UJF 2011-2012 UE MAT237

Contrôle continu du 2 novembre 2010 de 10h45 à 12h45

Calculettes, documents et portable interdits. Une feuille A4 recto-verso de résumé de cours autorisée. Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Exercice 1 (5pts) Soit la spirale d'Archimède C d'équation polaire $r(\theta) = \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

On note $h(\theta) = \theta e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ l'affixe du point $P(\theta)$ de C de paramètre θ.

1) Calculer $h'(\theta)$ puis la longueur de C entre les points $P(0)$ et $P(1)$ [changement de variable $\theta = \operatorname{sh} x$ conseillé].

2) Déterminer l'angle φ entre $\overrightarrow{OP}(\theta)$ et $\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}(\theta)$.

3) Déterminer le repère de Frenet $(\vec{t}(\theta), \vec{n}(\theta))$ de C au point $P(\theta)$. Donner une construction géométrique du repère $(\vec{t}(1), \vec{n}(1))$.

***

Exercice 2 (14pts) Soit la courbe Γ paramétrée $t \in [-\pi, \pi] \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) = (4\cos^2 t + 5)\sin t \\ y(t) = (4\sin^2 t - 1)\cos t \end{cases}$$

On notera $f(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$ l'affixe du point $M(t)$.

1) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$. Vérifier que $f'(t) = 3(4\cos^2 t - 1)e^{it}$.

2) En déduire la longueur d'arc L entre les points de paramètre 0 et $\pi/4$.

3) Déterminer les paramètres des points singuliers de la courbe Γ.

4) Calculer $f''(t) = x''(t) + iy''(t)$. En déduire la courbure signée $\kappa(t)$ en un point non singulier de paramètre t.

5) Indiquer les symétries de la courbe Γ qui permettent de ramener son tracé à celui de l'arc Γ' des points de paramètres $t \in [0, \pi/2]$.

6) Vérifier que le point $f(\pi/3)$ est le seul point singulier de l'arc Γ'. Déterminer la tangente à la courbe en ce point. Montrer que $f'''(\pi/3)$ est linéairement indépendant de $f''(\pi/3)$, en déduire la nature du point singulier $f(\pi/3)$.

7) Dresser un tableau de variation pour $t \in [0, \pi/2]$. En déduire un tracé de Γ' puis de Γ grâce à ses symétries.

8) Déterminer une paramétrisation $t \in [-\pi, \pi] \to O(t)$ de la développée D de Γ. Que reconnaît-on ?

***

Exercice 3 (6pts) Soit ω la forme différentielle définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par $\omega = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dy$.

1) La forme ω est-elle fermée ? exacte ?

2) Calculer l'intégrale curviligne $I_1 = \int_{\gamma_1} \omega$ où γ_1 est le quart de cercle paramétré par $t \in [0, \pi/2] \mapsto (\cos t, \sin t)$.

3) Calculer l'intégrale curviligne $I_2 = \int_{\gamma_2} \omega$ où γ_2 est le segment paramétré par $t \in [0, 1] \mapsto (1-t, t)$.

[on pourra remarquer que $\dfrac{1}{2t^2 - 2t + 1} = \dfrac{2}{(2t-1)^2 + 1}$]

4) Comparer les résultats. Que retrouve-t-on ?

5) Que représente la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ pour la forme ω ?

***

Corrigé du contrôle continu du 2 novembre 2010

Exercice 1.

1) $h'(\theta) = e^{i\theta} + \theta i e^{i\theta}$. Comme les vecteurs $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ d'affixes $e^{i\theta}$ et $ie^{i\theta}$ sont orthogonaux et unitaires, on a $||P'(\theta)|| = \sqrt{1+\theta^2}$ et donc la longueur L de C entre les points $P(0)$ et $P(1)$ est avec $a = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\theta^2}d\theta = \int_0^a \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\operatorname{ch} x dx = \int_0^a \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)du = \Big[\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{x}{2}\Big]_0^a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}.$$

[changement de variable $\theta = \operatorname{sh} x$].

2) Toujours dans le repère orthonormé $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, la pente du vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}(\theta)$ est $\tan\varphi = \theta$ et donc $\varphi = \arctan\theta$.

3) Le vecteur $\vec{t}(\theta)$ est d'affixe $h'(\theta)/\sqrt{1+\theta^2}$ et $\vec{n}(\theta)$ celui d'affixe $ih'(\theta)/\sqrt{1+\theta^2}$. Construction géométrique du repère $(\vec{t}(1), \vec{n}(1))$: il s'obtient du repère $(\vec{u}(1), \vec{v}(1))$ en tournant de $\varphi = \arctan 1 = \pi/4$.

Exercice 2.

1) On a $x(t) = (4\cos^2 t + 5)\sin t$ et $y(t) = (4\sin^2 t - 1)\cos t$.

Le calcul donne $x'(t) = 3(4\cos^2 t - 1)\cos t$ et $y'(t) = 3(4\cos^2 t - 1)\sin t$ et donc

$$f'(t) = x'(t) + iy'(t) = 3(4\cos^2 t - 1)e^{it}.$$

2) $L = \int_0^{\pi/4} 3(4\cos^2 t - 1)dt = \int_0^{\pi/4} 3(2\cos 2t + 1)dt = \Big[3\sin 2t + 3t\Big]_0^{\pi/4} = 3(1+\pi/4)$.

3) Les paramètres t des points singuliers de la courbe Γ sont ceux qui vérifient
$4\cos^2 t - 1 = (2\cos t - 1)(2\cos t + 1) = 0$ c'est-à-dire $t = \pm\pi/3$ ou $t = \pm 2\pi/3$.

4) On a

$$f''(t) = (f'(t))' = -24(\sin t\cos t)e^{it} + 3(4\cos^2 t - 1)ie^{it}$$

et donc la courbure signée $\kappa(t) = \det(f'(t), f''(t))/|f'(t)|^3 = (3(4\cos^2 t - 1))^2/|3(4\cos^2 t - 1)|^3 = 1/|3(4\cos^2 t - 1)|$ en un point non singulier de paramètre t.

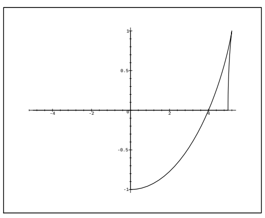
5) Le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe Oy et $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe Ox. Pour tracer la courbe Γ, il suffit donc de tracer l'arc Γ' des points de paramètres $t \in [0, \pi/2]$. En ajoutant à Γ' le symétrique de Γ' par rapport à l'axe Ox, on obtient l'arc Γ'' des points de paramètres $t \in [0, \pi]$ et en ajoutant le symétrique de Γ'' par rapport à l'axe Oy, on obtient la courbe Γ tout entière.

6) Le point $f(\pi/3)$ est le seul point singulier de l'arc Γ' d'après 3). En ce point, on a $f''(\pi/3) = -6\sqrt{3}e^{i\pi/3} \neq 0$ donc le vecteur d'affixe $f''(\pi/3) = -6\sqrt{3}e^{i}\pi/3$ dirige la tangente à la courbe en ce point. On a $f'''(t) = a(t)e^{i}t + (3(4\cos^2 t - 1) - 24\sin t\cos t)ie^{it}$ et donc $f'''(\pi/3)$ a une composante non nulle selon $ie^{i\pi/3}$. Les deux vecteurs d'affixes $f''(\pi/3)$ et $f'''(\pi/3)$ sont linéairement indépendants donc $p = 2$ et $q = 3$: le point singulier $f(\pi/3)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce.

7) Tableau de variation pour $t \in [0, \pi/2]$:

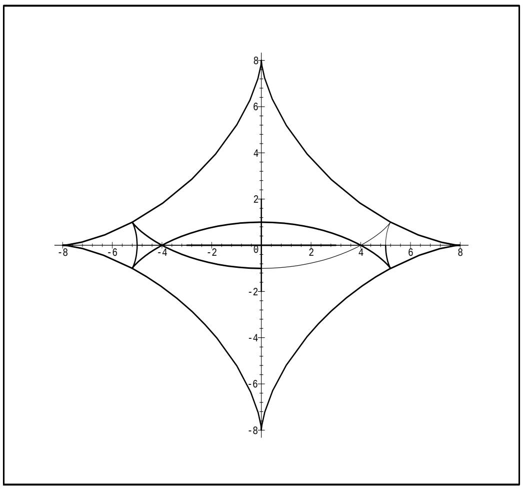
t	0		$\pi/3$		$\pi/2$
x'	9	$+$	0	$-$	0
x	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	5
y'	0	$+$	0	$-$	-3
y	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Tracé de l'arc Γ' correspondant :



8) Le calcul donne $O(t) = M(t) + \rho(t)\vec{n}(t) = (8\cos^3 t, 8\sin^3 t)$. La développée D est une *astroïde*.

Tracé de Γ et de sa développée D



Exercice 3 Soit ω la forme différentielle définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par $\omega = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dy$.

1) ω n'est pas *fermée* car

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \neq \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

ce qui implique que ω n'est pas exacte non plus.

2) On a $I_1 = \displaystyle\int_{\gamma_1}\omega = \int_0^{\pi/2}(\cos t+\sin t)d(\cos t) + (\cos t - \sin t)d(\sin t) = \int_0^{\pi/2}(\cos 2t - \sin 2t)dt = -1$ si γ_1 est le quart de cercle paramétré par $t \in [0, \pi/2] \mapsto (\cos t, \sin t)$.

3) On a $I_2 = \displaystyle\int_{\gamma_2}\omega = \int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}d(1-t) - \frac{2t-1}{2t^2-2t+1}dt = \int_0^1\Big(-\frac{2}{(2t-1)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{(2t^2-2t+1)'}{2t^2-2t+1}\Big)dt =$ $\displaystyle\Big[\arctan(1-2t) - \frac{1}{2}\ln(2t^2-2t+1)\Big]_0^1 = -\pi/2$ si γ_2 est le segment paramétré par $t \in [0,1] \mapsto (1-t, t)$.

4) Comme $\displaystyle\int_{\gamma_1}\omega \neq \int_{\gamma_2}\omega$ alors que les chemins γ_1 et γ_2 ont même origine et même extrémité, on retrouve que ω n'est pas exacte.

5) Comme $(x^2+y^2)\omega = (x+y)dx + (x-y)dy = d\Big(\dfrac{x^2}{2} + xy - \dfrac{y^2}{2}\Big)$, la fonction $f(x,y) = x^2+y^2$ est un facteur intégrant pour la forme ω.

***