UJF 2012-2013 UE MAT237

Examen du 10 janvier 2013 de 8h à 10h

Calculettes, documents et portable interdits.
Une feuille A4 recto-verso de résumé de cours autorisée.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Exercice 1 (10 pts) (**Les parties A et B peuvent être abordées indépendamment**)

A (4 pts)

On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme différentielle $\omega = (3x^2 + y^2)\,dx + 2(x-1)y\,dy$.

1) La forme ω est-elle fermée ? exacte ?

2) Calculer l'intégrale $I = \int_\gamma \omega$ de la forme ω du point $A = (1, 0)$ au point $B = (1, 1)$ le long du chemin $\gamma(t) = (1 + t - t^2, t)$ pour $0 \leq t \leq 1$. Pouvez vous expliquer le résultat trouvé ?

3) Vérifier que la courbe Γ paramétrée $x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$ est une courbe intégrale de ω.

B (6 pts)

On considère toujours la courbe Γ paramétrée $M(t) = (x(t), y(t)) = \left(\dfrac{t^2}{1+t^2}, \dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

1) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$. En déduire l'existence sur la courbe Γ d'un point singulier S dont on déterminera la nature.

2) Déterminer une droite asymptote à Γ.

3) Etudier la convexité de Γ.
[on pourra calculer la dérivée de $g(t) = y'(t)/x'(t)$]

4) Préciser la symétrie permettant de réduire l'étude de Γ à $[0, +\infty[$.

5) Dresser un tableau de variation de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, +\infty[$ puis tracer la courbe Γ.

Exercice 2 (9 pts) (**Les parties A et B peuvent être abordées indépendamment**)

Si C est une courbe paramétrée $s \in]-1,1[\mapsto f(s) = (x(s), y(s))$,
on notera $u(s) = x'(s)$ et $v(s) = y'(s)$.

A (4 pts)

Soit $k(s)$ une fonction de classe C^1 définie sur $]-1,1[$. On suppose que u et v sont solutions du système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} u'(s) = -k(s)v(s) \\ v'(s) = k(s)u(s) \end{cases}$$

avec la condition initiale $u(0) = 1, v(0) = 0$.

1) Montrer que la courbe C est paramétrée par longueur d'arc.
[Calculer la dérivée de $u^2(s) + v^2(s)$]

2) Déterminer le repère de Frenet $(\vec{t}(s), \vec{n}(s))$ de C au point $f(s)$.

3) Montrer que $k(s)$ est la courbure signée de C au point $f(s)$.

B (5 pts)

On se donne la fonction $k(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ définie sur $]-1,1[$ et on cherche une courbe C telle que $u(s) = x'(s)$ et $v(s) = y'(s)$ vérifient (S) avec les conditions $x(0) = y(0) = 0$ et $u(0) = 1, v(0) = 0$.

1) Le système (S) vérifie-t'il les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ? Que dit ce théorème dans ce cas ?

2) En posant $u(s) = \cos\varphi(s)$ et $v(s) = \sin\varphi(s)$, déterminer $\varphi(s)$ pour que $(u(s), v(s))$ soit solution de (S).
[On rappelle que $(\arcsin s)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$]

3) Déduire de l'expression de $\varphi(s)$ les fonctions $u(s)$ et $v(s)$ puis par intégration les fonctions $x(s)$ et $y(s)$.
[On pourra admettre ou montrer que $\sqrt{1-s^2}$ a pour primitive $\dfrac{1}{2}(s\sqrt{1-s^2} + \arcsin s)$]

Exercice 3 (5 pts) (**Les trois questions peuvent être abordées indépendamment**)

On cherche parmi les fonctions $y(t)$ de classe C^2 définies sur $[0,1]$ et telles que $y(0) = \sqrt{3}$ et $y(1) = 2\sqrt{2}$ une fonction $y_0(t)$ rendant l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 y^2(1+y'^2)\,dt$ minimale.

1) A l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange montrer qu'une telle fonction, si elle existe, satisfait une équation différentielle du type

$$(E_c) \quad y^2(y'^2 - 1) = c$$

où c est une constante.

2) Résoudre l'équation (E_c) avec les conditions $y(0) = \sqrt{3}$ et $y(1) = 2\sqrt{2}$.

3) Vérifier que $y_0(t) = \sqrt{t^2 + 4t + 3}$ rend effectivement $I = \displaystyle\int_0^1 y^2(1+y'^2)\,dt$ minimale parmi les fonctions $y(t)$ de classe C^2 définies sur $[0,1]$ et telles que $y(0) = \sqrt{3}$ et $y(1) = 2\sqrt{2}$.
[Poser $y^2(t) = y_0^2(t) + u(t)$ avec u de classe C^2 telle que $u(0) = u(1) = 0$.]

UJF 2012-2013 UE MAT237 Corrigé succinct de l'examen du 10/01/2013

Exercice 1 A) On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme différentielle $\omega = (3x^2+y^2)\,dx + 2(x-1)y\,dy$.

1) La forme ω est exacte on a $\omega = dV$ où $V(x,y) = x^3 + xy^2 - y^2$.

2) D'après le cours, comme $\omega = dV$, l'intégrale $I = \int_\gamma \omega = V(B) - V(A) = V(1,1) - V(1,0) = 1-1 = 0$.

3) Avec $x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$, on a
$V(x(t),y(t)) = x^3(t) + x(t)y^2(t) - y^2(t) = \dfrac{t^6+t^8-t^6(1+t^2)}{(1+t^2)^3} = 0$ donc Γ est une courbe de niveau de V ce qui revient d'après le cours à Γ courbe intégrale de $\omega = dV$.

B) On considère toujours la courbe Γ paramétrée $M(t) = (x(t),y(t)) = \left(\dfrac{t^2}{1+t^2}, \dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

On a $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$ $\begin{cases} x'(t) = 2\dfrac{t}{(1+t^2)^2} \\ y'(t) = \dfrac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$ d'où $g(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{1}{2}t(3+t^2)$

1) $x'(t) = y'(t) = 0 \iff t = 0$ et le développement limité en $t=0$ donne
$M(t) = (t^2 + o(t^2))(1,0) + (t^3 + o(t^3))(0,1)$ donc $p = 2$ et $q = 3$. Le point singulier $S = (0,0)$ est un point de rebroussement de 1ière espèce.

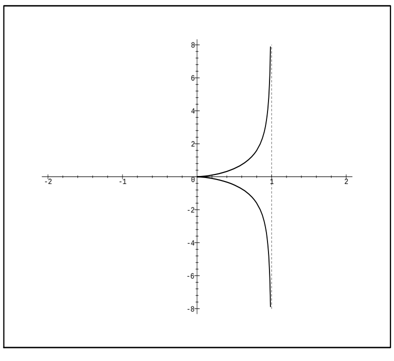
2) Quand $t \to \pm\infty$, on a $x(t) \to 1$ et $y(t) \to \pm\infty$ donc la droite D d'équation $x = 1$ est asymptote à Γ.

3) La convexité de Γ est donnée par le signe de $g'(t) = \dfrac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'^2(t)} = \dfrac{3}{2}(1+t^2) > 0$.
La courbe Γ tourne donc toujours du côté gauche.

4) On a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc Γ est symétrique par rapport à Ox et on peut donc réduire l'étude de Γ à $[0,+\infty[$.

5)

t	0		$+\infty$
x'	0	$+$	0
x	0	$\nearrow$	1
y'	0	$+$	1
y	0	$\nearrow$	$+\infty$



Graphe de Γ

Exercice 2

Si C est une courbe paramétrée $s \in]-1,1[\mapsto f(s)=(x(s),y(s))$, on note $u(s)=x'(s)$ et $v(s)=y'(s)$.

A) Soit $k(s)$ une fonction de classe C^1 définie sur $]-1,1[$. On suppose u et v sont solutions de

$$(S) \quad \begin{cases} u'(s) = -k(s)v(s) \\ v'(s) = k(s)u(s) \end{cases}$$

avec la condition initiale $u(0) = 1, v(0) = 0$.

1) On a $(u^2(s) + v^2(s))' = 2(u(s)u'(s) + v(s)v'(s)) = 2(-u(s)k(s)v(s) + v(s)k(s)u(s)) = 0$ donc $u^2(s) + v^2(s) = \text{Cte}$ et comme $u(0) = 1, v(0) = 0$, on a $u^2(s) + v^2(s) = 1$ c'est-à-dire que la courbe C est paramétrée par longueur d'arc.

2) $\vec{t}(s) = (u(s), v(s))$ et $\vec{n}(s) = (-v(s), u(s))$.

3) La courbure signée $\kappa(s)$ est définie par la première formule de Frenet $\vec{t}'(s) = \kappa(s)\vec{n}(s)$ or on a $\vec{t}'(s) = (u'(s), v'(s)) = (-k(s)v(s), k(s)u(s)) = k(s)\vec{n}(s)$, donc $k(s)$ est bien $\kappa(s)$ la courbure signée de C au point $f(s)$.

B) On se donne la fonction $k(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ définie sur $]-1,1[$ et on cherche une courbe C telle que $u(s) = x'(s)$ et $v(s) = y'(s)$ vérifient (S) avec les conditions $x(0) = y(0) = 0$ et $u(0) = 1, v(0) = 0$.

1) Le système (S) est sous la forme résolue $(u(s), v(s))' = (-k(s)v(s), k(s)u(s)) = g(u(s), v(s), s)$ où $g(u, v, s) = (-k(s)v, k(s)u)$ est une application de classe C^1 car $k(s)$ est de classe C^1, il satisfait donc les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Ce théorème dit qu'alors il y a au moins un intervalle $]a, b[$ avec $a < 0 < b$ et une unique courbe solution paramétrée sur $]a, b[$.

2)3) On pose $u(s)=\cos\varphi(s)$ et $v(s)=\sin\varphi(s)$.

Les fonctions $u(s)$ et $v(s)$ sont solutions du système (S) si et seulement si :

$u'(s)=(\cos\varphi(s))'=-\varphi'(s)\sin\varphi(s)=-k(s)v(s)=-k(s)\sin\varphi(s) \iff$
$\varphi'(s)=k(s)=\dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}=(\arcsin s)' \iff \varphi(s)=\arcsin s + \text{Cte}$
et comme $v(0) = 0$, on a $\varphi(s)=\arcsin s$.

D'où $u(s) = \sqrt{1-s^2}$ $(u(0) = 1)$ et $v(s) = s$ et donc comme $x(0) = y(0) = 0$:
$x(s) = \displaystyle\int_0^s \sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{2}(s\sqrt{1-s^2} + \arcsin s)$ et $y(s) = \displaystyle\int_0^s tdt = \frac{s^2}{2}$.

Exercice 3

On cherche parmi les fonctions $y(t)$ de classe C^2 définies sur $[0,1]$ et telles que $y(0) = \sqrt{3}$ et $y(1) = 2\sqrt{2}$ une fonction $y_0(t)$ rendant l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 y^2(1 + y'^2)\, dt$ minimale.

1) Le lagrangien $f(y, z) = y^2(1 + z^2)$ ne dépend pas de t, l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit alors $y'\dfrac{\partial f}{\partial z}(y, y') - f(y, y') = \text{Cte}$ ce qui donne ici $2y'^2y^2 - y^2(1 + y'^2) = y^2(y'^2 - 1) = c$ où c est une constante.

2) L'équation (E_c) $\quad y^2(y'^2 - 1) = c$ à résoudre est à variables séparées. Elle peut s'écrire $(yy')^2 = y^2 + c$ ou encore $yy' = \sqrt{y^2 + c}$ soit $\dfrac{yy'}{\sqrt{y^2 + c}} = (\sqrt{y^2 + c})' = 1$ c'est-à-dire
$\sqrt{y^2 + c} = t + d$ où d est une constante.

Avec les conditions $y(0) = \sqrt{3}$ et $y(1) = 2\sqrt{2}$, il vient $3 + c = d^2$ et $8 + c = (1 + d)^2$ ce qui donne par différence $5 = 1 + 2d \iff d = 2$ puis $c = 1$. La solution $y(t)$ est donc déterminée par $y^2(t) = (t + 2)^2 - 1$ sur $[0, 1]$ soit $y(t) = \sqrt{t^2 + 4t + 3}$ pour $t \in [0, 1]$.

3) Posons $y_0(t) = \sqrt{t^2+4t+3}$ et si $y(t)$ est de classe C^2 définies sur $[0,1]$ et telles que $y(0)=\sqrt{3}$ et $y(1) = 2\sqrt{2}$ écrivons $y^2(t) = y_0^2(t) + u(t)$ avec u de classe C^2 telle que $u(0) = u(1) = 0$.
Montrons que $I_0 = \displaystyle\int_0^1 y_0^2(1+y_0'^2)\,dt = \int_0^1 (y_0^2 + y_0^2 y_0'^2)\,dt =$ est minimale.

On a : $4(y^2+y^2y'^2) = 4y^2+((y^2)')^2 = 4y_0^2+4u+((y_0^2+u)')^2 = 4y_0^2+((y_0^2)')^2+4u+2(y_0^2)'u'+u'^2$.

Donc $4I = \displaystyle\int_0^1 (4y_0^2+((y_0^2)')^2+4u+2(y_0^2)'u'+u'^2)\,dt = 4I_0 + \int_0^1 (4u+2(y_0^2)'u'+u'^2)\,dt$

Il reste à vérifier que $J = \displaystyle\int_0^1 (4u+2(y_0^2)'u'+u'^2)\,dt$ est positive et nulle seulement si $u=0$.
On a :
$J = \displaystyle\int_0^1 4u\,dt + \int_0^1 2(y_0^2)'u'\,dt + \int_0^1 u'^2\,dt$ et par intégration par partie
$\displaystyle\int_0^1 2(y_0^2)'u'\,dt = \big[2(y_0^2)'u\big]_0^1 - \int_0^1 2(y_0^2)''u\,dt = -\int_0^1 2(y_0^2)''u\,dt = -\int_0^1 4u\,dt$ car $u(0)=u(1)=0$ et $(y_0^2)'' = (t^2+4t+3)'' = 2$.

Donc $J = \displaystyle\int_0^1 u'^2\,dt$ est bien positive et nulle seulement si $u'=0$ ce qui entraine $u = \text{Cte} = 0$.
Notons que sauf erreur la valeur minimale I_0 est $26/3$.