Corrigé examen terminal - Janvier 2021

Exercice 1 –[*19 points*]

1. En utilisant les équations, on obtient $I'(t) + S'(t) = 0$, ce qui implique que sur l'intervalle maximal où la solution existe $I(t) + S(t) = I_0 + S_0 = 1$.

2. Il suffit de remplacer $S(t)$ par $1 - I(t)$ dans la seconde équation du système pour obtenir $(E1)$.

3. $(E1)$ est une équation scalaire d'ordre 1 à variables séparées : $I'(t) = F(I(t))G(t)$ où $F(s) = (\beta-\alpha)s - \beta s^2$ et $G(t) = 1$. La fonction $F(s)G(t)$ étant régulière, le théorème de Cauchy-Lipshcitz implique qu'il existe une unique solution sur un intervalle maximale J incluant 0.

   Si $\beta < \alpha$: les solutions stationnaires sont $I(t) = 0$ et $I(t) = \frac{\beta-\alpha}{\beta} = C_0 < 0$. Pour $I_0 > 0$, nous avons donc $I(t) > 0$ pour tout $t \in J$. Dans ce cas, on calcule

$$1 = \frac{I'(t)}{-\beta I(t)(I(t) - C_0)} = \frac{1}{-\beta C_0}\Big(\frac{I'(t)}{I(t) - C_0} - \frac{I'(t)}{I(t)}\Big)$$

   d'où

$$\ln\frac{|I(t) - C_0|}{|I(t)|} - \ln\frac{|I_0 - C_0|}{|I_0|} = -\beta C_0 t$$
$$\frac{|I_0 - C_0|}{|I_0|}e^{-\beta C_0 t} = \frac{|I(t) - C_0|}{|I(t)|} = \frac{I(t) - C_0}{I(t)} = 1 - \frac{C_0}{I(t)} = \frac{|I_0 - C_0|}{|I_0|}e^{-\beta C_0 t}$$

   ce qui donne

$$I(t) = \frac{-C_0}{\frac{|I_0-C_0|}{|I_0|}e^{-\beta C_0 t} - 1} = \frac{-C_0}{|1 - \frac{C_0}{I_0}|e^{-\beta C_0 t} - 1} = \frac{(\alpha-\beta)/\beta}{|1 + \frac{\alpha-\beta}{\beta I_0}|e^{(\alpha-\beta)t} - 1}$$

   définit sur $J =]\frac{-\ln|1+\frac{\alpha-\beta}{\beta I_0}|}{\alpha-\beta}, +\infty[$. Dans ce cas, $I(t) \to 0$ quand $t \to \infty$ c'est à dire que la maladie disparaît.

   Si $\beta > \alpha$: les solutions stationnaires sont toujours $I(t) = 0$ et $I(t) = \frac{\beta-\alpha}{\beta} = C_0 > 0$. Pour $I_0 \in]0, C_0[$, nous avons donc $I(t) \in]0, C_0[$ pour tout $t \in J$, alors que pour $I_0 > C_0$, nous aurons donc $I(t) > C_0$.

   On calcule toujours $\dfrac{|I(t) - C_0|}{|I(t)|} = \dfrac{|I_0 - C_0|}{|I_0|}e^{-\beta C_0 t}$.

   Si $I_0 > C_0$, on obtient encore

$$I(t) = \frac{C_0}{1 - |1 - \frac{C_0}{I_0}|e^{-\beta C_0 t}} = \frac{(\beta-\alpha)/\beta}{1 - |1 - \frac{\beta-\alpha}{\beta I_0}|e^{-(\beta-\alpha)t}} \quad \text{sur} \quad J =]\frac{\ln|1 - \frac{\beta-\alpha}{\beta I_0}|}{\beta-\alpha}, +\infty[.$$

   Si $I_0 \in]0, C_0[$, on a alors $\frac{|I(t)-C_0|}{|I(t)|} = -\frac{I(t)-C_0}{I(t)} = -1 + \frac{C_0}{I(t)}$ et donc

$$I(t) = \frac{C_0}{1 + |1 - \frac{C_0}{I_0}|e^{-\beta C_0 t}} = \frac{(\beta-\alpha)/\beta}{1 + |1 - \frac{\beta-\alpha}{\beta I_0}|e^{-(\beta-\alpha)t}} \quad \text{sur} \quad J = \mathbb{R}.$$

   Dans ces deux cas, $I(t) \to \frac{\beta-\alpha}{\beta} = 1 - \frac{\alpha}{\beta} \in]0, 1[$ quand $t \to \infty$ c'est à dire que la proportion de contaminée converge vers une valeur non nulle.

   Si $\beta = \alpha$: il n'y a plus qu'une solution stationnaire $I(t) = 0$. Pour $I_0 > 0$, nous avons donc $I(t) > 0$ pour tout $t \in J$. Dans ce cas, on calcule

$$\frac{I'(t)}{-I^2(t)} = \beta, \quad \frac{1}{I(t)} - \frac{1}{I_0} = \beta t$$

   d'où

$$I(t) = \frac{1}{\beta t + \frac{1}{I_0}} \quad \text{sur} \quad J =]-\frac{1}{\beta I_0}, +\infty[.$$

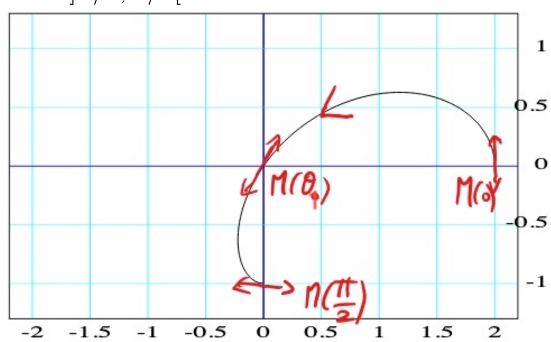
   Nous avons ici aussi $I(t) \to 0$ quand $t \to \infty$ c'est à dire que la maladie disparaît.

Exercice 2 – [*17 points*] *Étude d'une courbe polaire*
On considère la courbe polaire d'équation $r(\theta) = \cos(2\theta) + \cos^2(\theta)$.

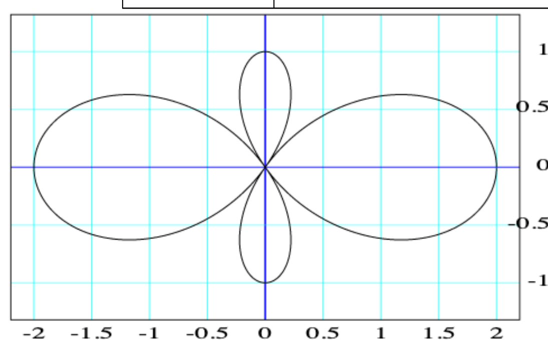
1. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Comme r est 2π-périodique, il suffit d'étudier la courbe sur $[-\pi, \pi]$. Vu que $r(-\theta) = r(\theta)$, il est possible de restreindre l'étude à $[0, \pi]$ puis de faire une symétrie d'axe (Ox). Enfin, $r(\pi - \theta) = \cos(2\pi - 2\theta) + \cos^2(\pi - \theta) = \cos(-2\theta) + (-\cos(\theta))^2 = r(\theta)$ nous permet de définir l'intervalle d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis nous obtiendrons la courbe entière par une symétrie d'axe (Oy) suivie d'une symétrie d'axe (Ox).

2. Nous avons $r(\theta) = 3\cos^2\theta - 1$ et donc $r'(\theta) = -6\cos\theta\sin\theta$ nous permet facilement de donner le tableau ci contre.
Il n'y a pas de point singulier car r ne s'annule pas en $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$ (point d'annulation de r').
La fonction r s'annule et change de signe en $\theta_1 \in]0, \pi/2[$ tel que $\cos^2\theta_1 = 1/3$ et donc tel que $\cos\theta_1 = 1/\sqrt{3}$ (car le cosinus est positif sur $]0, \pi/2[$), c'est à dire en $\theta_1 = \text{Arcos}(1/\sqrt{3}) \approx 0.95 \in]\pi/4, \pi/3[$.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$
$r'(\theta)$	0	$-$	0
$r(\theta)$	2	$\searrow$	-1



Tracé sur $[0, \pi/2]$.



Tracé sur $\mathbb{R}$.

NB : dans les représentations graphiques, il faudra indiquer le sens de parcours, les tangentes remarquables (portées par $\vec{e}_r$ ou $\vec{e}_\theta$) et quelques points remarquables (avec le θ associé).

3. En utilisant simplify(texpand(...)), on obtient que

$$r^2(\theta) + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta) = \frac{7\tan^4\theta + 50\tan^2\theta + 16}{\tan^4\theta + 2\tan^2\theta + 1} = 7\sin^4\theta + 50\sin^2\theta\cos^2\theta + 16\cos^4\theta$$

ce qui ne change pas de signe car est clairement positif (nous n'avons que des puissances paires).

4. On obtient

$$\ell = \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}d\theta = \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \sqrt{9\cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 1 + 36\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta}$$
$$= \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \sqrt{-27\cos^4\theta + 30\cos^2\theta + 1d\theta} \approx 5.07$$

5. En remplaçant les valeurs on a

$$\vec{v}(\theta_0) = r'(\theta_0)\vec{e}_r(\theta_0) + r(\theta_0)\vec{e}_\theta(\theta_0) = -\frac{6}{2}\vec{e}_r(\theta_0) + (\frac{3}{2} - 1)\vec{e}_\theta(\theta_0) = -3\vec{e}_r(\theta_0) + \frac{1}{2}\vec{e}_\theta(\theta_0)$$

et donc $\|\vec{v}(\theta_0)\| = \sqrt{9 + \frac{1}{4}} = \sqrt{37}/2$. Le repère de Frenet est donc

$$\vec{T} = -\frac{6}{\sqrt{37}}\vec{e}_r(\theta_0) + \frac{1}{\sqrt{37}}\vec{e}_\theta(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix} -6-1 \\ -6+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

et

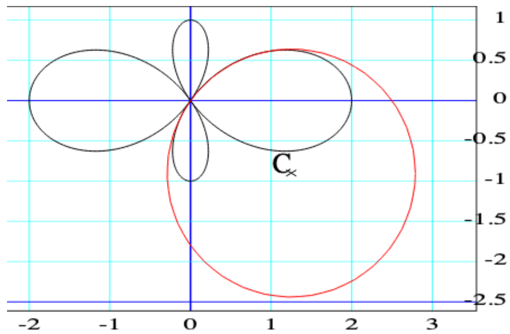
$$\vec{N} = -\frac{6}{\sqrt{37}}\vec{e}_\theta(\theta_0) - \frac{1}{\sqrt{37}}\vec{e}_r(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Comme $r'(\theta) = -3\sin(2\theta)$, on a $r''(\theta) = -6\cos(2\theta)$ et on calcule

$$\vec{a}(\theta_0) = (r''(\theta_0) - r(\theta_0))\vec{e}_r(\theta_0) + 2r'(\theta_0)\vec{e}_\theta(\theta_0) = -\frac{1}{2}\vec{e}_r(\theta_0) - 6\vec{e}_\theta(\theta_0)$$

d'où $a_N(\theta_0) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{37}} + 6\frac{6}{\sqrt{37}} = \frac{73}{2\sqrt{37}}$ et $R(\theta_0) = \frac{(\sqrt{37}/2)^2}{73/(2\sqrt{37})} = \frac{37\sqrt{37}}{146} \approx 1.54$. Le centre du cercle osculateur est

$$C = r(\theta_0)\vec{e}_r(\theta_0) + R(\theta_0)\vec{N} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{37\sqrt{37}}{146}\frac{1}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1.25\\-0.9\end{pmatrix}.$$



6. En considérant la forme différentielle $\omega = xdy$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} r(\theta)\cos\theta(r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)d\theta \\ &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (3\cos^2\theta - 1)\cos\theta(-6\cos\theta\sin^2\theta + (3\cos^2\theta - 1)\cos\theta)d\theta \approx 1.84\end{aligned}$$