UJF 2015-2016 UE MAT237 DM à rendre dans la semaine du 12/10

Exercice 1

On considère la courbe Γ paramétrée sur $I =]-1,1[$ par $x(t) = \dfrac{t^2}{1-t}$, $\quad y(t) = \dfrac{t^4}{1-t^2}$.

1) Vérifier que la courbe Γ possède un seul point singulier S. Préciser la tangente en S puis la nature de S [on pourra utiliser un développement limité en ce point].

2) Montrer que Γ admet deux droites asymptotes que l'on déterminera.

3) Etudier la convexité de Γ

[on pourra factoriser $\delta = x'y'' - x''y'$ à la main ou, à défaut, en utilisant une calculette].

4) Dresser un tableau de variation de $x(t)$ et $y(t)$ sur $]-1,1[$.

5) Tracer la courbe Γ.

Corrigé succinct

Exercice 1. On a
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1-t} \\ y(t) = \dfrac{t^4}{1-t^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = \dfrac{t(2-t)}{(1-t)^2} \\ y'(t) = \dfrac{2t^3(2-t^2)}{(1-t^2)^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x''(t) = \dfrac{2}{(1-t)^3} \\ y''(t) = \dfrac{2t^2(6-3t^2+t^4)}{(1-t^2)^3} \end{cases}$$

1) On a $x'(t) = y'(t) = 0 \iff t = 0$ et $x(t) = t^2(1+o(t))$ et $y(t) = t^4(1+o(t^2))$ ce qui donne $(x(t), y(t)) = (t^2+o(t^2))(1,0)+(t^4+o(t^4)(0,1)$ et donc $p = 2$ et la tangente en $S = (x(0), y(0)) = (0,0)$ est dirigée pas le vecteur $(1,0)$ et $q = 4$ donc S est un point de rebroussement de seconde espèce.

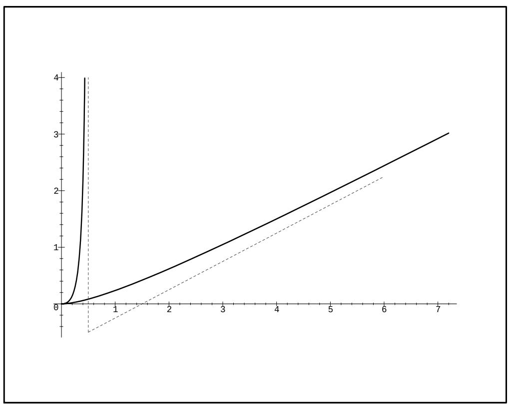
2) Il y a deux branches infinies. Lorsque $t \to -1^+$, $x(t) \to 1/2$ et $y(t) \to +\infty$ d'où l'asymptote verticale d'équation $x = 2$. Lorsque $t \to 1^-$, on constate que $y/x \to 1/2$ et ensuite que $y - x/2 \to -3/4$ ce qui donne pour asymptote la droite d'équation $y = x/2 - 3/4$.

3) $\delta = x'y'' - x''y' = -2\,\dfrac{(t^3-6t-8)t^3}{(1-t^2)^3}$ est du signe de t car $h(t) = t^3 - 6t - 8$ reste négatif sur $[-1,1]$, du fait que $h'(t) = 3t^2 - 6 < 0$ sur $[-1,1]$ et $h(-1) = -3 < 0$.

4) Tableau de variation pour $t \in]-1,1[$:

t	-1		0		1
x'	$-3/4$	$-$	0	$+$	$+\infty$
x	$1/2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5)



La courbe Γ

Exercice 2

Soit la spirale d'Archimède C d'équation polaire $r(\theta) = \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

On note $h(\theta) = (\theta\cos(\theta), \theta\sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$ le point de C de paramètre θ.

1) Calculer le vecteur vitesse $h'(\theta)$ puis la longueur de C entre les points $h(0)$ et $h(1)$

[changement de variable $\theta = \operatorname{sh} x$ conseillé].

2) Déterminer l'angle V entre $\overrightarrow{Oh(\theta)}$ et $h'(\theta)$.

3) Déterminer le repère de Frenet $(\vec{t}(\theta), \vec{n}(\theta))$ de C au point $h(\theta)$. Donner une construction géométrique du repère $(\vec{t}(1), \vec{n}(1))$.

4) Calculer la courbure signée $k(\theta)$ au point $h(\theta)$.

Corrigé succinct

1) $h'(\theta) = e^{i\theta} + \theta i e^{i\theta}$. Comme les vecteurs $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ d'affixes $e^{i\theta}$ et $ie^{i\theta}$ sont orthogonaux et unitaires, on a $||h'(\theta)|| = \sqrt{1+\theta^2}$ et donc la longueur L de C entre les points $P(0)$ et $P(1)$ est avec $a = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\theta^2}d\theta = \int_0^a \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\operatorname{ch} x dx = \int_0^a \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)du = \Big[\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{x}{2}\Big]_0^a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}.$$

[changement de variable $\theta = \operatorname{sh} x$].

2) Toujours dans le repère orthonormé $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, la pente du vecteur $h'(\theta)$ est $\tan V = \theta$ et donc $V = \arctan\theta$.

3) Le vecteur $\vec{t}(\theta)$ est d'affixe $h'(\theta)/\sqrt{1+\theta^2}$ et $\vec{n}(\theta)$ celui d'affixe $ih'(\theta)/\sqrt{1+\theta^2}$. Construction géométrique du repère $(\vec{t}(1), \vec{n}(1))$: il s'obtient du repère $(\vec{u}(1), \vec{v}(1))$ en tournant de $V = \arctan 1 = \pi/4$.

4) L'accélération est $h''(\theta) = -\theta e^{i\theta} + 2ie^{i\theta}$ donc $\Delta = 2 + \theta^2$ d'où la courbure signée au point $h(\theta)$

$$k(\theta) = \frac{\Delta}{|h'(\theta)|^3} = \frac{2+\theta^2}{(1+\theta^2)^{3/2}}.$$

***