UJF 2014-2015 UE MAT237 — Contrôle du 7 novembre 2014

Calculettes autorisées. Documents et portables interdits à l'exception d'une feuille A4 recto-verso de résumé de cours. Les exercices sont indépendants (le barème est indicatif).

Exercice 1 (6 pts)

On considère la courbe Γ paramétrée en coordonnées polaires sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ par

$$r(\vartheta) = 4\cos\vartheta - \frac{1}{\cos\vartheta}.$$

1) Étudier les symétries de la courbe Γ et faire une étude locale pour les valeurs de paramètre où $r = 0$.

2) Montrer que Γ admet une droite asymptote que l'on déterminera.

3) Dresser un tableau de variation de $r(\vartheta)$.

4) Tracer la courbe Γ.

5) Montrer que la longueur de la boucle vaut $2\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{8\cos^2\vartheta + 1}}{\cos^2\vartheta}\, d\vartheta$ et en donner une valeur approchée.

6) Calculer l'aire délimitée par la boucle à l'aide de l'intégrale curviligne $\int_\gamma y\, dx$ où γ est l'arc de la courbe Γ parcouru pour $\vartheta \in [-\pi/3, \pi/3]$.

Exercice 2 (8 pts)

On considère la courbe plane C ayant pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = t + \sin t - 4\sin\frac{t}{2} \\ y(t) = 3 + \cos t - 4\cos\frac{t}{2} \end{cases}$$

1) Dire pourquoi on peut étudier la courbe sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Déterminer les points singuliers de C et leur nature.

Étudier les variations simultanées de x et y.

Tracer la courbe C sur $[0, 4\pi]$.

2) Montrer que l'élément de longueur est donné par $ds = 2(1 - \cos(t/2))\, dt$ et calculer la longueur de l'arc de courbe que vous avez tracé.

3) Déterminer le repère de Frenet $(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$ de C au point de paramètre t.

4) Calculer la courbure signée $\kappa(t)$ au point de paramètre t.

5) Calculer les coordonnées du centre de courbure de C au point de paramètre t, et [bonus] construire sa développée.

Exercice 3 (6 pts)

Soit ω la forme différentielle définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ par $\omega = (x^2 + y^2 - 1)\, dx - 2y\, dy$.

1) Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\gamma_i} \omega$ dans les deux cas suivants :

a) γ_1 est l'arc de cercle de rayon 1 $t \to (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$.

b) γ_2 est le segment de droite $t \to (t, 0), t \in [-1, 1]$.

2) Montrer que la forme ω n'est pas exacte.

3) Déterminer une fonction $\varphi(x)$ ne dépendant que de x telle que la forme différentielle $\omega_1 = \varphi(x)\omega$ soit fermée.

4) Montrer que la forme ω_1 est exacte et trouver un potentiel $F(x, y)$ tel que $dF = \omega_1$.

5) Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\gamma_i} \omega_1$ dans les deux cas de la première question.