Examen du jeudi 11 janvier 2024, de 8h30 à 10h30.
Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits.
Ce sujet comporte **deux pages**. *Le barème est indicatif.*

1. Courbe paramétrée, forme différentielle (9 points)

On considère la courbe paramétrée C

$$\begin{cases} x(t) &= t^3 \\ y(t) &= \sin(t)^2 \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi]$$

et les points $A(-\pi^3, 0)$ pour $t = -\pi$, et $B(\pi^3, 0)$ pour $(t = \pi)$.

(1) Déterminer les symétries éventuelles et le domaine d'étude de (C).

(2) La courbe admet-elle des branches infinies pour $t \in [-\pi, \pi]$? Si oui, les décrire (asymptotes, branches paraboliques...)

(3) La courbe admet-elle des points singuliers ? Si oui, les décrire (tangente, position par rapport à la tangente).

(4) Dresser le double tableau de variations sur le domaine d'étude, puis faire le tracé de la courbe en indiquant le sens de parcours.

(5) Soit Z la zone délimitée par la courbe (pour $t \in [-\pi, \pi]$) et l'axe Ox. Hachurer Z et déterminer son aire (on pourra utiliser Green-Riemann pour se ramener à une intégrale curviligne, puis à une intégrale classique que l'on pourra déterminer à la calculatrice en donnant la commande utilisée).

(6) (Bonus) Déterminer l'ordonnée du centre de gravité G de la zone Z

$$y_G = \frac{\iint_Z y dx\, dy}{\iint_Z dx\, dy}$$

représenter G sur la figure (on pourra procéder comme à la question précédente).

(7) On considère la forme différentielle

$$\omega = e^{xy}(y\cos(x) - \sin(x))dx + x\cos(x)e^{xy}dy$$

(a) Cette forme est-elle fermée ? Exacte ? Si oui, en donner un potentiel.

(b) Calculer $\int_C \omega$

2. Calcul variationnel (2 points)

Donner les équations d'Euler-Lagrange correspondant au lagrangien

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$$

où $x(t) \in \mathbb{R}$, et $m > 0$ et $g > 0$ sont des constantes. Déterminer le hamiltonien associé.

3. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (9 POINTS)

3.1. **Préliminaire.** Donner la solution générale de l'équation différentielle d'inconnue la fonction z où $z(x) \in \mathbb{R}$:

$$z' = 4xz \quad (*)$$

3.2. **Équation différentielle avec paramètre.** Pour E un réel fixé, on considère l'équation différentielle d'inconnue y avec $y(x) \in \mathbb{R}$

$$-y'' + 4x^2 y = Ey \quad (**)$$

(1) Quel est l'ordre de cette équation différentielle ? Est-elle linéaire ? À coefficients constants ? Quelle est la nature de l'ensemble des solutions ?

(2) Pour quelle valeur de E la fonction $s(x) = \exp(-x^2)$ est-elle solution ? On suppose dans les questions 3 et 4 que E a cette valeur.

(3) On pose comme dans la méthode de variation de la constante

$$y(x) = K(x)s(x) = K(x)\exp(-x^2)$$

Montrer que y est solution de $(**)$ si et seulement si $z = K'$ est solution de l'équation différentielle $(*)$.

(4) On pose

$$F(x) = \int_0^x \exp(2t^2)\, dt$$

Exprimer K en fonction de F (N.B. : il n'est pas possible d'exprimer F à l'aide des fonctions élementaires). En déduire la solution générale de $(**)$

(5) Pour quelle valeur de E la fonction $\tilde{s}(x) = x\exp(-x^2)$ est-elle solution de $(**)$? Décrire en quelques lignes les étapes permettant de déterminer la solution générale de $(**)$ pour cette valeur de E.

(6) (Bonus) On suppose qu'il existe une solution de $(**)$ sous la forme

$$\hat{s}(x) = P_n(x)\exp(-x^2)$$

où P_n est un polynôme de degré n. Pour quelle valeur de E (en fonction de n) est-ce possible ? (indication : remplacer $\hat{s}$ dans $(**)$ et regarder quel est le terme de plus haut degré en facteur de $\exp(-x^2)$).