Examen du mercredi 6 novembre 2013, de 8h à 10h.

*Résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents, calculatrices et portables interdits. Barême donné à titre indicatif et non contractuel.*

## 1. Étude de courbe : 8 points

Faire l'étude et le tracé de la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{t^2}{1+t}, \quad y(t) = t^2$$

On indiquera en particulier le domaine, l'existence éventuelle de symétries, de points singuliers, de tangentes horizontales et verticales, de branches infinies. La courbe admet-elle un point d'inflexion ?

## 2. Miroir parabolique : 8 points

Soit $P$ la parabole $y = x^2/4$ d'équations paramétriques

$$x(t) = 2t, \quad y(t) = t^2$$

(1) Tracer $P$.

(2) Soit $M(t) = (x(t), y(t))$ un point de la courbe. Déterminer le repère de Frenet $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n})$ en ce point. Représenter sur la figure le repère de Frenet pour $t = 1$ et pour $t = 2$.

(3) Calculer la courbure signée. En déduire le cercle osculateur en $M(0)$ et le tracer sur la figure. Déterminer la position de la courbe par rapport à ce cercle. Que peut-on dire de $M(0)$ ?

(4) Calculer la longueur $L(a,b)$ de l'arc de $P$ correspondant à $t \in [a,b]$, on pourra admettre qu'une primitive de $\sqrt{x^2+1}$ est donnée par

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

(5) On suppose que l'arc de $P$ réfléchit les rayons lumineux comme un miroir. Un rayon lumineux incident arrive en $M(t)$ dans la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{v} = (0,-1)$, on souhaite déterminer le rayon réfléchi. Déterminer les coordonnées de la direction incidente $\overrightarrow{v}$ dans le repère $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n})$ (on pourra utiliser que ce repère est orthonormé).

(6) En changeant le signe de la composante de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{n}$, montrer que la direction réfléchie est proportionnelle à $\overrightarrow{w} = (-2t, 1-t^2)$

(7) Déterminer le point d'intersection $F(t)$ du rayon réfléchi (issu de $M(t)$ et de direction $\overrightarrow{w}$) avec la droite d'équation $x = 0$ pour $t = 1$ et $t = 2$. Qu'observe-t-on ?
On admettra que cela est vrai pour tout $t$ (bonus : le montrer !).

(8) On place un dispositif collecteur de l'énergie des rayons lumineux réfléchis en $F(1)$. Expliquez rapidement pourquoi l'énergie collectée $E$ est proportionnelle à la projection orthogonale sur $y = 0$ de l'arc de miroir.

(9) Bonus : on suppose que le coût de construction de l'arc de miroir est proportionnel à la longueur $l$ de l'arc. Cette longueur $l$ étant donnée, comment choisir les valeurs de $a$ et $b$ pour maximiser le rendement par euro investi $E/l$ ? (Indication : observer comment varie en fonction de $a$ la longueur d'arc et sa projection sur $y = 0$ pour $t \in [a, a+\delta t]$ pour $\delta t$ très petit).

## 3. Intégrale curviligne : 6 points

On considère la forme différentielle $\omega = xdy - ydx$ sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Cette forme est-elle fermée ? exacte ?

(2) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la forme différentielle $(x^2+y^2)^\alpha \omega$ est-elle fermée sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ?

(3) Soit l'ellipse d'équations paramétriques

$$x(t) = a\cos(t), \ y(t) = b\sin(t)$$

Calculer l'intégrale curviligne de $\omega$ sur une période ($t \in [0, 2\pi]$)

(4) En appliquant le théorème de Stokes, en déduire l'aire de l'ellipse.

(5) Donner un paramétrage du cercle $C$ de centre l'origine et de rayon 1. Calculer $\int_C (x^2+y^2)^{-1}\omega$. La forme $(x^2+y^2)^{-1}\omega$ est-elle exacte sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ?