Université Grenoble Alpes **Année** 2019-2020
Module MAT 307

Corrigé contrôle continu du 6 Janvier 2020

Exercice 1

1. La fonction r est définie sur $\mathbb{R}$, mais comme elle est π-périodique, et que c'est une fonction paire $r(-\theta) = r(\theta)$, nous allons l'étudier sur $[0, \pi/2]$. Nous réaliserons ensuite une symétrie d'axe (Ox) pour avoir la courbe sur $[-\pi/2, \pi/2]$ puis une rotation de la courbe d'angle π pour avoir la courbe entière.

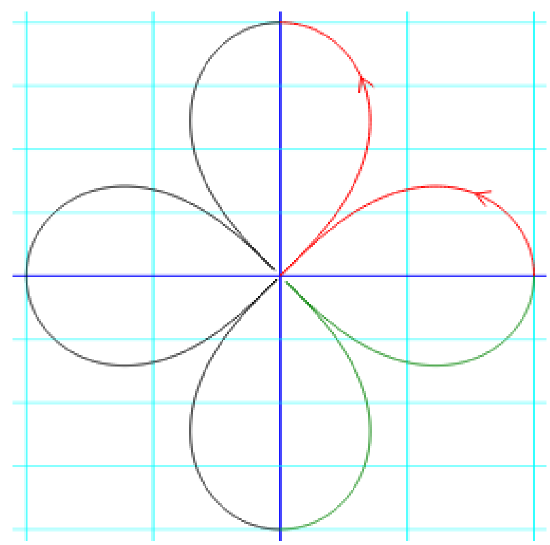
   Sur $[0, \pi/2]$, la fonction n'est pas dérivable en $\pi/4$ (car $\cos(2\pi/4) = 0$) et on calcule sur $[0, \pi/4[$ $r'(\theta) = \dfrac{-\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \leq 0$ alors que sur $]\pi/4, \pi/2]$ nous avons $r'(\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)}{\sqrt{-\cos(2\theta)}} \geq 0$. Nous obtenons donc le tableau de variation suivant :

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$r'(\theta)$	0	$-$	‖	$+$	0
$r(\theta)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

   Concernant la convexité, la calculatrice donne (en faisant un calcul avant $\pi/4$ puis après $\pi/4$):

$$r^2(\theta) + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta) = \frac{3}{|\cos(2\theta)|}$$

   ce qui ne change pas de signe. La courbe ne change donc pas de convexité.
   En utilisant que la tangente est de direction $\vec{e_\theta}$ en 0 et $\pi/2$, et de direction $\vec{e_r}$ en $\pi/4$ nous faisons le graphique sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (courbe en rouge), puis la symétrie (en vert) et la rotation de π (en noir). Nous obtenons alors quatre boucles.
   Remarque : on aurait aussi pu montrer que r est $\pi/2$ périodique, et donc réduire l'intervalle d'étude à $[0, \frac{\pi}{4}]$ puis faire une symétrie d'axe $(0x)$ et faire 3 rotations d'angle $\pi/2$.



2. La boucle de droite est décrite pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ où $r(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$, ce qui nous permet de calculer

$$(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2 = \cos(2\theta) + \frac{\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{1}{\cos(2\theta)}$$

   et nous obtenons alors que la longueur de la boucle de droite est

$$\ell = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\, d\theta \approx 2,62.$$

3. D'après le théorème de Green-Riemann, on trouve que l'aire vaut

$$\mathcal{A} = \iint 1\, dxdy = \int_\gamma x\, dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos(2t)}\cos t\Big(\sqrt{\cos(2t)}\cos t - \frac{\sin(2t)\sin t}{\sqrt{\cos(2t)}}\Big)\, dt$$
$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t\cos(3t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos(4t) + \cos(2t))\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{2}\sin(2t))\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

   alors que

$$x_G = \mathcal{A}^{-1}\iint x\, dxdy = 2\frac{1}{2}\int_\gamma x^2\, dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos(2t)}\cos^2 t\cos(3t)\, dt \approx 0,55.$$

Pour des raisons de symétrie, nous avons $y_G = 0$.

Exercice 2

1. Les solutions stationnaires vérifient $x(3-x-2y) = 0 = y(2-x-y)$. Une première solution stationnaire est $x = y = 0$. Si $x = 0$ et $y \neq 0$ est une solution stationnaire, alors forcément $2 - y = 0$ et donc $(0, 2)$ est une autre solution stationnaire. Si inversement, $x \neq 0$ et $y = 0$ est une solution stationnaire, alors forcément $3 - x = 0$ et donc $(3, 0)$ est aussi une solution stationnaire. Le dernier cas est quand $x \neq 0$ et $y \neq 0$ est une solution stationnaire, alors nous avons deux équations linéaires $x + 2y = 3$ et $x + y = 2$, ce qui admet une unique solution $x = y = 1$. Nous concluons qu'il n'existe que quatre solutions stationnaires :
$$(0,0), \quad (0,2), \quad (3,0), \quad (1,1).$$

2. (E1) est une équation différentielle scalaire d'ordre 1 à variable séparée $x'(t) = F(x(t))G(t)$ où $F(s) = s(3-s)$ et $G(t) = 1$. Comme F et G sont réguliers, pour tout $x_0 > 0$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution $x(t)$ sur un intervalle maximale.

   Les solutions stationnaires sont $x(t) = 0$ et $x(t) = 3$.

   Si $x_0 \neq 3$ alors
$$\frac{x'(t)}{x(t)(3-x(t))} = \frac{1}{3}\frac{x'(t)}{x(t)} - \frac{1}{3}\frac{x'(t)}{x(t)-3} = 1$$
   ce qui donne
$$\frac{|x(t)|}{|x(t)-3|} = \frac{|x_0|}{|x_0-3|}e^{3t}.$$
   Si $x_0 \in]0,3[$ alors $x(t) \in]0,3[$ pour tout $t \in I$ (et nous concluons que $I = \mathbb{R}$) et nous calculons
$$x(t) = \frac{3\frac{|x_0|}{|x_0-3|}e^{3t}}{1 + \frac{|x_0|}{|x_0-3|}e^{3t}}$$
   (bien défini sur $\mathbb{R}$ et qui tend vers 3 en $+\infty$).

   Si $x_0 > 3$ alors $x(t) > 3$ pour tout $t \in I$ et nous calculons
$$x(t) = \frac{-3\frac{|x_0|}{|x_0-3|}e^{3t}}{1 - \frac{|x_0|}{|x_0-3|}e^{3t}}$$
   qui est défini pour tout t tel que $1 - \frac{|x_0|}{|x_0-3|}e^{3t} < 0$ (car initialement $1 - \frac{|x_0|}{|x_0-3|}e^{0} < 0$), c'est à dire que $I =]\frac{1}{3}\ln(1 - \frac{3}{x_0}), +\infty[$. On retrouve ici aussi que cette solution tend vers 3 en $+\infty$.

3. (a) On calcule $F_1(x,y) = (x-3)(3 - 2*3 - 2*0) + y(-2*3) = -3x + 9 - 6y$ et $F_2(x,y) = (x-3)(-1*0) + y(2 - 1*3 - 2*0) = -y$.

   (b) Le vecteur $Y(t) = \big(x_1(t), y_1(t)\big)$ vérifie une équation linéaire d'ordre 1 en dimension deux, à coefficient constant et avec un second membre constant. Il existe donc une unique solution Y qui est globale $I = \mathbb{R}$.

   (c) Grâce à la première équation, on en déduit que $6y_1(t) = -x_1'(t) - 3x_1(t) + 9$, et la seconde équation implique donc que
$$-x_1''(t) - 3x_1'(t) = 6y_1'(t) = -6y_1(t) = x_1'(t) + 3x_1(t) - 9$$
   ce qui donne $x_1''(t) + 4x_1'(t) + 3x_1(t) = 9$. La seconde donnée initiale est $x_1'(0) = -3x_1(0) + 9 - 6y_1(0) = -3x_0 - 6y_0 + 9$.

   (d) Pour étudier l'équation homogène associée, on note que l'équation caractéristique $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ a deux racines -1 et -3, et nous avons donc
$$\mathcal{S}_H = \Big\{t \mapsto \alpha e^{-t} + \beta e^{-3t},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\Big\}.$$

L'équation $(\widetilde{\mathrm{E2}})$ admet une solution particulière évidente $x_p(t) = 3$ et nous en déduisons que

$$\mathcal{S}_{\widetilde{\mathrm{E2}}} = \Big\{ t \mapsto \alpha e^{-t} + \beta e^{-3t} + 3, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Big\}.$$

En identifiant les données initiales nous devons résoudre $\alpha + \beta + 3 = x_0$ et $-\alpha - 3\beta = -3x_0 - 6y_0 + 9$ ce qui donne que l'unique solution est $x_1(t) = -3y_0 e^{-t} + (x_0 + 3y_0 - 3)e^{-3t} + 3$. On calcule alors

$$y_1(t) = \frac{1}{6}\Big(-(3y_0e^{-t} - 3(x_0 + 3y_0 - 3)e^{-3t}) - 3(-3y_0e^{-t} + (x_0 + 3y_0 - 3)e^{-3t} + 3) + 9 \Big) = y_0 e^{-t}.$$

Nous obtenons que $(x_1(t), y_1(t)) \to (3, 0)$ quand $t \to +\infty$.

4. (a) On calcule $\hat{F}_1(x, y) = (x-1)(3 - 2*1 - 2*1) + (y-1)(-2*1) = -(x-1) - 2(y-1)$ et $F_2(x, y) = (x-1)(-1*1) + (y-1)(2 - 1*1 - 2*1) = -(x-1) - (y-1)$, ce qui donne que x_2 et y_2 vérifient

$$\begin{cases} x_2'(t) = -x_2(t) - 2y_2(t) \\ y_2'(t) = -x_2(t) - y_2(t) \\ x_2(0) = x_0, \quad y_2(0) = y_0. \end{cases}$$

ce qui revient au même que (E3).

(b) Pour les valeurs propres, on remarque que $\det(A - \lambda \mathrm{I}_2) = (1-\lambda)^2 - 2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ avec $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2} < 0$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2} > 0$. Un vecteur propre associé à λ_1 est $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ tandis que $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est associé à λ_2. Nous avons donc

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(c) Nous calculons

$$\begin{aligned} Z(t) = e^{-At}\begin{pmatrix} x_0 - 1 \\ y_0 - 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [(x_0-1) - \sqrt{2}(y_0-1)]e^{-\lambda_1 t} \\ [(x_0-1) + \sqrt{2}(y_0-1)]e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}[(x_0-1) - \sqrt{2}(y_0-1)]e^{-\lambda_1 t} + \sqrt{2}[(x_0-1) + \sqrt{2}(y_0-1)]e^{-\lambda_2 t} \\ -[(x_0-1) - \sqrt{2}(y_0-1)]e^{-\lambda_1 t} + [(x_0-1) + \sqrt{2}(y_0-1)]e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Comme $-\lambda_1 > 0$, le seul moyen que $Z(t) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'infini est que $(x_0 - 1) - \sqrt{2}(y_0 - 1) = 0$ c-à-d qu'il faut que $x_0 = \sqrt{2}y_0 + 1 - \sqrt{2}$. Si cette condition n'est pas vérifiée, les solutions partent vers $+\infty$ ou $-\infty$, en fonction du signe de $(x_0 - 1) - \sqrt{2}(y_0 - 1)$.