Université Grenoble Alpes Année 2020-2021
Module MAT 307

Examen terminal de janvier 2021

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée. Calculatrices autorisées

Durée 2h

Exercice 1 –*Modélisation d'une maladie sans immunité*

Quand il n'y a pas d'immunité suite à l'infection, un modèle simplifié de la propagation d'une maladie est le modèle SIS :

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) + \alpha I(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t), \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0 = 1 - S_0, \end{cases}$$

où S représente la proportion de la population saine et I la proportion de la population infectée. Les constantes β et α correspondent à des taux de contamination/guérison et sont des nombres réels appartenant à $]0,1[$.

1. Montrez que pour tout temps où les solutions sont définies, on a $I(t) + S(t) = 1$.
2. En déduire qu'il suffit de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) \ : \ I'(t) = (\beta - \alpha)I(t) - \beta I(t)^2, \quad I(0) = I_0,$$

   où $I_0 \in [0,1]$.
3. Donnez la nature de l'équation (E_1). Étudiez les trois cas ($\beta < \alpha$, $\beta > \alpha$ ou $\beta = \alpha$) : résolvez (E_1) et interprétez le comportement quand $t \to \infty$.

Exercice 2 –*Étude d'une courbe polaire*

On considère la courbe polaire d'équation $r(\theta) = \cos(2\theta) + \cos^2(\theta)$.

1. Déterminez le domaine de définition et en cherchant les symétries de la courbe, montrez qu'on peut se ramener à l'étude de la courbe sur $[0, \pi/2]$.
2. Étudiez les variations de r et tracez la courbe. Y a t-il des points singuliers ?
   NB : dans les représentations graphiques, il faudra indiquer le sens de parcours, les tangentes remarquables (portées par $\vec{e}_r$ ou $\vec{e}_\theta$) et quelques points remarquables (avec le θ associé).
3. A l'aide de la calculatrice, étudiez le changement de convexité.
4. Écrivez la longueur de la boucle de droite sous la forme d'une intégrale. Donnez en une valeur approchée ?
5. Donnez le repère de Frenet et le cercle osculateur au point $\theta_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et rajoutez les sur le tracé de la courbe.
6. En rappelant qu'une courbe polaire peut être vue comme une courbe paramétrique $t \to (x(t), y(t))$, écrivez l'aire de la boucle sous la forme d'une intégrale. Donnez en une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.