Examen du 11 janvier 2023, de 14h à 16h.
Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits.
Ce sujet comporte **deux pages**. *Le barème est indicatif.*

1. Courbe paramétrée (7 points)

Soit C l'arc de courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t^2+t^4 \\ y & = & 2t+t^3 \end{array}\right. , \quad t \in [-1,1]$$

Soient A et B les points de paramètres $t=-1$ et $t=1$.

(1) Faire une étude de la courbe sur l'intervalle $[-1,1]$ (domaine de définition, symétries éventuelles, branches infinies éventuelles, points singuliers éventuels, double tableau de variation)

(2) Tracer l'arc de courbe et le segment AB et hachurer le domaine D délimité par l'arc de courbe et le segment AB.

(3) En ramenant le calcul à une intégrale curviligne, déterminer l'aire de D :

$$A = \iint_D dx\,dy$$

(4) En ramenant le calcul d'intégrale double non évidente à une intégrale curviligne, déterminer les coordonnées x_G, y_G du centre d'inertie G du domaine (supposé homogène) :

$$x_G = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{A} \quad y_G = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{A}$$

2. Système différentiel (6 points)

(1) Résoudre le système différentiel

$$Y' = AY, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On pourra au choix diagonaliser la matrice A ou se ramener à une équation différentielle d'ordre 2.

(2) On s'intéresse à la solution de

$$Y' = AY + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

N.B. : on peut répondre à la suite en donnant la forme que prend cette solution, on n'en demande pas le calcul complet.
Cette solution tend-elle vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$? Est-elle bornée ? Le comportement asymptotique lorsque t tend vers $+\infty$ de la solution de ce système dépend-il de la condition initiale ?

3. Équation différentielle, modélisation (8 points)

Pour $\alpha > 0$ et $T_0 > 0$, on considère l'équation différentielle d'inconnue la fonction $T(t)$:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T_0^4 - T^4) \quad (E_0)$$

$T(t)$ modélise la température absolue de la Terre au cours du temps, $T_0 \approx 288, \alpha \approx 1.4e-10$ (température en Kelvin, temps en années).

(1) (E_0) est-elle une équation différentielle linéaire ? À variables séparables ?

(2) Déterminer les solutions stationnaires de (E_0).

(3) On suppose qu'à l'instant 0, $T(0) \in [-T_0, T_0]$. Montrer sans chercher à résoudre l'équation différentielle que $T(t) \in [-T_0, T_0]$ pour tout temps $t > 0$, en déduire le sens de variations de T puis le comportement de T lorsque t tend vers $+\infty$.

(4) Que se passe-t-il si $T(0) > T_0$? Peut-on dire que la température T_0 est un équilibre stable ?

(5) Pour modéliser l'effet sur la température des émissions de CO2 au cours du temps, on ajoute un second membre $g(t)$ à l'équation

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T_0^4 - T^4) + g(t) \quad (E)$$

(E) est-elle une équation différentielle linéaire ? A variables séparables ?

(6) On suppose maintenant que T est proche de T_0. Pour pouvoir faire des calculs on linéarise le modèle, on remplace $T_0^4 - T^4$ par son développement de Taylor à l'ordre 1 en $T = T_0$. Déterminer ce développement. Montrer qu'on obtient une équation de la forme

$$\frac{dT}{dt} = \beta(T_0 - T) + g(t) \quad (L)$$

donner la valeur de $\beta > 0$ en fonction de α et T_0.

(7) Résoudre l'équation (L) lorsque $g(t) = c$ est constant (par exemple $c = 0.03$). Montrer que la température se stabilise à une nouvelle valeur que l'on déterminera.

(8) On suppose dans cette question que $g(t)$ modélise une concentration de CO2 qui croit linéairement pendant t_0 années puis devient constante :

$$g(t) = \begin{cases} c\frac{t}{t_1} & \text{si } t \in [0, t_1] \\ c & \text{si } t > t_1 \end{cases}$$

Résoudre l'équation (L) pour $T(0) = T_0$ sur l'intervalle $t \in [0, t_1]$ en déduire la valeur de $T_1 = T(t_1)$. Puis résoudre (L) pour $T(t_1) = T_1$ sur l'intervalle $t \in [t_1, +\infty[$. Discuter l'évolution de la température dans ce modèle.