Examen du 12 janvier 2018, de 8h à 10h.

Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits.

Ce sujet comporte deux pages. Le barème est indicatif.

1. Aire (6 points)

Soit C l'arc de courbe paramétrée :

$$x(t) = 1 - \cos(t), \quad y(t) = \sin(t) - t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

On veut déterminer l'aire A de la zone Z délimitée par l'axe Oy et C.

(1) Calculer x' et y', donner le double tableau de variations de x et y.

(2) Vérifier que 0 est un point singulier et déterminer la tangente en ce point. Y-a-t-il d'autres points singuliers sur C ?

(3) Tracer C et hachurer Z.

(4) En utilisant le théorème de Green-Riemann (ou de Stokes), exprimer l'aire

$$A = \iint_Z dx\, dy$$

à l'aide d'une intégrale curviligne sur C, puis calculer A.

2. Équation différentielle (7 points)

Soit $a > 0$ et $\omega > 0$. On considère l'équation différentielle d'inconnue la fonction $y(t)$:

$$ay' + y = \cos(\omega t)$$

(1) Quel est le type de cette équation ?

(2) Donner la solution générale de l'équation $ay' + y = 0$.

(3) Déterminer une solution particulière périodique y_p de l'équation $ay' + y = e^{i\omega t}$, l'écrire sous la forme $y_p = Ae^{i(\omega t - \phi)}$ avec $A > 0$.

(4) Soit $\overline{y_p}$ le conjugué de y_p, déterminer sans faire de calcul $a\overline{y_p}' + \overline{y_p}$
En déduire une solution périodique de $ay' + y = \cos(\omega t)$.

(5) En déduire la solution générale de $ay' + y = \cos(\omega t)$ et comparer les solutions avec la solution périodique y_p lorsque t tend vers l'infini.

(6) On modélise la température moyenne d'un lieu donné en fonction de la saison par l'équation $ay' + y = \cos(\omega t)$ où $2\pi/\omega$ vaut une année (loin de l'équateur) et où a est d'autant plus grand que l'inertie thermique du lieu est grande.
On observe que la température moyenne la plus élevée a lieu avec un déphasage d'environ 3 semaines après le solstice d'été pour les continents, environ 8 semaines pour les océans et environ 11 semaines pour la banquise.
Déterminer le déphasage ϕ_C, ϕ_O, ϕ_B correspondant aux trois situations (respectivement continents, océans, banquise) et en déduire les valeurs de $a_C\omega, a_O\omega, a_B\omega$ correspondantes.

(7) Déterminer les valeurs de A_C et A_O, puis le rapport A_C/A_O des amplitudes thermiques au cours d'une année sur les continents et sur les océans. Est-ce vraissemblable ?

3. Système différentiel (9 points)

On considère le système différentiel d'ordre 2 d'inconnues les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ à valeurs réelles :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \ddot{x} & = & \omega\dot{y} & + \quad R\omega^2 \\ \ddot{y} & = & -\omega\dot{x} & \end{array}\right.$$

où $R > 0$ et $\omega > 0$ sont des constantes et où $\dot{f}$ désigne la dérivée de f par rapport à t. Ce système modélise la trajectoire d'une particule de charge q et de masse m dans un champ magnétique B et un champ électrique E constants et perpendiculaires avec

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad R = \frac{E}{B\omega}$$

On va résoudre ce système de deux manières puis représenter la courbe parcourue.

(1) Première méthode : soit $z(t) = x(t) + iy(t)$, déterminer $\ddot{z} + i\omega\dot{z}$

(2) Résoudre l'équation homogène $\ddot{z} + i\omega\dot{z} = 0$ (attention, les coefficients ne sont pas tous réels). En déduire la solution générale $z(t)$ avec second membre.

(3) On suppose uniquement dans cette question que $x(0) = y(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, déterminer $z(t)$ puis $x(t)$ et $y(t)$

(4) Deuxième méthode : montrer que $(\dot{x}, \dot{y})$ vérifie un système linéaire d'ordre 1 à coefficients constants dont on déterminera la matrice A.
Diagonaliser A, en déduire la solution générale **complexe** $(\dot{x}, \dot{y})$ puis (x, y).

(5) On suppose dans la suite que $x(0) = y(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$. Déterminer $x(t)$ et $y(t)$ (on pourra vérifier que l'on retrouve le résultat précédent).

(6) Expliquer pourquoi la courbe décrite par la particule a un point singulier en $t = 0$. Déterminer la tangente en ce point en utilisant le système différentiel.

(7) Représenter l'allure de la courbe décrite par la particule. On pourra faire le lien avec le 1er exercice.

(8) Appliquer les équations d'Euler-Lagrange au lagrangien

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qEx + qBx\dot{y}$$

Déterminer une constante du mouvement (indication : observer que L ne dépend pas explicitement du temps **ou** observer que L ne dépend pas explicitement de y).