Corrigé TD2

Exercice 2

1- Ici $f : (t,x) \mapsto (x-a)(x-b)$. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ainsi, d'après Cauchy-Lipschitz, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution telle que $x(0)=\alpha$ sur un intervalle maximal I. De plus cette solution sera $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. Cette équation est à variables séparées: $f(t,x)=F(x)G(t)$.
Étape 1: les solutions stationnaires (i.e. de la forme $x(t)$ =cste) sont les deux fonctions constantes $x_a : t \mapsto a$ et $x_b \mapsto b$.
Remarque : si $\alpha \notin \{a,b\}$ alors x ne croise pas les solutions stationnaires. Ainsi, si $\alpha < a$ alors $x(t) < a$; si $\alpha > b$ alors $x(t) > b$; si $\alpha \in]a,b[$ alors $x(t) \in]a,b[$ pour tout $t \in I$.
Étape 2: Soit x une solution non stationnaire. On a $\frac{x'}{(x-a)(x-b)} = 1$ et en intégrant des deux côtés, on obtient

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{(x(s)-a)(x(s)-b)}ds = \int_0^t ds = t.$$

Pour calculer l'intégrale de gauche, commençons par faire une décomposition en éléments simples: cherchons A et B tels que

$$(\star)\ :\quad \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$[(\star)\times(x-a)]_{x=a}$: $\frac{1}{a-b} = A$
$[(\star)\times(x-b)]_{x=b}$: $\frac{1}{b-a} = B$
Ainsi, on a

$$t = \frac{1}{b-a}\int_0^t \Big(-\frac{x'(s)}{x(s)-a} + \frac{x'(s)}{x(s)-b}\Big)ds = \frac{1}{b-a}\ln\frac{|x(t)-b|}{|x(t)-a|} - \frac{1}{b-a}\ln\frac{|\alpha-b|}{|\alpha-a|}$$

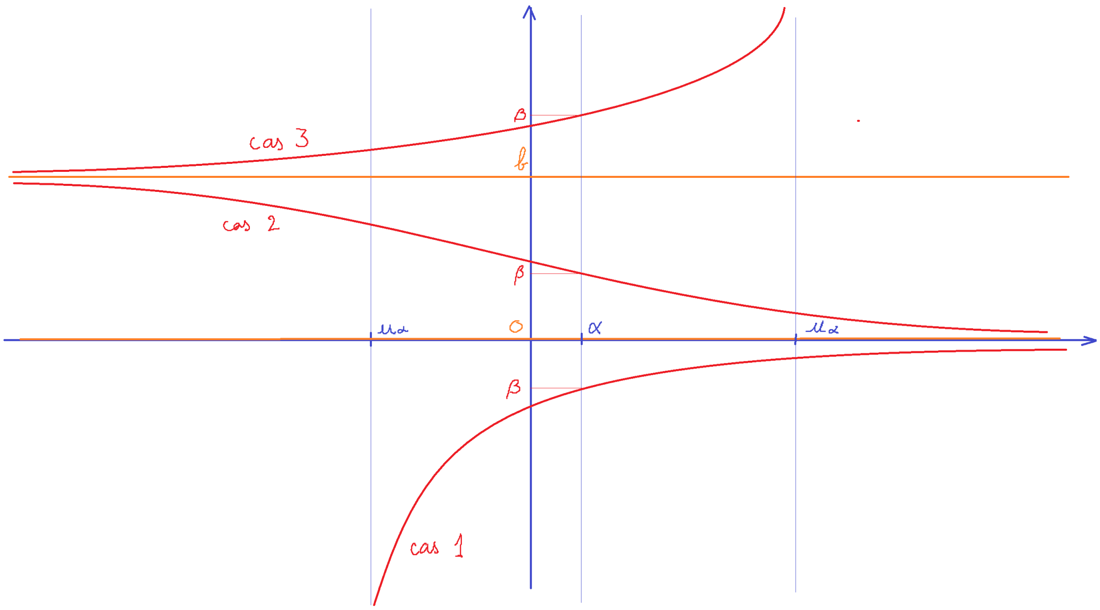
d'où $\dfrac{|x(t)-b|}{|x(t)-a|} = \dfrac{|\alpha-b|}{|\alpha-a|}e^{(b-a)t}$.
Étape 3: Distinguons les cas:

1. Si $\alpha < a$, alors $x(t) = \dfrac{b - a\frac{|\alpha-b|}{|\alpha-a|}e^{(b-a)t}}{1-\frac{|\alpha-b|}{|\alpha-a|}e^{(b-a)t}}$ et comme $\frac{|\alpha-b|}{|\alpha-a|} = \frac{b-\alpha}{a-\alpha} > 1$ on a $I =]t_\alpha, +\infty[$ où $t_\alpha = \frac{1}{b-a}\ln\frac{|\alpha-a|}{|\alpha-b|}$. x est croissante. De plus, $x(t) \underset{t\to t_\alpha}{\to} -\infty$ et $x(t) \underset{t\to+\infty}{\to} a$

2. Si $a < \alpha < b$, alors $x(t) = \dfrac{b + a\frac{|\alpha-b|}{|\alpha+a|}e^{(b-a)t}}{1-\frac{|\alpha-b|}{|\alpha-a|}e^{(b-a)t}}$ et $I=\mathbb{R}$. x est décroissante. De plus, $x(t) \underset{t\to-\infty}{\to} b$ et $x(t) \underset{t\to+\infty}{\to} a$.

3. Si $\alpha > b$, alors $x(t) = \dfrac{b - a\frac{|\alpha-b|}{|\alpha-a|}e^{(b-a)t}}{1-\frac{|\alpha-b|}{|\alpha-a|}e^{(b-a)t}}$ et comme $\frac{|\alpha-b|}{|\alpha-a|} = \frac{\alpha-b}{\alpha-a} < 1$ on a $I =]-\infty, t_\alpha[$ où $t_\alpha = \frac{1}{b-a}\ln\frac{|\alpha-a|}{|\alpha-b|}$. x est croissante. De plus, $x(t) \underset{t\to t_\alpha}{\to} +\infty$ et $x(t) \underset{t\to-\infty}{\to} b$.

Voici une représentation graphique de x dans les différents cas:

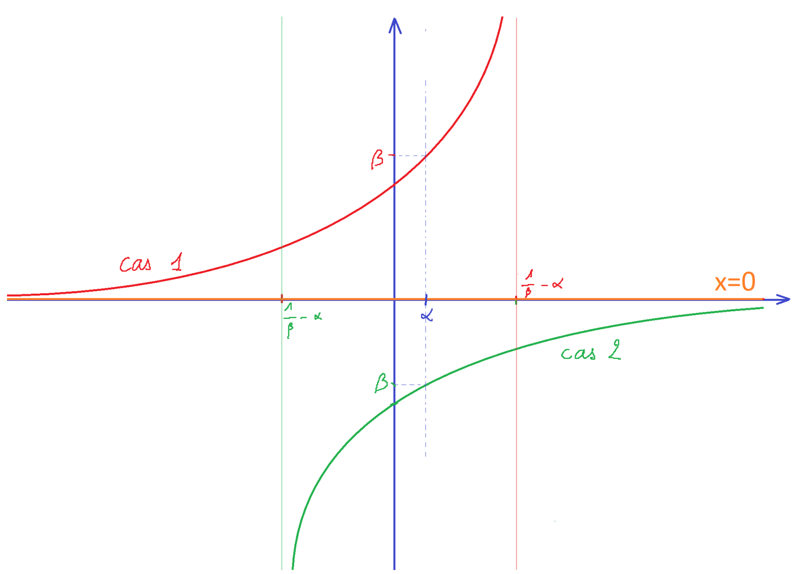


<u>2-</u> De même que dans la question précédente, $f : (t,x) \mapsto x^2 + a^2$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on peut faire appel à Cauchy-Lipschitz pour avoir à partir d'une condition initial de la forme $x(0) = \alpha$ l'existence et l'unicité (sur un intervalle maximal) d'une solution.

Commençons par une étude rapide dans le cas $a = 0$. Il y a une solution stationnaire $x = 0$. Soit x une solution non stationnaire; par (CL) l'unique solution sur un intervalle maximal I à satisfaisant $x(0) = \alpha$. On écrit

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)^2} ds = \int_0^t ds \iff \left[\frac{-1}{x(s)}\right]_0^t = t$$
$$\iff \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x(t)} = t \iff x(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - t}$$

Si $\alpha > 0$ alors $I =]-\infty, \frac{1}{\alpha}[$. Si $\alpha < 0$ alors $I =]\frac{1}{\alpha}, +\infty[$. x est croissante dans les deux cas. Voici une représentation de x dans ces deux cas:



On peut donc maintenant supposer que $|a| > 0$ (en utilisant que $a^2 = |a|^2$).

Étape 1: Il n'y a pas de solutions stationnaires.

Étape 2: On a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)^2+a^2}ds = \int_0^t ds \\
\iff &\int_0^t \frac{1}{|a|}\frac{\frac{x'(s)}{|a|}}{1+(\frac{x(s)}{|a|})^2}ds = t \\
\iff &\frac{1}{|a|}\Big(\text{Arctan}(\frac{x(t)}{|a|}) - \text{Arctan}(\frac{\alpha}{|a|})\Big) = t
\end{aligned}$$

Étape 3: Ceci nous permet de trouver une expression pour x.

$$x(t) = a\tan\Big(|a|t + \text{Arctan}(\frac{\alpha}{|a|})\Big).$$

L'intervalle maximal est $I = \Big]\frac{1}{|a|}\Big(-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\frac{\alpha}{|a|})\Big), \frac{1}{|a|}\Big(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\frac{\alpha}{|a|})\Big)\Big[$.

Exercice 4

1-
On considère

$$x' - x = \cos(t). \tag{1}$$

x est une équation linéaire scalaire du premier ordre à coefficient constant avec second membre. Le second membre étant continue, on sait qu'il existe une unique solution qui sera globale.
Étape 1: On considère l'équation homogène associée (H) $x' - x = 0$ dont les solutions est

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ce^t,\ C \in \mathbb{R}\}.$$

Étape 2: On cherche une solution particulière pour le second membre e^{it} sous la forme $z_p(t) = Q(t)e^{it}$ avec $\deg Q = 0$, c'est à dire $z_p(t) = ae^{it}$. On a

$$\begin{aligned}
iae^{it} - ae^{it} = e^{it}\ \forall t &\iff (i-1)a = 1 \\
&\iff a = \frac{-1}{1-i} = \frac{-1}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{-1-i}{2}.
\end{aligned}$$

Comme le coefficient est réel, une solution particulière est

$$x_p(t) = \text{Re}(z_p(t)) = \text{Re}\Big(\frac{-1-i}{2}e^{it}\Big) = \text{Re}\Big(\frac{-1-i}{2}(\cos t + i\sin t)\Big) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

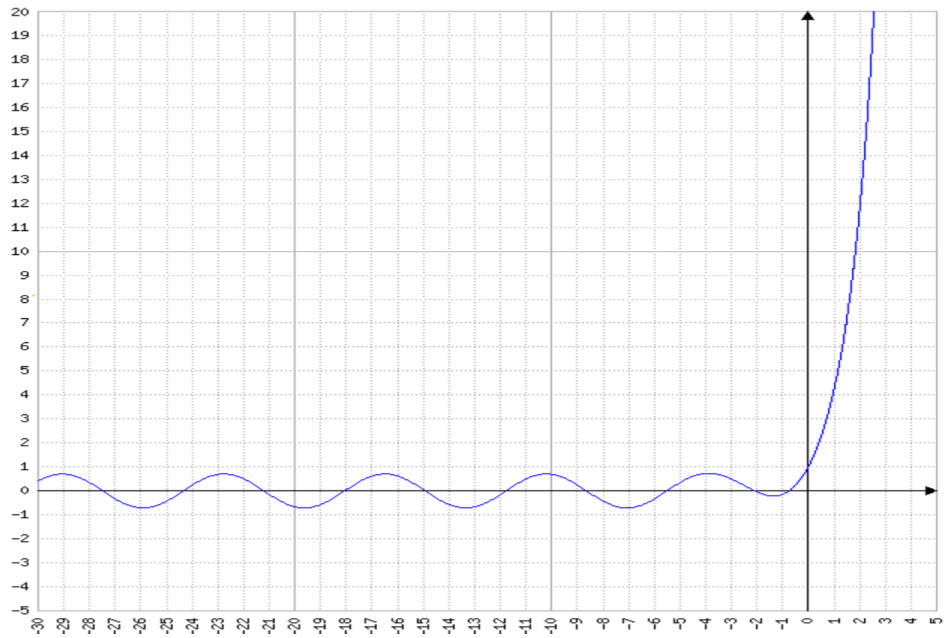
Étape 3: Conclusion : Les solutions de (1) sont les fonctions s'écrivant

$$x(t) = Ce^t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Étape 4: Il existe une seule solution satisfaisant en plus $x(0) = 1$. Elle correspond à $C = \frac{3}{2}$.

2- Voici une représentation graphique de cette fonction (notons la x)



Quand $t \to -\infty$, le graphe de x ressemble à celui de $t \mapsto -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t - \frac{\pi}{4})$ (car $\frac{3}{2}e^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$).
Et à ce titre $x(t)$ n'a pas de limite quand $t \to -\infty$.
Quand $t \to +\infty$, comme $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t - \frac{\pi}{4})\right| < 1$ et $\frac{3}{2}e^t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, la limite de $x(t)$ en $+\infty$ de x est $+\infty$.

Exercice 5

Nous réécrivons l'équation sous forme résolue :

$$(E) : x' - \frac{x}{t} = -\frac{2}{t+2}$$

où nous pouvons déjà conclure que l'existence et l'unicité d'une solution n'est vraie que sur $]0, +\infty[$.
Étape 1. On associe à (E) l'équation différentielle homogène

$$(H) : x' - \frac{x}{t} = 0$$

qui a comme ensemble solution:

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ce^{-(-\ln t)} \mid C \in \mathbb{R}\} = \{t \mapsto Ct \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Étape 2. On cherchera une solution particulière par la méthode de la variation de la constante : considérons la fonction $x_p(t) = C(t)t$ avec $C(t)$ une fonction à déterminer.
Si on remplace en (E) on obtient:

$$C'(t)t = -\frac{2}{t+2} \iff C'(t) = -\frac{2}{t(t+2)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t+2}$$

Ainsi on a que

$$C(t) = -\ln(t) + \ln(t+2) = \ln(\frac{t+2}{t})$$

Donc,

$$x_p(t) = \ln(\frac{t+2}{t})t$$

Étape 3. On a ainsi que

$$\mathcal{S}_E = \{t \mapsto Ct + \ln(\frac{t+2}{t})t \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 9

Cet exercice est un exercice d'application de la méthode pour trouver une solution particulière quand le second membre de l'équation différentielle est de la forme $e^{\delta t}$: on peut chercher une solution particulière $y(t)$ de la forme $P(t)e^{\delta t}$ avec P qui est un polynôme de degré 0,1 ou 2 en fonction de si δ n'est pas solution de l'équation caractéristique, est racine simple ou racine double respectivement.
a) On cherche à résoudre $x'' + 3x' + 2x = e^{-t}$, qui est une équation linéaire à coefficients constants avec second membre.
L'équation homogène associée est $(H) : x''+3x'+2x = 0$. L'équation caractéristique associée est $X^2+3X+2 = 0$ qui a pour solutions $X = -1$ et $X = -2$. Les solutions à (H) sont donc les $t \to Ae^{-t}+Be^{-2t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
Pour trouver toutes les solutions de l'équation originale, il ne reste qu'à trouver une solution particulière.
Comme -1 est racine de l'équation caractéristique, on cherche $y(t) = P(t)e^{-t}$ avec P de degré 1.
Cherchons donc une solution particulière sous la forme $y(t) = ate^{-t}$.
On a $y'(t) = ae^{-t} - ate^{-t}$ et $y''(t) = -2ae^{-t} + ate^{-t}$ et quand on injecte ces expressions dans (E) on a $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = ae^{-t} = e^{-t} \iff a = 1$, donc $y(t) = te^{-t}$ est une solution particulière.
Donc l'ensemble des solutions est donné par $S_E = \{t \to (A + t)e^{-t} + Be^{-2t}; A, B \in \mathbb{R}\}$.
b) Pour $x'' + 2x' + 2x = e^{-t}$, l'équation homogène associée a pour équation caractéristique $X^2 + 2X + 2 = (X + 1)^2 + 1$ qui a pour solutions complexes $X = -1 + i$ et $X = -1 - i$, donc les solutions de l'équation homogène associée sont $t \to e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière sous la forme Ce^{-t}.
Or $y(t) = Ce^{-t}$ donne $y'' + 2y' + 2y = Ce^{-t} = e^{-t} \iff C = 1$, donc $y(t) = e^{-t}$ est une solution particulière et l'ensemble des solutions est donné par $S_E = \{t \to e^{-t}(A \cos t + B \sin t + 1); A, B \in \mathbb{R}\}$.
c) Pour $x''+2x'+x = e^{-t}$, l'équation homogène associée a pour équation caractéristique $X^2+2X+1 = (X+1)^2$ qui a pour racine double $X = -1$, donc les solutions de l'équation homogène associée sont $t \to (At + B)e^{-t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
Comme -1 est racine double, on cherche une solution de la forme $P(t)e^{-t}$ avec P de degré 2, et comme $(At + B)e^{-t} \in S_H$, on peut juste essayer $y(t) = Ct^2e^{-t}$.
Or si $y(t) = Ct^2e^{-t}$, on a $y'(t) = C(-t^2 + 2t)e^{-t}$ et $y''(t) = C(t^2 - 4t + 2)e^{-t}$, donc $y'' + 2y' + y = C(t^2 - 2t^2 + 4t + t^2 - 4t + 2)e^{-t} = 2Ce^{-t} = e^{-t} \iff C = \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{2}t^2e^{-t}$ est une solution particulière.
Donc l'ensemble des solutions est donné par $S_E = \{t \to (\frac{t^2}{2} + At + B)e^{-t}; A, B \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 12

Question 1: Valeur propres et vecteurs propres

Soit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont données par les zéros du polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{I}_2) = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0.$$

Nous calculons $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. L'espace propre pour la valeur propre λ_1 correspond à $\ker(A - \lambda_1 \mathbf{I}_2)$, c.a.d. $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Il en suit

$$\ker(A - \lambda_1 \mathbf{I}_2) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

De manière analogue, l'espace propre pour la valeur propre λ_2 est donnée de

$$\ker(A - \lambda_2 \mathbf{I}_2) = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Question 2:

Notons que d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz pour chaque donnée initiale $(a,b)^T \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale pour l'équation homogène

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

L'ensemble de solutions est caractérisé par

$$\mathcal{S}_H = \left\{ P\text{diag}(e^{-t}, e^{-3t})P^{-1} \cdot c, \qquad c \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

où P est la matrice de transformation

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur $c \in \mathbb{R}^2$ est déterminé par la donnée initiale. Nous obtenons

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (c_1 - c_2)e^{-t} + (c_1 + c_2)e^{-3t} \\ (c_2 - c_1)e^{-t} + (c_1 + c_2)e^{-3t} \end{pmatrix} c, \qquad c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Sachant que $(a,b)^T = (x(0), y(0))^T$, nous trouvons

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution homogène avec donnée initiale $(a,b)^T$ est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a-b)e^{-t} + (a+b)e^{-3t} \\ (b-a)e^{-t} + (a+b)e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Question 3 et 4

Pour $a = 1$ et $b = 0$ ceci donne

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{-3t} \\ -e^{-t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons

$$\lim_{t \to +\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lim_{t \to -\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\infty \\ +\infty \end{pmatrix}.$$

En calculant

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{-t+e^{-3t}}}{-e^{-t} + e^{-3t}} - \frac{2}{e^{-2t} + 1} = 1$$

et

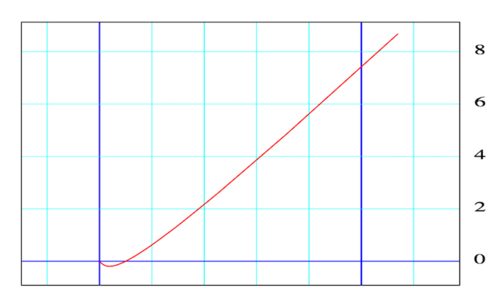
$$\lim_{t \to -\infty} y(t) - x(t) = -\infty.$$

On déduit qu'on a une branche parabolique d'équation $y = x$.

```
A:=[[2,1],[1,2]];
Y:=desolve([diff(y(t),t)+A*y(t)=0,y(0)=
[1,0]],y(t)); limit(Y,t,+infinity);
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{e^{-(3t)}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{-(3t)}-e^{-t}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Y1:=1/2*(e^(-t)+e^((-3)*t)); Y2:=1/2*
(-e^(-t)+e^((-3)*t)); plotparam(Y1+i*Y2,t=-
1...10,color=red)
```



Question 5:

Considérons

$$Y'(t) + A \cdot Y(t) = (\cos(t), \sin(t))^T. \tag{E}$$

On présente deux solutions pour trouver une solution particulière:

1. par superposition
2. en écrivant $b(t) = (p_1(t), p_2(t))^t e^{\delta t}$

Nous observons que

$$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} \\ \frac{1}{i}(e^{it} - e^{-it}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} \end{pmatrix} e^{it} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} e^{-it}.$$

Nous considérons séparément

$$Y'(t) + A \cdot Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} \end{pmatrix} e^{it} \tag{E1}$$

et

$$Y'(t) + A \cdot Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} e^{-it}. \tag{E2}$$

Si Y_1 est solution particulière de (E1) et Y_2 est solution particulière de (E2), alors

$$Y_P := Y_1 + Y_2$$

est une solution particulière de (E). Pour (E1), nous posons

$$Y_1 := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{it}$$

sachant que $i \neq \lambda_{1,2}$ et $\deg(p_1) = \deg(p_2) = 0$. Substituant Y_1 dans (E1) nous obtenons

$$\begin{pmatrix} (2+i)\alpha + \beta \\ \alpha + (2+i)\beta \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} e^{it}.$$

Il suffit de résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

Nous calculons l'unique solution

$$\alpha = \frac{3-i}{10}, \quad \beta = -\frac{i+2}{10}$$

du système linéaire et la solution particulière

$$Y_1(t) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3-i \\ -(2+i) \end{pmatrix} e^{it}. \tag{Y1}$$

Pour trouver une solution particulière de (E2) posons

$$Y_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{-it}.$$

Substituant en (E2), nous observons qu'il suffit de résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 1 & 2-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2}. \end{pmatrix}$$

Nous trouvons

$$\alpha = \frac{1}{10}(3+i), \qquad \beta = \frac{1}{10}(i-2)$$

Il en suit

$$Y2(t) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3+i\\ i-2\end{pmatrix} e^{-it}. \tag{Y2}$$

Sommant (Y1) et (Y2) nous trouvons

$$Y_P(t) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3-i\\ -(2+i)\end{pmatrix} e^{it} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3+i\\ i-2\end{pmatrix} e^{-it}.$$

Finalement,

$$\mathcal{S}_E = \mathcal{S}_H + \{Y_P\}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(c_1-c_2)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\\ (c_2-c_1)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3-i\\ -(2+i)\end{pmatrix} e^{it} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3+i\\ i-2\end{pmatrix} e^{-it}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(c_1-c_2)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\\ (c_2-c_1)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left((3-i)e^{it}+(3-i)e^{-it}\right)\\ \frac{1}{2}\left(-(2+i)e^{it}-(2-i)e^{-it}\right)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(c_1-c_2)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\\ (c_2-c_1)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}Re\left((3-i)e^{it}\right)\\ Re\left(-(2+i)e^{it}\right)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(c_1-c_2)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\\ (c_2-c_1)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}Re(3-i)Re(e^{it})-Im(3-i)Im(e^{it})\\ Re(-(2+i)Re(e^{it}-Im(-(2+i))Im(e^{it})\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(c_1-c_2)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\\ (c_2-c_1)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\cos(t)+\sin(t)\\ -2\cos(t)+\sin(t)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les coefficients c_1, c_2 sont déterminés de manière unique par la donnée initiale.

Solution 2

Nous observons que $Im(a+ib) = Re(-i(a+ib)$ ce qui permet d'écrire

$$\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Re(e^{it})\\ Im(e^{it})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Re(e^{it})\\ Re(-ie^{it})\end{pmatrix} = Re\left(\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} e^{it}\right).$$

On cherche une solution particulière de la forme $Y_P(t) = (\alpha, \beta)^T e^{it}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Substituant dans (E), nous observons qu'il suffit de résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix}2+i & 1\\ 1 & 2+i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}.$$

Nous trouvons la solution

$$\alpha = \frac{3-i}{5}, \qquad \beta = -\frac{1}{5}(2+i).$$

De conséquence, la fonction

$$Y_P := \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3-i\\ -(2+i)\end{pmatrix} e^{it}$$

est solution particulière de (E). Finalement,

$$\begin{aligned}
Y(t) :&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(c_1-c_2)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\\ (c_2-c_1)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\end{pmatrix} + \frac{1}{5}Re\left(\begin{pmatrix}3-i\\ -(2+i)\end{pmatrix} e^{it}\right)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(c_1-c_2)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\\ (c_2-c_1)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\cos(t)+\sin(t)\\ -2\cos(t)+\sin(t).\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Question 6

D'après question 4 la solution homogène satisfait

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(c_1-c_2)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\\ (c_2-c_1)e^{-t}+(c_1+c_2)e^{-3t}\end{pmatrix} = 0,$$

tandis que la fonction

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\cos(t)+\sin(t) \\ -2\cos(t)+\sin(t) \end{pmatrix}$$

n'admet pas de limite. Néanmoins, on peut déduire des bornes pour la solution et faire l'étude de la courbe. En dessous, le plot de la solution pour $a = 1$ et $b = 0$.

```
X:=1/2*(e^(-t)+e^((-3)*t))+1
/5*(3*cos(t)+sin(t)); Y:=1/2*
(-e^(-t)+e^((-3)*t))+1/5*((-2)*cos(t)+sin(t));
plotparam(X+i*Y,t,-0.5,20,tstep=0.01)
```

Enter: saut de ligne, Ctrl-Enter: eval