc dans ce cas

$$(EL) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t,y,y') \; - \; \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial z}(t,y,y') = 2y - \frac{d}{dt}(2y') = 0 \text{ soit encore } (E) \quad y'' - y = 0.$$

2) $y_0(t) = \operatorname{sh} t$.

3) Notons $I_0 = \int_0^1 (y_0^2 + y_0'^2)\,dt$ et posons $y(t) = y_0(t) + u(t)$ avec u de classe C^2 telle que $u(0) = u(1) = 0$, avec $y_0(t) = \operatorname{sh} t$, il vient

$$I = \int_0^1 (y^2 + y'^2)\,dt = \int_0^1 (y_0^2 + y_0'^2)\,dt + \int_0^1 2(y_0u + y_0'u')\,dt + \int_0^1 (u^2 + u'^2)\,dt =$$

$$I_0 + 2[\operatorname{ch}(t)u(t)]_0^1 + \int_0^1 (u^2 + u'^2)\,dt = I_0 + \int_0^1 (u^2 + u'^2)\,dt \geq I_0 \text{ et il y a égalité seulement si } u = 0.$$

Donc la fonction $y_0(t) = \operatorname{sh} t$ est la seule à rendre I minimale.