UJF 2011-2012 UE MAT237

Examen du 9 janvier 2012 de 14h à 16h

Calculettes, documents et portable interdits. Une feuille A4 recto-verso de résumé de cours autorisée. Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Exercice 1 (12 pts) Soit la courbe C paramétrée $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ avec $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = 3t^2 + 1 \end{cases}$

1) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ puis $x'^2(t) + y'^2(t)$. En déduire :

a) La régularité de la courbe C (c.à.d. C n'a pas de point singulier).

b) La longueur d'arc L entre les points de paramètre 0 et 1.

c) Le repère de Frenet $(\vec{t}(t), \vec{n}(t))$ de C au point $M(t)$ et l'angle θ de $\vec{t}(t)$ avec Ox en fonction de $\arctan t$.

2) Calculer $x''(t)$ et $y''(t)$ puis la courbure signée $\kappa(t)$ et le rayon de courbure signé $\rho(t)$. Vérifier que C a un sommet et donner le rayon de courbure en ce point.

3) Montrer que la développée de C est la courbe D paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto O(t) = \left(4t^3, -\frac{3}{2}t^4 + 3t^2 + \frac{5}{2}\right)$.

4) Déterminer le point singulier de la courbe D et sa nature (on a le choix ici entre le calcul ou une application d'un résultat du cours qui l'évite).

5) Quelle symétrie présente les courbes C et D ? Dresser un tableau de variation pour C sur $[0, +\infty[$. Tracer succinctement C et D sur un même graphique.

Exercice 2 (*les parties A et B peuvent être abordées indépendamment*)

A (3 pts) Soit l'équation différentielle linéaire (qui est aussi à variables séparées) définie pour $x > 0$

$$(E) \quad y'(x) \;=\; -\frac{(2x+1)y(x)}{2x(x+1)}$$

Déterminer la solution $y(x)$ de (E) vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.

B (9 pts) On considère la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$

$$\omega \;=\; (2x+1)y dx + 2x(x+1)dy \;.$$

(a) La forme ω est-elle fermée ? exacte ?

(b) Calculer l'intégrale de la forme ω du point $A = (0,0)$ au point $B = (1,0)$ le long des deux chemins suivants :

$$\begin{cases} \gamma_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\,,\; 0 \leq x \leq 1\}\;, \\ \gamma_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x - x^2\,,\; 0 \leq x \leq 1\}\;. \end{cases}$$

Le résultat est-il le même pour les deux chemins ? Que retrouve-t-on ?

Dans ce qui suit, *on restreint la forme* ω *au domaine* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$.

(c) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x,y) = y$. Vérifier que f est un facteur intégrant pour la forme ω, c'est-à-dire que la nouvelle forme $\tilde{\omega} = f\omega$ est exacte. Trouver une fonction $U : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{\omega} = dU$.

(d) Décrire les courbes intégrales de ω.

(e) Retrouver pour $x > 0$ la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.

Exercice 3 (3 pts) Soit un nombre a fixé avec $0 \leq a < 1$.

On cherche parmi les fonctions $y(t)$ de classe C^2 définies sur $[a,1]$ et telles que $y(a) = \sqrt{a}$ et $y(1) = 1$ une fonction $y_0(t)$ rendant l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^1 \sqrt{1 + y^2 y'^2}\, dt$ minimale.

1) A l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange montrer que la seule fonction possible est $y_0(t) = \sqrt{t}$.

2) Qu'en déduit-on dans le cas où $a = 0$?

3) Si $a \neq 0$, en considérant les courbes $t \in [a,1] \mapsto \left(t, \frac{y^2(t)}{2}\right)$, montrer que la fonction $y_0(t) = \sqrt{t}$ rend bien l'intégrale I minimale.

***

Exercice 1

On a $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = 3t^2 + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x'(t) = 3t^2 - 3 \\ y'(t) = 6t \end{cases}$ $\begin{cases} x''(t) = 6t \\ y''(t) = 6 \end{cases}$

1) Donc $x'^2(t) + y'^2(t) = (3t^2 - 3)^2 + 36t^2 = 9t^4 + 18t^2 + 9 = 9(t^2 + 1)^2$ et donc :

a) $x'(t) = y'(t) = 0$ est impossible : la courbe C n'a pas de point singulier.

b) $L = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_0^1 3(t^2 + 1)\, dt = \Big[t^3 + 3t\Big]_0^1 = 4.$

c) $\vec{t}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}(x', y') = \dfrac{1}{t^2+1}(t^2-1, 2t)$ et $\vec{n}(t) = \dfrac{1}{t^2+1}(-2t, t^2-1)$.

L'angle θ de $\vec{t}(t)$ avec Ox est $\theta = \pi - 2\arctan t$. En effet, si l'on pose $t = \tan \dfrac{u}{2}$, on a $\cos u = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin u = \dfrac{2t}{1+t^2}$ (classiques "formules en t") et donc avec $u = \pi - 2\arctan t$, on a $\vec{t}(t) = (\cos u, \sin u)$.

2) $\kappa(t) = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \dfrac{-18(t^2+1)}{(3t^2+3)^3} = -\dfrac{2}{3(t^2+1)^2}$ et $\rho(t) = -\dfrac{3}{2}(t^2+1)^2$. Par définition, un sommet de C est un point où la courbure (ou ce qui revient au même le rayon de courbure) est extremum (local). Ici, le rayon de courbure (sans signe) $R(t) = \dfrac{3}{2}(t^2+1)^2$ atteint son minimum en $t = 0$ et on a $R(0) = \dfrac{3}{2}\cdot$

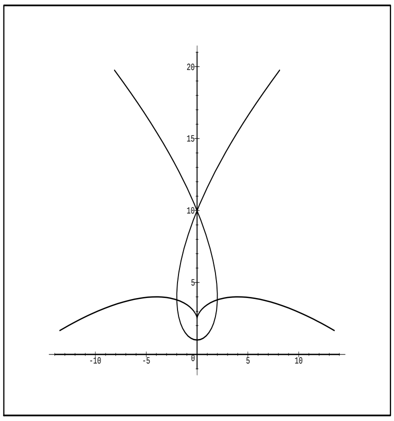
3) $O(t) = M(t) + \rho(t)\vec{n}(t) = (t^3 - 3t, 3t^2 + 1) - \dfrac{3}{2}(t^2+1)(-2t, t^2-1) = \Big(4t^3, -\dfrac{3}{2}t^4 + 3t^2 + \dfrac{5}{2}\Big).$

4) D'après le cours, un point singulier de la développée D est un point où la dérivée $\rho'(t) = -3t(t^2+1)$ s'annule. Ceci n'a lieu qu'en $t = 0$ et comme $\rho''(t) = -9t^2 - 3$ ne s'annule pas en $t = 0$ (on a un sommet en $t = 0$), un résultat du cours nous dit que le point singulier $O(0)$ de D est un point de rebroussement de première espèce.

5) Les courbes C et D sont symétriques par rapport à Oy. La courbe C présente un point double en $(0, 10)$. Il suffit de faire un tableau de variation pour C sur $[0, \infty[$:

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x'	-3	$-$	0	$+$	6	$+$	$+\infty$
x	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y'	0	$+$	6	$+$	$6\sqrt{3}$	$+$	$+\infty$
y	1	$\nearrow$	4	$\nearrow$	10	$\nearrow$	$+\infty$

Avec ce tableau, la symétrie et $\kappa(t) < 0$, on obtient le graphique :



C et sa développée D

La courbe C est une cubique de Tschirnhausen qui a de belles propriétés dont on trouvera le détail sur le site très instructif **http ://www.mathcurve.com/** sur les courbes, surfaces et autres fractals à la page **http ://www.mathcurve.com/courbes2d/tschirnhausen/tschirnhausen.shtml**

Exercice 2 On considère pour $x > 0$ l'équation différentielle $(E)\quad y'(x) = -\dfrac{(2x+1)y(x)}{2x(x+1)}$.

A) On peut écrire $(E)\quad \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{2x+1}{2x(x+1)}dx = -\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}\Big)dx$ et en intégrant de part et d'autre, il vient $\ln|y| = -\dfrac{1}{2}\ln x(x+1) + \text{Cte}$. D'où l'expression de la solution générale $y = \dfrac{c}{\sqrt{x(x+1)}}$ où c est une constante.

La solution y de (E) vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$ est donc $y = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B) Soit sur $\mathbb{R}^2$ la forme différentielle $\omega = (2x+1)ydx + 2x(x+1)dy$

(a) ω n'est pas *fermée* car $\dfrac{\partial}{\partial y}(2x+1)y = 2x+1 \neq 4x+2 = \dfrac{\partial}{\partial x}2x(x+1)$ ce qui implique que ω n'est pas exacte.

(b) On a $\displaystyle\int_{\gamma_1}\omega = \int_0^1 0\,dx = 0$ et

$$\int_{\gamma_2}\omega = \int_0^1 (2x+1)(x-x^2)\,dx + 2x(x+1)(1-2x)\,dx = \int_0^1(-6x^3 - x^2 + 3x)\,dx = \Big[-\frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

Comme $0 = \displaystyle\int_{\gamma_1}\omega \neq \int_{\gamma_2}\omega = -\frac{1}{3}$ et que γ_1 et γ_2 ont mêmes extrémités, on retrouve que ω n'est pas exacte.

(c) Cherchons U telle que $dU = y\omega \iff \dfrac{\partial U}{\partial x} = (2x+1)y^2 \;\; (1)$ et $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 2x(x+1)y \;\; (2)$

$U = x(x+1)y^2 + \varphi(y)$ vérifie (1) pour toute φ de classe C^1. En reportant dans (2), la fonction φ doit satisfaire : $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 2x(x+1)y + \varphi'(y) = 2x(x+1)y \iff \varphi'(y) = 0 \iff \varphi(y) = \text{Cte}$.

Finalement, $U(x,y) = x(x+1)y^2 + \text{Cte}$ est bien un potentiel pour $y\omega$, c'est-à-dire qu'on a $dU = y\omega$.

(d) Les courbes intégrales de ω sont les mêmes que celles de $dU = y\omega$ donc sont les courbes de niveau de U c'est-à-dire les courbes vérifiant $x(x+1)y^2 = c$ où c est une constante positive.

(e) Une solution de l'équation différentielle (E) est une courbe intégrale de ω donc une courbe de niveau de U. Avec la condition initiale $y(1) = 1$, on retrouve la solution $y = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x(x+1)}}$ trouvée en A.

Exercice 3

On cherche parmi les fonctions $y(t)$ de classe C^2 définies sur $[a,1]$ $(0 \leq a < 1)$ et telles que $y(a) = \sqrt{a}$ et $y(1) = 1$ une fonction $y_0(t)$ rendant l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^1 \sqrt{1 + y^2y'^2}\,dt$ minimale.

1) Comme le lagrangien du problème $f(x,y,z) = \sqrt{1+y^2z^2}$ ne dépend pas de x, l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par y_0 s'écrit dans ce cas

$$y'\frac{\partial f}{\partial z}(y,y') - f(y,y') = \text{Cte}$$

ce qui donne ici

$$\frac{y^2y'^2}{\sqrt{1+y^2y'^2}} - \sqrt{1+y^2y'^2} = \frac{-1}{\sqrt{1+y^2y'^2}} = \text{Cte} \iff y^2y'^2 = \text{Cte} \iff (y^2)' = \text{Cte} \iff y^2 = \alpha t + \beta$$

Avec $y_0(a) = \sqrt{a}$ et $y_0(1) = 1$ on a nécessairement $y_0(t) = \sqrt{t}$.

2) Dans le cas où $a = 0$, il n'y a pas de fonction de classe C^2 rendant l'intégrale minimale puisque la fonction $\sqrt{t}$ n'est pas dérivable en 0.

3) Par contre, si $a \neq 0$, on identifie $I(y(t))$ comme la longueur de la courbe $t \in [a,1] \mapsto \Big(t, \dfrac{y^2(t)}{2}\Big)$, entre a et 1. Cette longueur est bien minimale lorsque la courbe est un segment de droite, soit, lorsque $y(t) = \sqrt{t}$. On voit donc que dans ce cas, la fonction $y_0(t) = \sqrt{t}$ de classe C^2 sur $[a,1]$ rend bien l'intégrale I minimale.

***