Corrigé TD1

Exercice 5

a) Les dérivées de x et y sont données par:

$$\begin{cases} x'(t) &= \frac{2t\times(1+t)-t^2\times 1}{(1+t)^2} &= \frac{t(t+2)}{(1+t)^2} \\ y'(t) &= \frac{3t^2\times(1+t)-t^3\times 1}{(1+t)^2} &= \frac{t^2(2t+3)}{(1+t)^2} \end{cases}$$

Un point singulier d'une courbe paramétrique est un point où la vitesse $\vec{v}(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$ est nulle. Il y a donc un point singulier en $t = 0$: c'est le point de coordonnées $(0, 0)$. Pour connaître la nature de ce point singulier, la méthode la plus simple ici est de faire un développement limité au voisinage de 0 :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2(1-t+o(t)) = t^2 - t^3 + o(t^3) \\ y(t) &= t^3(1-t+o(t)) = t^3 + o(t^3) \end{cases}$$

ce qui donne le comportement suivant au voisinage de 0 :

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3)$$

Ainsi $p = 2$ est pair et $q = 3$ est impair (car $(-1, 1)$ est non colinéaire à $(1, 0)$). Nous avons donc un point de rebroussement de première espèce, de vecteur tangent $(1, 0)$.

b) $t \to (-1)^+$: Quand t tend vers -1, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers l'infini. On cherche donc la limite de y/x. Pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on a $\frac{y(t)}{x(t)} = t$ qui tend vers -1 quand t tend vers -1. On calcule donc $(y+x)(t) = \frac{t^2+t^3}{1+t} = t^2$ qui tend vers 1 quand t tend vers -1. Par conséquent, on a une asymptote oblique d'équation $y = -x + 1$.
$t \to (-1)^-$: Même chose sauf que quand t tend vers $(-1)^+$.
$t \to +\infty$: Quand t tend vers $+\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers l'infini. On cherche donc la limite de y/x. $\frac{y(t)}{x(t)} = t$ tend vers $+\infty$ donc Γ possède une branche parabolique de direction $(0y)$.
$t \to -\infty$: Même chose sauf que quand t tend vers $+\infty$.

c) g est définie par $g(t) = \frac{t(2t+3)}{t+2}$. Sa dérivée vérifie donc

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ \ g'(t) = \frac{(2t+3+2t)\times(t+2) - t(2t+3)\times 1}{(t+2)^2} = \frac{2(t^2+4t+3)}{(t+2)^2}.$$

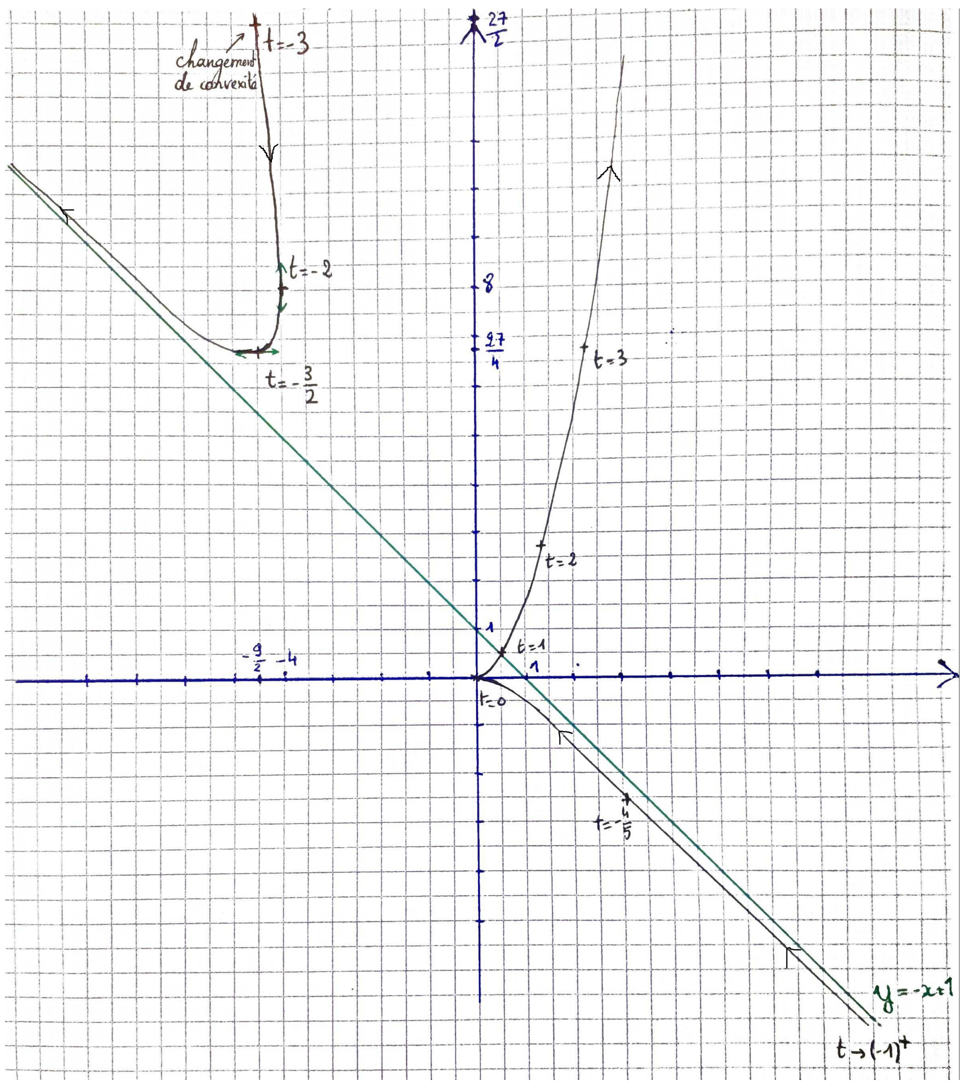
Pour trouver son signe, il nous faut factoriser $t^2+4t+3 = (t+3)(t+1)$. Ainsi, la courbe change de convexité quand $g'(t)$ change de signe, c'est à dire en $t = -3$ (-1 est particulier car il est en dehors du domaine de définition).

d)

t	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0		$-$		‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\frac{9}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	↘	8	↘	$\frac{27}{4} = 6.75$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	

La courbe admet une tangente verticale en $t = -2$ et une tangente horizontale en $t = -\frac{3}{2}$.

5.



Exercice 6

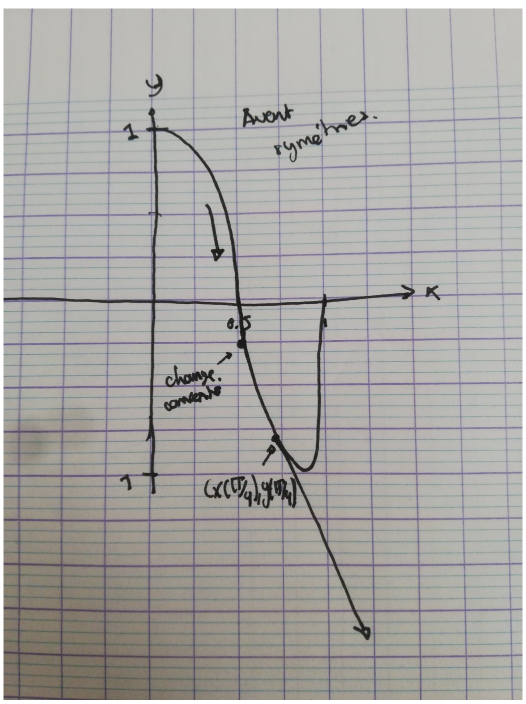
1) Notons d'abord que les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et qu'elles sont 2π périodiques. Il suffit donc d'étudier la courbe sur $[-\pi, \pi]$. Comme $x(t)$ est impair et $y(t)$ est pair, on a une symétrie par rapport à l'axe des y. On se restreint donc à $t \in [0, \pi]$. Après, notons que pour $t \in [0, \pi]$ on a que $x(\pi - t) = \sin(\pi - t) = \sin t = x(t)$ et $y(\pi - t) = \cos(3\pi - 3t) = -\cos(3t) = -y(t)$, ce qui nous permet de conclure que la courbe admet une symétrie d'axe (Ox). Finalement, le domaine d'étude de la courbe est réduit à l'intervalle $[0, \pi/2]$, puis on réalisera une symétrie d'axe (Ox) pour avoir la courbe sur $[0, \pi]$, et l'on fera ensuite une symétrie d'axe $(0y)$ pour avoir la courbe entière.

2) Nous avons que $x'(t) = \cos(t)$ et $y'(t) = -3\sin(3t)$:

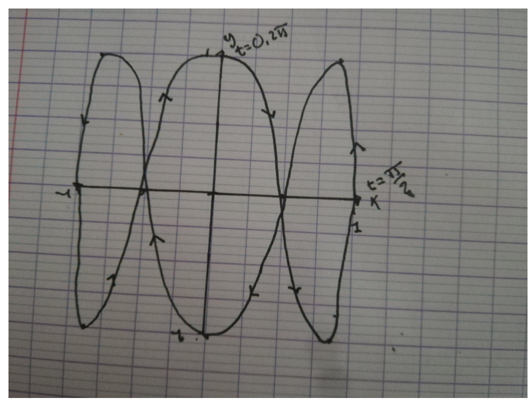
t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$			$+$		0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1
$y(t)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	

3) Pour calculer la tangente en $t = \pi/4$ nous calculons $x'(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et $y'(\pi/4) = -3\sqrt{2}/2$, un vecteur tangent est $(1, -3)$. L'équation de la tangente est donc en paramétrique $x_T(t) = t + \sqrt{2}/2$, $y_T(t) = -3t + \sqrt{2}/2$. En cartésien, l'équation de la tangente est donc $y_T = -3x_T + 2\sqrt{2}$.

4) Avant les symétries :



Avec les symétries:



5) Pour étudier la convexité, on calcule $x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t) = 3\sin(t)\sin(3t) + 9\cos(t)\cos(3t)$. En utilisant les identités trigonométriques on a que

$$\sin(t)\sin(3t) + 3\cos(t)\cos(3t) = \cos(4t) + 2\cos(2t) = 2\cos^2(2t) + 2\cos(2t) - 1.$$

Soit $z = \cos(2t)$, on est donc ramener à résoudre $z^2 + z - 1/2 = 0$ qui a pour solutions $z = (-1 \pm \sqrt{3})/2$. Comme $(-1 - \sqrt{3})/2 < -1$ la seul solution possible est $\cos(2t) = (-1 + \sqrt{3})/2$ ce qui implique que la courbe ne change de convexité qu'en

$$t = \frac{\cos^{-1}(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{2} \approx 0.6.$$

Exercice 11

Soit Γ la courbe polaire définie par $r(\theta) = \cos(3\theta)$. On remarque d'abord que l'expression $r(\theta)$ est bien définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, donc il n'y a pas de branche infinie.
La fonction r vérifie évidemment $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$ donc la courbe Γ est obtenue entièrement en parcourant un intervalle de longueur 2π. On peut remarquer que $r(\theta + \frac{2\pi}{3}) = \cos(3\theta + 2\pi) = \cos(3\theta) = r(\theta)$ ce qui nous permet d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{3}$ puis de faire deux rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ pour obtenir l'intégralité de la courbe. On peut donc se placer sur l'intervalle d'étude $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. On peut remarquer de plus que $r(-\theta) = r(\theta)$ ce qui nous donne une nouvelle relation pour la courbe : on choisit l'intervalle d'étude $[0, \frac{\pi}{3}]$, puis on fera une symétrie par rapport à l'axe $(0x)$ pour avoir la courbe tracée sur $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, puis les rotations nécessaires.
Pour étudier les éventuels points singuliers, cherchons les angles dans cet intervalle tels que $r(\theta) = 0$.
On voit que l'on a

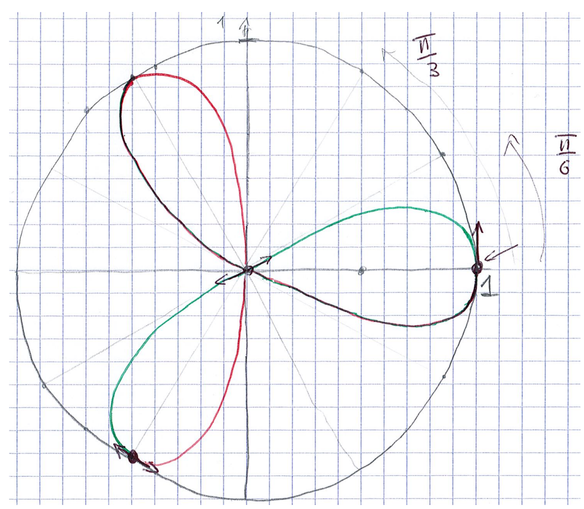
$$r(\theta) = 0 \iff \cos(3\theta) = 0 \iff 3\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff \theta \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{\pi}{3}},$$

et comme par ailleurs

$$r'(\theta) = 0 \iff \sin(3\theta) = 0 \iff 3\theta \equiv 0 \pmod{\pi} \iff \theta \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{3}}$$

on n'a pas de valeurs de θ pour lesquelles $r(\theta) = r'(\theta) = 0$, donc il n'y a pas de point singulier.
Pour finir le tracé de la courbe, on voit que sur l'intervalle d'étude, r décroit de $r(0) = 1$ à $r(\pi/3) = -1$, qu'en ces angles, $r'(\theta) = 0$ donc la tangente est portée par $\vec{e_\theta}$. Par ailleurs, comme pour tout angle, on a $|r(\theta)| \leq 1$, la courbe est contenue dans le disque unité.

Nous remarquons de plus que r s'annule en $\frac{\pi}{6}$ et que la tangente est alors portée par $\vec{e_r}$.
Cela permet de tracer la courbe entre $[0, \frac{\pi}{3}]$ (partie verte), puis d'obtenir par symétrie la courbe entre les angles $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ (partie noire), puis par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, on obtient la courbe entre les angles $[-\frac{\pi}{3}, \pi]$ (partie rouge), et avec une autre rotation, tous les angles entre $[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$. On remarque que la dernière rotation n'est en fait pas nécessaire, que la courbe est en fait parcourue deux fois quand les angles décrivent un intervalle de longueur 2π.
Ceci est dû au fait que $r(\theta + \pi) = \cos(3\theta + 3\pi) = -r(\theta)$ donc $M(\theta) = M(\theta + \pi)$.



Exercice 12.2

Notons que le domaine de définition est donné par $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{4}\}$. La fonction n'est pas périodique et n'admet des symétries évidentes. On l'étudiera donc sur son ensemble de définition.
Branches infinies. On note que

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}^-} r(\theta) = -\infty, \qquad \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}^-} r(\theta) = +\infty.$$

Pour déterminer l'équation de la tangente, calculons

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} r(\theta) \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \left[\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) + \frac{\theta - \frac{\pi}{4}}{\theta - \frac{\pi}{4}} + o(\theta - \frac{\pi}{4}) \right] = 1,$$

où on a utilisé le développement limite de sin. Par consequence, nous avons une asymptote d'équation $Y = 1$ dans le repère tournée de $\frac{\pi}{4}$.
Pour $\theta \to \pm\infty$, nous avons

$$\lim_{\theta \to +\infty} r(\theta) = \lim_{\theta \to -\infty} r(\theta) = 1.$$

Cela indique qu'il y a un cercle asymptote de rayon 1 centré dans l'origine pour $\theta \to \pm\infty$.
Etude des points singuliers. On rappelle que si $r(\theta) \neq 0$ ou $r'(\theta) \neq 0$, alors le point est regulier. Observons que $r(\theta) = 0$ si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{4} - 1$. Sachant que $r'(\theta) = \frac{-1}{(\theta - \frac{\pi}{4})^2} < 0$ dans tout le domaine de définition, il n'existe pas de point singulier.
Finalement, le critére

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$$

permet d'anticiper les changements de convexité. Calculons,

$$1 + \frac{2}{\theta - \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{(\theta - \frac{\pi}{4})^2} + \frac{2}{(\theta - \frac{\pi}{4})^4} - \frac{2}{(\theta - \frac{\pi}{4})^3} - \frac{2}{(\theta - \frac{\pi}{4})^4} = 0$$

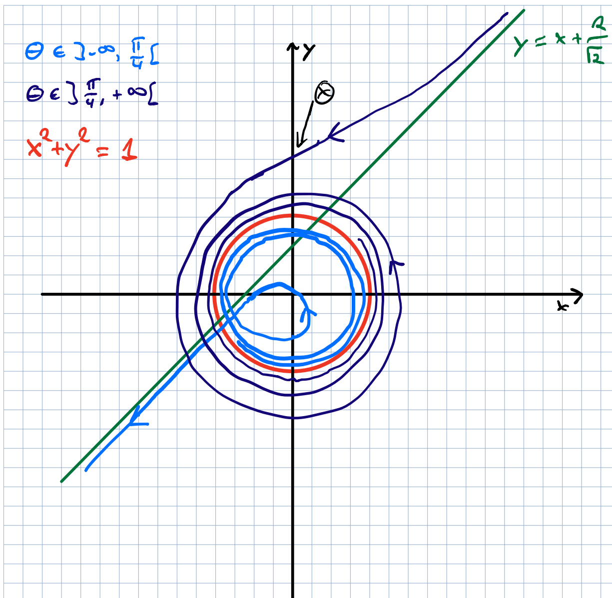
On pose $z = \frac{1}{\theta - \frac{\pi}{4}}$ pour trouver

$$1 + 2z + z^2 - 2z^3 = 0.$$

La seule racine réelle (trouvée par calculatrice/ XCAS) est $z \approx 1,4376$ et $\theta \approx 1,481$.

Tableau de variations

θ	$-\infty$	$\frac{\pi}{4}$	$+\infty$
$r'(\theta)$	$-$	‖	$-$
$r(\theta)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

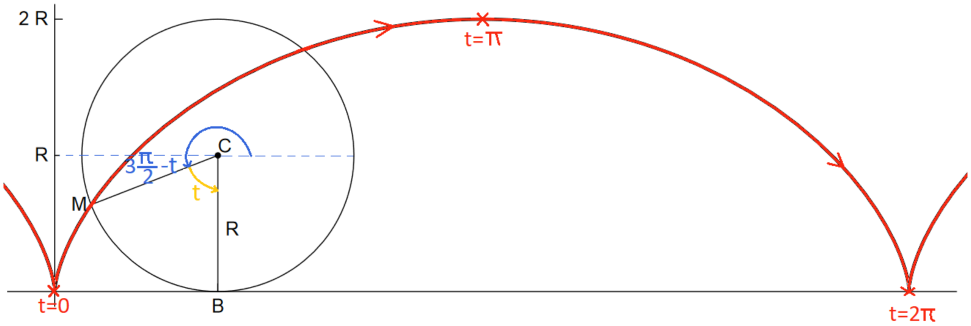


⊗ Le changement de convexité a lieu pour $\theta = 1,481$, donc

$$\begin{pmatrix} x(1,481) \\ y(1,481) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,22 \\ 2,43 \end{pmatrix}$$

Exercice 18

Remarque : Il s'agit de la courbe que forme un point fixé sur une roue de vélo en mouvement (sans glissement).



En effet, le vecteur $\overrightarrow{OM} = \binom{x(t)}{y(t)}$ peut se décomposer, par la relation de Chasles, comme suit

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} Rt \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} \cos(\frac{3\pi}{2} - t) \\ \sin(\frac{3\pi}{2} - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rt - R\sin(t) \\ R - R\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Une étude rapide de la courbe paramétrée peut aussi nous indiquer qu'un arc de cycloïde est décrit quand les t vont de 0 à 2π. On commence par calculer la vitesse

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R - R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}.$$

La longueur d'un arc de cycloïde est alors donnée par

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{2\pi} ||\vec{v}(t)||dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(R - R\cos(t))^2 + (R\sin(t))^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - 2R^2\cos(t) + R^2\cos^2(t) + R^2\sin^2(t)}dt \\
&= R\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)}dt = \sqrt{2}R\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2(t/2)}dt = 2R\int_0^{2\pi} |\sin(t/2)|dt = 2R\int_0^{2\pi} \sin(t/2)dt \\
&= 4R[-\cos(t/2)]_0^{2\pi} = 4R(-\cos(\pi) + 1) = 8R,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que $\sin(t/2) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 20

Comme $x'(t) = -e^{-t}(\cos(t) + \sin t)$ et $y'(t) = -e^{-t}(\sin(t) - \cos(t))$ nous avons que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|v(t)\|dt &= \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{e^{-2t}(\cos(t) + \sin t)^2 + e^{-2t}(\sin(t) - \cos(t))^2} \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 e^{-t} = \sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^1 = \sqrt{2}(1 - e^{-1}).
\end{aligned}$$

Exercice 21

Soient $a > b > 0$ deux réels. On regarde l'ellipse définie par $x(t) = a\cos(t)$ et $y(t) = b\sin(t)$ (Remarque : le cas $a = b = 1$ correspond au cercle de rayon 1, et fournit une façon simple de vérifier ses calculs sur un exemple connu).
On commence par calculer la vitesse en coordonnées cartésiennes. On a

$$x'(t) = -a\sin(t), \quad y'(t) = b\cos(t).$$

En particulier, le vecteur vitesse au temps t est donné par : $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{pmatrix}$.

Le repère de Frénet associé est donc

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{||\vec{v}(t)||} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}} \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t), \end{pmatrix} \quad \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}} \begin{pmatrix} -b\cos(t) \\ -a\sin(t) \end{pmatrix}.$$

L'accélération dans le repère original est donnée par $a(t) = \begin{pmatrix} -a\cos(t) \\ -b\sin(t) \end{pmatrix}$, on obtient alors les accélérations tangentielles et normales :

$$a_T(t) = a(t).\vec{T}(t) = \frac{a^2\cos(t)\sin(t) - b^2\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}} = \frac{(a^2 - b^2)\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}}$$

et

$$a_N(t) = a(t).\vec{N}(t) = \frac{ab\cos^2(t) + ab\sin^2(t)}{\sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}}.$$

En particulier, comme le rayon de courbure $R(t)$ vérifie $a_N(t) = \frac{||\vec{v}(t)||^2}{R(t)}$, on a

$$R(t) = \frac{||\vec{v}(t)||^2}{a_N(t)} = \frac{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^{3/2}}{ab}.$$

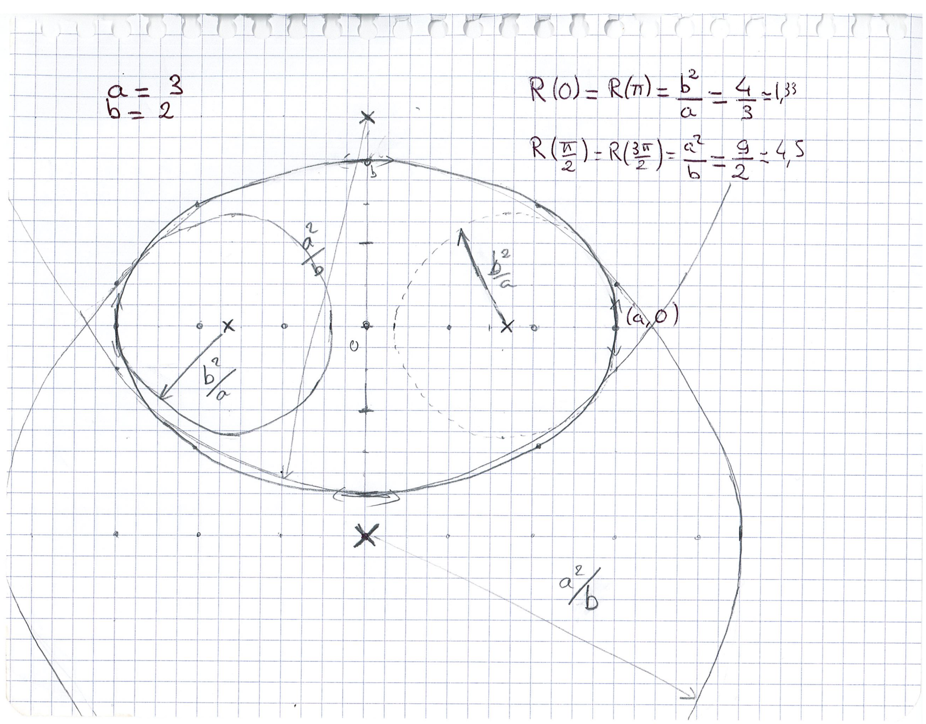
Pour les points particuliers demandés, ils correspondent à $t = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$, et on a

$$R(0) = R(\pi) = \frac{b^2}{a} \quad R(\pi/2) = R(3\pi/3) = \frac{a^2}{b}.$$

[En testant le cas du cercle $a = b = 1$, on obtient bien :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \vec{e}_\theta, \quad \vec{T}(t) = \vec{e}_\theta, \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = -\vec{e}_r, \quad a_T(t) = 0, a_N(t) = 1, \quad R(t) = 1,$$

ce qui donne un rayon de courbure constant, et donc le cercle osculateur est toujours le cercle lui-même.]



Exercice 23

1) Soit C la spirale logarithmique d'équation polaire $r(\theta) = e^{-\theta}$. On calcule la vitesse

$$\vec{v}(\theta) = r'(\theta)\vec{e}_r(\theta) + r(\theta)\vec{e}_\theta(\theta) = e^{-\theta}\left(-\vec{e}_r(\theta) + \vec{e}_\theta(\theta)\right)$$

d'où

$$\|\vec{v}(\theta)\| = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} = \sqrt{2}e^{-\theta}.$$

Soit $\alpha \geq 0$. La longueur d'arc entre les point 0 et α vaut

$$s(\alpha) = \int_0^\alpha \|\vec{v}(\theta)\|d\theta = \sqrt{2}\int_0^\alpha e^{-\theta}d\theta = -\sqrt{2}\Big[e^{-\theta}\Big]_0^\alpha = \sqrt{2}(1 - e^{-\alpha}).$$

Pour $\alpha < 0$, on peut calculer de manière analogue $s(\alpha) = \int_\alpha^0 \|\vec{v}(\theta)\|d\theta = \sqrt{2}(e^{-\alpha} - 1)$.
La longueur de l'arc entre le paramètre 0 et $\theta > 0$ est donc $s(\theta) = \sqrt{2}(1 - e^{-\theta})$. Pour déterminer un paramétrage par longueur d'arc, on se demande quel est l'angle θ qui vérifie que la longueur vaut s. C'est à dire que l'on construit la fonction $\theta(s)$ qui est la fonction inverse de $s(\theta)$: on obtient

$$\theta(s) = -\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

Un paramétrage de C par longueur d'arc est donc donné par

$$C_{arc}(s) = \begin{pmatrix} r(\theta(s))\cos(\theta(s)) \\ r(\theta(s))\sin(\theta(s)) \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ -\sin\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right). \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que la vitesse associée $\vec{v}_{arc}$ vérifie $\int_0^s \|\vec{v}_{arc}(s)\|ds = s$.
2) Repère de Frenet. Comme nous avons calculé $\vec{v}(\theta)$ et $\|\vec{v}(\theta)\|$ il est facile d'en déduire

$$\vec{T}(\theta) = \frac{\vec{v}(\theta)}{\|\vec{v}(\theta)\|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_r(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_\theta(\theta).$$

En prenant le tourné de $\pi/2$ on obtient

$$\vec{N}(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_\theta(\theta) - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_r(\theta).$$

3. L'accélération est égale

$$\begin{aligned}\vec{a} &= -e^{-\theta}\left(-\vec{e}_r(\theta) + \vec{e}_\theta(\theta)\right) + e^{-\theta}\left(-\vec{e}_\theta(\theta) - \vec{e}_r(\theta)\right) \\ &= -2e^{-\theta}\vec{e}_\theta(\theta)\end{aligned}$$

et l'acceleration normale

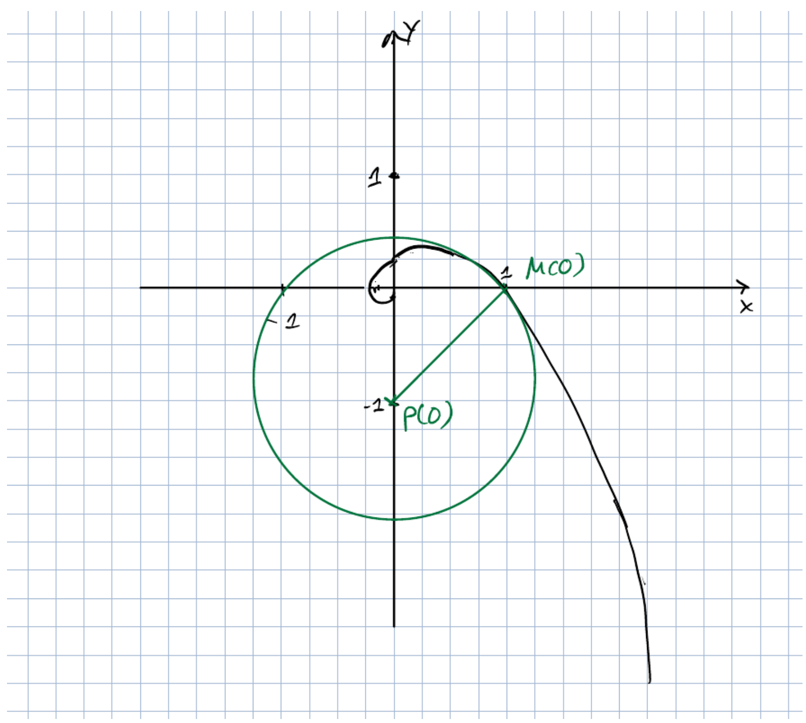
$$a_n = \vec{a}\cdot\vec{N} = -2e^{-\theta}\vec{e}_\theta(\theta)\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\theta(\theta)+\vec{e}_r(\theta)) = \sqrt{2}e^{-\theta}.$$

Donc,

$$\kappa(\theta) = \frac{a_N}{\|v\|^2} = \frac{\sqrt{2}e^{-\theta}}{2e^{-2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{-\theta}}.$$

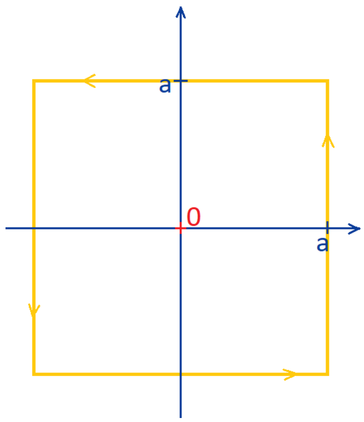
4) Le cercle osculateur pour $\theta = 0$ est de rayon $R = \kappa(0)^{-1} = \sqrt{2}$ et de centre

$$P(0) = M(0) + R(0)\vec{N}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Exercice 30

1-

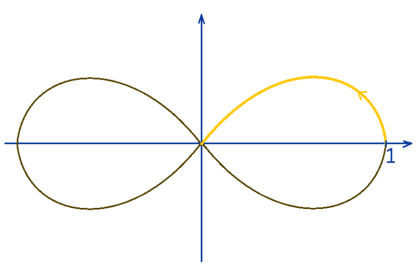


On décompose $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, où
γ_1 est le segment de droite (allant du bas vers le haut),
paramétré par $x(t) = a$ et $y(t) = t$ pour $t \in [-a, a]$;
γ_2 est le segment du haut (allant du droite à gauche),
paramétré par $x(t) = -t$ et $y(t) = a$ pour $t \in [-a, a]$;
γ_3 est le segment de gauche (allant du haut vers le bas),
paramétré par $x(t) = -a$ et $y(t) = -t$ pour $t \in [-a, a]$;
γ_4 est le segment du bas (allant du gauche à droite),
paramétré par $x(t) = t$ et $y(t) = -a$ pour $t \in [-a, a]$.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_4} \omega \\
&= \int_{-a}^{a} \frac{a+t}{a^2+t^2} dt + \int_{-a}^{a} \frac{-t-a}{(-t)^2+a^2}(-dt) + \int_{-a}^{a} \frac{-a-t}{(-a)^2+(-t)^2}(-dt) + \int_{a}^{a} \frac{t-(-a)}{t^2+(-a)^2} dt \\
&= 4\int_{-a}^{a} \frac{a+t}{a^2+t^2} dt = 4\int_{-a}^{a} \frac{1/a}{1+(\frac{t}{a})^2} dt + 4\int_{-a}^{a} \frac{t}{a^2+t^2} dt \\
&= 4\Big[\arctan(\frac{t}{a})\Big]_{-a}^{a} + 4\Big[\frac{1}{2}\ln(a^2+t^2)\Big]_{-a}^{a} = 4\big(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})\big) + 2\big(\ln(2a^2) - \ln(2a^2)\big) = 2\pi.
\end{aligned}$$

Comme l'intégrale sur un chemin fermé est non nulle, ceci démontre que cette forme différentielle n'est pas exacte. Pourtant, un calcul montre que cette forme différentielle est fermée.

2-



On vérifie que ω est fermée :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^x \sin y + 2xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

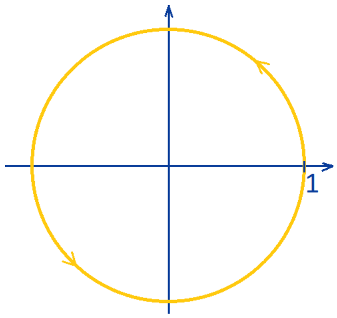
Nous cherchons donc un potentiel V, et nous vérifions que

$$V(x, y) = e^x \cos y + \frac{1}{2}x^2y^2$$

convient (cad $\omega = dV$).
Il suffit donc d'évaluer V au point de départ $A = (1, 0)$ et au point d'arrivée $B = (0, 0)$ pour conclure que

$$\int_\gamma \omega = V(0, 0) - V(1, 0) = 1 - e.$$

3-



$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \big(y(\theta)^2 x'(\theta) + x(\theta)^2 y'(\theta)\big) d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \big(-\sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^3\big) d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \big(-\sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^3\big) d\theta + \int_{\theta=\pi}^{2\pi} \big(-\sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^3\big) d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \big(-\sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^3\big) d\theta + \int_{\theta=0}^{\pi} \big(-\sin(\theta+\pi)^3 + \cos(\theta+\pi)^3\big) d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \big(-\sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^3\big) d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi} \big(-\sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^3\big) d\theta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Pourtant ω n'est pas fermée, et donc pas exacte.

Exercice 32

Considérons l'intégral de la forme différentiel $\omega = xdy$ pour une courbe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma xdy &= -3 \int_a^b \sin(t)\sin(3t)dt \\
&= \frac{3}{2}\left(\int_a^b \cos(4t)dt - \int_a^b \cos(2t)dt\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\left[\frac{\sin(4t)}{4}\right]_a^b - \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_a^b\right)
\end{aligned}
$$

en utilisant $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.
Pour appliquer le Théorème de Green-Riemann on découpe la courbe de Lissajous $\gamma : [-\pi/6, 11\pi/6] \to \mathbb{R}^2$ en 3 morceaux qui sont courbes simples:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 : [-\pi/6, \pi/6] \cup [5\pi/6, 7\pi/6] \to \mathbb{R}^2, \\
&\gamma_2 : [\pi/6, 5\pi/6] \to \mathbb{R}^2, \\
&\gamma_3 : [7\pi/6, 11\pi/6] \to \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

On note que comme la courbe de Lissajous a une symétrie par rapport a l'axe $0y$, l'aire a l'intérieur de γ_2 est la même que celle a l'intérieur de γ_3. Notons aussi que la courbe γ_1 n'est pas orientée dans le sens trigonométrique.
Nous obtenons ainsi que

$$
\mathcal{A} = \int\int_U 1dxdy = -\int_{\gamma_1} xdy + 2\int_{\gamma_2} xdy = -(-\frac{3\sqrt{3}}{4}) + 2(\frac{3\sqrt{3}}{8}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.
$$

Exercice 34

Dans cet exercice, on cherche à calculer le centre d'inertie d'un quart d'ellipse de paramètres $a, b > 0$, notons ce domaine $\mathcal{E}$.
Pour cela, on va vouloir faire des moyennes sur le domaine, donc des intégrales sur $\mathcal{E}$, et donc on va utiliser le théorème de Green-Riemann pour transformer le problème en un calcul d'intégrales de formes différentielles sur le contour extérieur dont on a un paramétrage.
En effet, une paramétrisation de l'ellipse est $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = b\sin(t)0$, donc on va pouvoir décrire le contour de $\mathcal{E}$ par trois courbes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 : t \in [0, a] \to (t, 0), \\
&\gamma_2 : t \in [0, \frac{\pi}{2}] \to (a\cos(t), b\sin(t)),
\end{aligned}
$$

$$\gamma_3 : t \in [0,b] \to (0, b-t)$$

La première étape est de calculer l'aire de $\mathcal{E}$. Pour cela, on utilise le théorème de Green Riemann, et on cherche une forme différentielle $\omega = Mdx + Ndy$ telle que

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1.$$

Il suffit donc de prendre par exemple $M = 0$ et $N = x$. Donc

$$\mathcal{A} = \int\int_{\mathcal{E}} 1dxdy = \int_\gamma xdy = \int_{\gamma_1} xdy + \int_{\gamma_2} xdy + \int_{\gamma_3} xdy.$$

Comme sur γ_1, la coordonnée y ne varie pas, la première intégrale est nulle. Comme sur la troisième portion de contour, la coordonnée x est nulle, la troisième intégrale est également nulle. Il ne reste donc que la contribution de la première.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{\gamma_2} xdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos(t)(b\cos(t)dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos^2(t)dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos(2t)dt = \frac{\pi ab}{4} + \frac{ab}{4}[\sin(2t)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi ab}{4}\end{aligned}$$

(Remarque : une autre méthode aurait été de calculer l'aire sur toute l'ellipse puis de la diviser par 4 par symétrie.)

Calculons ensuite les coordonnées du centre de masse. Pour la première coordonnée x_0, on a $\mathcal{A}x_0 = \int\int_{\mathcal{E}} xdxdy$. On cherche donc M, N tels que

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = x.$$

Il suffit donc de prendre $\omega = \frac{x^2}{2}dy$ Pour les mêmes raisons que pour l'aire, les contributions des intégrales curvilignes des premiere et troisième partie de la courbe vont être nulles. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A}x_0 &= \int_{\gamma_2} \frac{x^2}{2}dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos(t))^2(b\cos(t)dt) = \frac{a^2b}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)dt \\ &= \frac{a^2b}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(3t)dt = \frac{a^2b}{2}[\frac{3}{4}\sin(t) + \frac{1}{12}\sin(3t)]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{a^2b}{2}(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}) = \frac{a^2b}{3},\end{aligned}$$

et donc $x_0 = \frac{a^2b}{3}\frac{4}{\pi ab} = \frac{4}{3\pi}a$ (Numériquement, cela correspond à environ $x_0 \approx 0.43a$, ce qui est visuellement cohérent).

De même, pour obtenir la coordonnée y_0 du centre d'inertie, on cherche une solution de

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = y,$$

et il suffit donc de choisir par exemple $\omega = -\frac{y^2}{2}dx$. Comme précédemment, on a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A}y_0 &= \int_{\gamma_2} -\frac{y^2}{2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (b\sin(t))^2(-a\sin(t)dt) = \frac{ab^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)dt \\ &\underset{u=\pi/2-t}{=} \frac{ab^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(u)du = \frac{ab^2}{3},\end{aligned}$$

ce qui était prévisible par symétrie, donc $y_0 = \frac{4}{3\pi}b$.

Donc le centre de symétrie a pour coordonnées cartésiennes

$$(x_0, y_0) = (\frac{4}{3\pi}a, \frac{4}{3\pi}b).$$