Corrigé ET janvier 2022

Exercice 1

1·) $D_f = \mathbb{R}^*$

$x(-t) = t^2 - \frac{2}{t} \neq \pm x(t) \Rightarrow$ pas de symétrie évidente

$D_e = D_f = \mathbb{R}^*$

2·) * En $+\infty$ $\lim\limits_{+\infty} x(t) = \lim\limits_{+\infty} y(t) = +\infty$

$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1+\frac{1}{t^4}}{1+\frac{2}{t^3}} \xrightarrow[+\infty]{} 1$, $y(t) - x(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

On a une asymptote d'équation $y = x$

* En $-\infty$, $\lim\limits_{-\infty} x(t) = \lim\limits_{-\infty} y(t) = +\infty$

$\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[-\infty]{} 1$ et $y(t) - x(t) \xrightarrow[-\infty]{} 0 \Rightarrow$ asymptote $y = x$

* En 0^+ $\lim\limits_{0^+} x(t) = \lim\limits_{0^+} y(t) = +\infty$

$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^4+1}{t(t^3+2)} \xrightarrow[0^+]{} +\infty$ branche parabolique de direction (Oy)

* En 0^- $\lim\limits_{0^-} x(t) = -\infty$ $\lim\limits_{0^-} y(t) = 0^+$

$\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[0^-]{} -\infty$ branche parabolique de direction (Oy)

3°) $x'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = 2\frac{t^3-1}{t^2} = 2\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t^2}$

$t^2+t+1 > 0 \ \forall t$ car $\Delta = 1-4 < 0 \Rightarrow$ pas de racine réelle.

$y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = 2\frac{t^4-1}{t^3} = 2\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^3} = 2\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^3}$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x'		$-$			‖	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	↘	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	2	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

On a une tangente horizontale en $t = -1$

4°) Le seul point t où $x'(t) = y'(t) = 0$ est $t = \underline{1}$.

On a un seul point singulier : en $t = 1$.

<u>DL en $t=1$</u> : on pose $u = t-1 \Leftrightarrow t = u+1$

$x(t) = t^2 + \frac{2}{t} = (u+1)^2 + \frac{2}{1+u} = 1+2u+u^2+2(1-u+u^2-u^3+o(u^3))$

$= 3+3u^2-2u^3+o(u^3)$

$$= 3 + 3u^2 - 2u^3 + o(u^3)$$
$$= 3 + 3(t-1)^2 - 2(t-1)^3 + o\left((t-1)^3\right)$$

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} = (u+1)^2 + \frac{1}{1+2u+u^2}$$
$$= 1 + 2u + u^2 + 1 - (2u+u^2) + (2u+u^2)^2 - (2u+u^2)^3 + o(u^3)$$
$$= 2 + 4u^2 - 4u^3 + o(u^3)$$
$$= 2 + 4(t-1)^2 - 4(t-1)^3 + o\left((t-1)^3\right)$$

On a donc

$$M(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}(t-1)^2 - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}(t-1)^3 + o\left((t-1)^3\right)$$

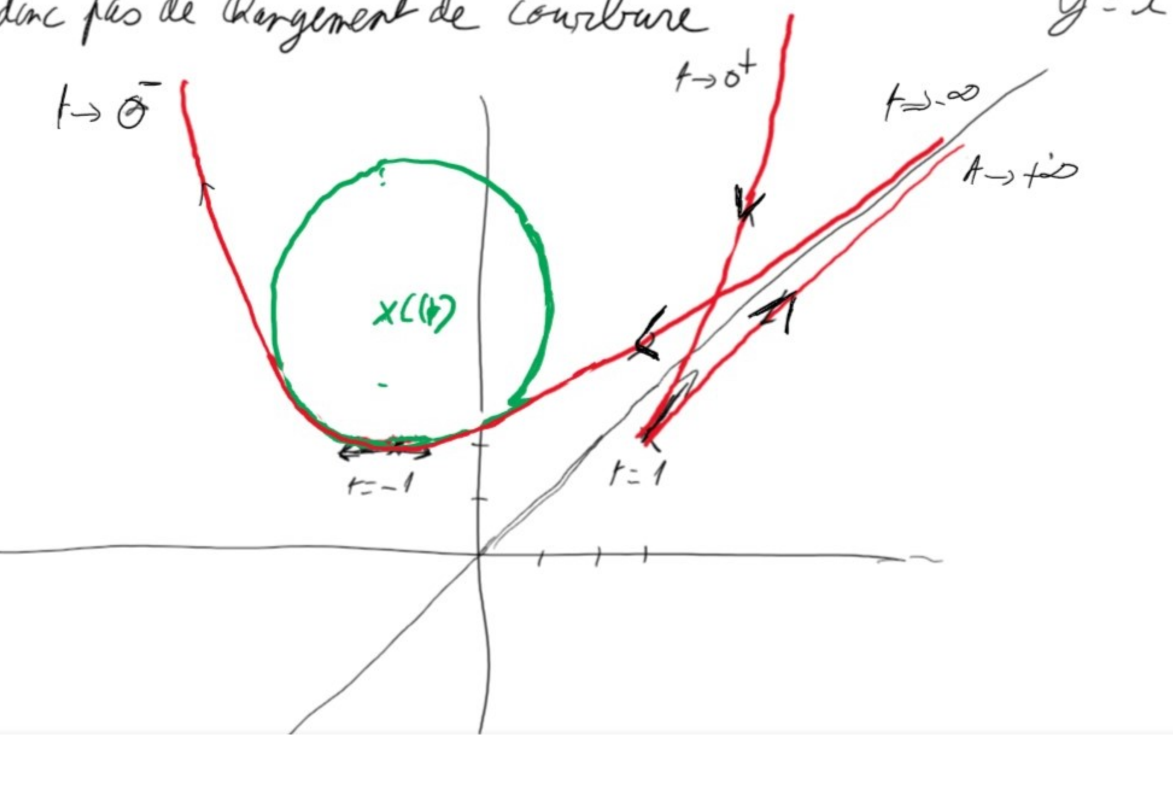
Comme $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ n'est pas proportionnel à $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ on a un point de rebroussement de 1ère espèce de vecteur tangent $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

5:) On trouve avec la calculatrice :

$$x''(t)\, y'(t) - x'(t)\, y''(t) = \frac{4(t-1)^2(3t^2+2t+1)}{t^6} \geq 0 \ \forall t$$

On n'a donc pas de changement de courbure

6:)



7°) D'après le tableau de variation, on a

$t_1 \in]-\infty ; -1[$ et $t_2 \in]-1 ; 0[$ les deux

seuls points tels que $y(t_1) = y(t_2) = \frac{5}{2}$

(car y est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et $y \xrightarrow[-\infty]{} +\infty$
et $y(-1) = 2 < \frac{5}{2}$

et y est strictement croissante sur $]-1 ; 0[$ et $y(-1) < \frac{5}{2}$
et $y \xrightarrow[0^-]{} +\infty$)

On résoud $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 2t^4 - 5t^2 + 2 = 0$ On pose $u = t^2 > 0$

$\Rightarrow 2u^2 - 5u + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$u_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

On a donc comme solution de $y(t) = \frac{5}{2}$: $-\sqrt{2} ; -\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; \sqrt{2}$

et on a $t_1 = -\sqrt{2}$ et $t_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

8°) $$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{4(t-1)^2(t^2+t+1)^2}{t^4} + \frac{4(t-1)^2(t+1)^2(t^2+1)^2}{t^6}}\, dt$$

$\simeq 3,13$

9.) en $t=-1$, $\vec{v}(-1) = \begin{pmatrix} x'(-1) \\ y'(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{T} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x''(t) = 2 + \frac{4}{t^3}$ $\qquad y''(t) = 2 + \frac{6}{t^4}$

$\vec{a}(-1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\qquad a_N(-1) = \vec{a}(-1) \cdot \vec{N}(-1) = -8$

$$R(-1) = \frac{\|\vec{v}(-1)\|^2}{a_N(-1)} = \frac{16}{-8} = -2$$

$$C(-1) = M(-1) + R(-1)\vec{N}(-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

cercle de centre $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et de rayon 2.

10.) La portion est délimitée par C entre t_1 et t_2

et le segment

$S \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

entre $x(t_2)$ et $x(t_1)$

Vu que c'est dans le sens horaire

$$A = \iint dx\,dy = -\int_\gamma x\,dy$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,y'(t)\,dt - \int_{x(t_2)}^{x(t_1)} x(t) \times 0\,dt$$

$$= -\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(t^2 + \frac{2}{t}\right)\left(2t - \frac{2}{t^3}\right) dt \simeq 0{,}96$$

Exercice 2

1) a) équation différentielle d'ordre 1, dim 1, non linéaire, à variables séparées.

b) $y'(x) = F(x, y(x))$ où $F(x,y) = \lambda\sqrt{2}\sqrt{y^2-1}$ indépendant de x, et F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus[-1,1])$

Comme $(0,\sqrt{2}) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus[-1,1])$, le théorème de Cauchy-Lipschitz dit qu'il existe une unique solution de classe C^1 sur un intervalle maximal en temps contenant 0.

c) $y'(x) = 0 \; \forall x$ ssi $y(x)^2 = 1 \; \forall x$

C'est à dire $y(x) = 1$ et $y(x) = -1$ sont les deux solutions stationnaires de (E)

d) On calcule

$$y_c'(x) = \lambda\sqrt{2}\,(\cosh)'(\lambda\sqrt{2}(x+c)) = \lambda\sqrt{2}\sinh(\lambda\sqrt{2}(x+c))$$

et

$$\sqrt{y_c(x)^2-1} = \sqrt{\cosh^2(\lambda\sqrt{2}(x+c))-1} = \sqrt{\sinh^2(\lambda\sqrt{2}(x+c))}$$

$$= |\sinh(\lambda\sqrt{2}(x+c))| = \sinh(\lambda\sqrt{2}(x+c))$$

car $\sinh(\lambda\sqrt{2}(x+c)) \geq 0$ ssi $x+c \geq 0$

$\iff x \geq -c$

en effet $\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \geq 0$ ssi $e^y \geq e^{-y}$

ssi $e^{2y} \geq 1$ ssi $y \geq 0$

On a bien $y_c'(x) = \lambda\sqrt{2}\sqrt{y_c(x)^2-1} \quad \forall x \geq -c$

e.) $g_c(-c) = \cosh(0) = \frac{e^0+e^0}{2} = 1$ qui correspond à la solution stationnaire. On a donc deux fonctions $g_c(x)$ et 1 qui vérifient $\begin{cases} g'(x) = \sqrt{g(x)^2-1} \\ g(-c) = 1 \end{cases}$.

Or $(-c, 1)$ n'appartient pas à $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus [-1,1])$: F n'est pas C^1 en $y=1$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas en ce point.

f.) $g_c(0) = \cosh(\lambda\sqrt{2}c)$

Or $\cosh'(y) = \sinh y > 0 \ \forall y > 0$

y	0	$+\infty$
$\cosh'$	$+$	
$\cosh$	$1 \nearrow$	$+\infty$

D'après la croissance, $\exists ! c_0 /$

$\cosh(\lambda\sqrt{2}c_0) = \sqrt{2}$ car $\sqrt{2} > 1$

L'unique solution est donc $g(x) = \cosh(\lambda\sqrt{2}(x+c_0))$ sur $I =]-c_0 ; +\infty[$

2.) a.) $T = \int_0^l L(y(x), y'(x), x)\,dx$

avec $L(y, \dot{y}, x) = \frac{n(y)}{c}\sqrt{1+\dot{y}^2}$

On calcule

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(y,\dot{y},x) = \frac{n(y)}{c}\frac{\cancel{2}\dot{y}}{\cancel{2}\sqrt{1+\dot{y}^2}}$$

d'où $H(x) = \left(\frac{n(y)}{c} \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} - \frac{n(y)}{c} \sqrt{1+\dot{y}^2} \right) (y(x), y'(x), x)$

$$= \left(- \frac{n(y)}{c} \frac{1}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \right) (y(x), y'(x), x)$$

$$= - \frac{n(y(x))}{c\sqrt{1+y'(x)^2}}$$

b.) Comme $L(y, \dot{y}, x)$ ne dépend pas de x, l'hamiltonien est conservé : $H(x) = H(0)$, c'est à dire

$$\frac{-n(y(x))}{c\sqrt{1+y'(x)^2}} = \frac{-n(0)}{c\sqrt{1+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\, n(y(x)) = n(0) \sqrt{1+y'(x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y'(x)^2 = 2 \left(\frac{n(y(x))}{n(0)} \right)^2 - 1}$$

c.) Comme $y'(0) > 0$, y est croissante et il existe un petit intervalle tel que $y(x), y'(x) > 0$ sur $]0, \ell]$

d'où $y'(x) = + \sqrt{2(1+\lambda y(x))^2 - 1}$ $(*)$

En posant $g(x) = \sqrt{2}(1+\lambda y(x))$ on a

$$g(x)^2 = 2(1+\lambda y(x))^2 \text{ et } g'(x) = \sqrt{2}\lambda y'(x)$$

d'où l'équation $(*)$ implique que $g(x)$ vérifie

$$g'(x) = \sqrt{2}\lambda y'(x) = \sqrt{2}\lambda\sqrt{g(x)^2 - 1}$$

et comme $g(0) = \sqrt{2}(1+\lambda\times 0) = \sqrt{2}$

on a bien que g est solution de (E)

d·) On a montré au 1·) qu'il existe une unique solution de (E) :

$$g(x) = \cosh(\lambda\sqrt{2}(x+C_0)).$$

On a donc $y(x) = \left(\frac{g(x)}{\sqrt{2}} - 1\right)/\lambda = \frac{\cosh(\lambda\sqrt{2}(x+C_0)) - \sqrt{2}}{\lambda\sqrt{2}}$.

qui vérifie bien $y(0) = \frac{\cosh(\lambda\sqrt{2}C_0) - \sqrt{2}}{\lambda\sqrt{2}} = 0$

et $y'(0) = \frac{\lambda\sqrt{2}\sinh(\lambda\sqrt{2}C_0)}{\lambda\sqrt{2}} = \sqrt{\cosh^2(\lambda\sqrt{2}C_0) - 1}$

$$= \sqrt{2-1} = \underline{1}$$

Comme $y \nearrow$ et $y'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$, la fonction ne redescendra jamais même si l est grand.

Remarque : -exercice 1-4 : il est plus simple de calculer x''(1) x'''(1) y''(1) et y'''(1) et de conclure avec la formule de Taylor

-exercice 2-f : même si ça n'est pas demandé, il est possible de calculer C en résolvant un polynome du second degrés $X^2 - 2\sqrt{2}X + 1 = 0$

où $X = e^{\lambda\sqrt{2}C}$, et on trouve $C = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\lambda\sqrt{2}}$