Examen du jeudi 11 janvier 2024, de 8h30 à 10h30.
*Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits.*
*Ce sujet comporte* **deux pages**. *Le barême est indicatif.*

# 1 Courbe paramétrée, forme différentielle (9 points)

On considère la courbe paramétrée $C$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & t^3 \\ y(t) & = & \sin(t)^2 \end{array} \right. \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

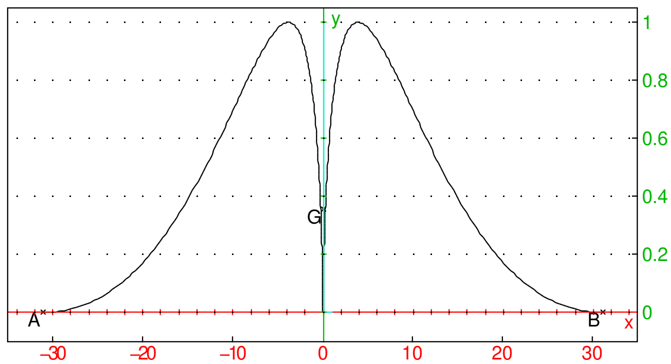
et les points $A(-\pi^3, 0)$ pour $t = -\pi$, et $B(\pi^3, 0)$ pour $(t = \pi)$.

1. *Déterminer les symétries éventuelles et le domaine d'étude de $(C)$.*
   $x$ et $y$ sont définies et régulières ($C^\infty$) sur $[-\pi, \pi]$. $x$ est impaire et $y$ paire, donc symétrie par rapport à l'axe $Oy$ et restriction du domaine d'étude à $[0, \pi]$.
2. *La courbe admet-elle des branches infinies pour $t \in [-\pi, \pi]$ ? Si oui, les décrire (asymptotes, branches paraboliques...)*
   Il n'y a pas de branches infinies, puisque $x$ et $y$ sont définies partout et qu'on se limite au domaine $[0, \pi]$. Il faudrait que $t$ puisse tendre vers $\pm\infty$ pour faire une étude de branche infinie, qui ne donnerait rien puisque $x$ tend vers l'infini mais $y$ n'a pas de limite.
3. *La courbe admet-elle des points singuliers ? Si oui, les décrire (tangente, position par rapport à la tangente).*
   On a $x' = 3t^2$ qui s'annule en $t = 0$, et en ce point $y' = 2\sin(t)\cos(t)$ s'annule également, on a donc un unique point singulier en $t = 0$, le D.L. de $y$ en $t = 0$ à l'ordre 3 est $t^2 + o(t^3)$, donc on a un point de rebroussement de première espèce avec une tangente selon l'axe $Oy$, et on traverse la tangente. On pouvait aussi calculer l'accélération qui vaut $(0, 2)$ en $t = 0$ donc tangente verticale et conclure sur la traversée de la tangente par un argument de symétrie dû à la parité.
4. *Dresser le double tableau de variations sur le domaine d'étude, puis faire le tracé de la courbe en indiquant le sens de parcours.*
   $x' \geq 0$ et $y'$ s'annule et change de signe en $t = \pi/2$.

```
X:=t^3; Y:=sin(t)^2; tabvar([X,Y],t=0..pi)
```

$$t^3, \sin^2 t, \left[ \begin{array}{cccccccc} t & 0 & \text{“”} & \frac{\pi}{2} & \text{“”} & 2.137 & \text{“”} & \pi \\ x = t^3 & 0 & \text{“}\uparrow\text{”} & \frac{1}{8}\pi^3 & \text{“}\uparrow\text{”} & 9.765 & \text{“}\uparrow\text{”} & \pi^3 \\ x' = 3t^2 & 0 & \text{“+”} & \frac{3}{4}\pi^2 & \text{“+”} & 13.705 & \text{“+”} & 3\pi^2 \\ y = \sin^2 t & 0 & \text{“}\uparrow\text{”} & 1 & \text{“}\downarrow\text{”} & 0.712 & \text{“}\downarrow\text{”} & 0 \\ y' = 2\sin t \cdot \cos t & 0 & \text{“+”} & 0 & \text{“-”} & -0.906 & \text{“-”} & 0 \\ x'y'' - y'x'' & 0 & \text{“concav”} & -\frac{3}{2}\pi^2 & \text{“concav”} & 0 & \text{“convex”} & 6\pi^2 \end{array} \right]$$

```
gl_x=-35..35;plotparam([X,Y],t=-pi..pi);G:=point
(0,0.358);A:=point(-pi^3,0); B:=point(pi^3,0);
```




5. *Soit Z la zone délimitée par la courbe (pour $t \in [-\pi, \pi]$) et l'axe Ox. Hachurer Z et déterminer son aire (on pourra utiliser Green-Riemann pour se ramener à une intégrale curviligne, puis à une intégrale classique que l'on pourra déterminer à la calculatrice en donnant la commande utilisée).*
On applique Green-Riemann au contour $\gamma$ qui est la réunion du segment $[-\pi^3, \pi^3]$ sur l'axe des $x$ avec la courbe $C$ parcourue en sens inverse, en posant par exemple $\omega = x\, dy$. La contribution du segment est nulle ($dy = 0$), donc l'aire vaut

$$a = \int_{\pi}^{-\pi} t^3 2\sin(t)\cos(t)\, dt$$

```
a:=integrate(t^3*2*sin(t)*cos(t),t,pi,-pi
); simplify(a); evalf(a)
```

$$-\frac{-2\pi^3+3\pi}{4}+\frac{2\pi^3-3\pi}{4},\frac{2\pi^3-3\pi}{2},26.2938876999$$

6. *(Bonus) Déterminer l'ordonnée du centre de gravité G de la zone Z*

$$y_G=\frac{\iint_Z y dx\, dy}{\iint_Z dx\, dy}$$

*représenter G sur la figure (on pourra procéder comme à la question précédente).*
Même méthode pour calculer le numérateur, on peut prendre $\omega = xy\, dy$ donc

$$\frac{1}{a}\int_{\pi}^{-\pi} t^3 2\sin(t)^3\cos(t)\, dt$$

```
yG:=1/a*integrate(t^3*2*sin(t)^3*cos(t),t,pi,-pi
); simplify(yG); evalf(yG)
```

$$\frac{-\frac{-24\pi^3+45\pi}{128}+\frac{24\pi^3-45\pi}{128}}{-\frac{-2\pi^3+3\pi}{4}+\frac{2\pi^3-3\pi}{4}},\frac{24\pi^2-45}{64\pi^2-96},0.358198130609$$

L'abscisse de $G$ est nulle en raison de la symétrie de la courbe par rapport à l'axe $Oy$.

7. On considère la forme différentielle

$$\omega = e^{xy}(y\cos(x)-\sin(x))dx + x\cos(x)e^{xy}dy$$

(a) *Cette forme est-elle fermée ? Exacte ? Si oui, en donner un potentiel.*
On calcule les dérivées croisées

$$\frac{\partial(e^{xy}(y\cos(x)-\sin(x)))}{\partial y}=xe^{xy}(y\cos(x)-\sin(x))+e^{xy}\cos(x)$$

et

$$\frac{\partial(x\cos(x)e^{xy})}{\partial x}=e^{xy}(\cos(x)-x\sin(x)+xy\cos(x))$$

elles sont égales donc la forme est fermée, donc exacte car définie et régulière ($C^\infty$) sur $\mathbb{R}^2$. Pour en trouver un potentiel $V$ on peut commencer par résoudre

$$\frac{\partial V}{\partial y}=x\cos(x)e^{xy}$$

qui donne $V=\cos(x)e^{xy}+v(x)$ (la constante d'intégration est constante en $y$ donc fonction de $x$), on remplace dans

$$\frac{\partial V}{\partial x}=e^{xy}(y\cos(x)-\sin(x))$$

et on trouve $v'(x)=0$ donc on peut prendre $v=0$ et

$$V(x,y)=\cos(x)e^{xy}$$

(b) *Calculer $\int_C \omega$*
Comme $\omega$ est exacte, il suffit de faire la différence de potentiel aux extrêmités :

$$V(\pi^3,0)-V(-\pi^3,0)=0$$

## 2 Calcul variationnel (2 points)

*Donner les équations d'Euler-Lagrange correspondant au lagrangien*

$$L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$$

*où $x(t) \in \mathbb{R}$, et $m > 0$ et $g > 0$ sont des constantes. Déterminer le hamiltonien associé.*
On a

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -mg, \ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

on remplace dans les équations d'Euler-Lagrange (en dimension 1) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

on obtient

$$m\ddot{x} = -mg$$

Le hamiltonien associé est

$$H = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L$$

donc

$$H = \dot{x}(m\dot{x}) - (\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

Il est conservé puisque $L$ ne dépend pas explicitement du temps.

## 3 Équation différentielle (9 points)

### 3.1 Préliminaire

*Donner la solution générale de l'équation différentielle d'inconnue la fonction $z$ où $z(x) \in \mathbb{R}$ :*

$$z' = 4xz \quad (*)$$

Équation linéaire homogène du 1er ordre, la solution générale est

$$z(x) = Ce^{2x^2}$$

### 3.2 Équation différentielle avec paramètre

Pour $E$ un réel fixé, on considère l'équation différentielle d'inconnue $y$ avec $y(x) \in \mathbb{R}$

$$-y'' + 4x^2y = Ey \quad (**)$$

1. *Quel est l'ordre de cette équation différentielle ? Est-elle linéaire ? À coefficients constants ? Quelle est la nature de l'ensemble des solutions ?*
   Équation differentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients variables, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

2. *Pour quelle valeur de $E$ la fonction $s(x) = \exp(-x^2)$ est-elle solution ? On suppose dans les questions 3 et 4 que $E$ a cette valeur.*
   On a
   $$s' = -2xe^{-x^2}, \quad s'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$
   on remplace $s$ dans $(**)$
   $$2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = Ee^{-x^2}$$
   donc $E = 2$ convient.
3. *On pose comme dans la méthode de variation de la constante*
   $$y(x) = K(x)s(x) = K(x)\exp(-x^2)$$
   *Montrer que $y$ est solution de $(**)$ si et seulement si $z = K'$ est solution de l'équation différentielle $(*)$*. On a
   $$y' = K's + Ks', \quad y'' = K''s + 2K's' + Ks''$$
   on remplace dans $(**)$
   $$-(K''s + 2K's' + Ks'') + 4x^2Ks = EKs$$
   Or $-Ks'' + 4x^2Ks = 2Ks$ (car $s$ est solution de $(**)$ pour $E = 2$ et on multiplie par $K$), donc
   $$-(K''s + 2K's') = 0$$
   donc $z = K'$ est solution de
   $$-2zs' = z's$$
   On remplace $s$ par sa valeur $\exp(-x^2)$ et on trouve que $z$ est solution de $(*)$, donc
   $$K' = z = Ce^{2x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$
4. *On pose*
   $$F(x) = \int_0^x \exp(2t^2)\, dt$$
   *Exprimer $K$ en fonction de $F$ (N.B. : il n'est pas possible d'exprimer $F$ à l'aide des fonctions élementaires). En déduire la solution générale de $(**)$*
   On intègre le résultat précédent, on obtient
   $$K = CF + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$
   puis
   $$z = Ks = (CF + \tilde{C})e^{-x^2}, \quad C, \tilde{C} \in \mathbb{R}$$
   on retrouve bien un espace de dimension 2 engendré par $s$ et $Fs$ avec $s = \exp(-x^2)$.

5. *Pour quelle valeur de E la fonction $\tilde{s}(x) = x\exp(-x^2)$ est-elle solution de $(**)$ ? Décrire en quelques lignes les étapes permettant de déterminer la solution générale de $(**)$ pour cette valeur de E.*
En remplaçant, on trouve $E = 6$. On utilise la méthode de variation de la constante, en remplaçant $s$ par $\tilde{s}$, la solution générale de $(**)$ est combinaison linéaire de $\tilde{s}$ et de $K\tilde{s}$ où $z = K'$ vérifie
$$-2z\tilde{s}' = z'\tilde{s}$$
On intègre cette équation du 1er ordre (pour $x \neq 0$)
$$-2\ln(|\tilde{s}|) = \ln(|z|)$$
donc
$$z = \frac{C}{\tilde{s}^2} = \frac{C}{x^2}e^{2x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$
puis
$$K = C\int \frac{1}{x^2}e^{2x^2} + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$
et
$$y = K\tilde{s} = xe^{-x^2}(C\int \frac{1}{x^2}e^{2x^2} + \tilde{C})$$
On peut encore intégrer par parties pour simplifier $y$ en
$$y = C(-e^{x^2} + 4Fxe^{-x^2}) + \tilde{C}xe^{-x^2}$$

6. *(Bonus) On suppose qu'il existe une solution de $(**)$ sous la forme*
$$\hat{s}(x) = P_n(x)\exp(-x^2)$$
*où $P_n$ est un polynôme de degré n. Pour quelle valeur de E (en fonction de n) est-ce possible ? (indication : remplacer $\hat{s}$ dans $(**)$ et regarder le terme de plus haut degré en facteur de* $\exp(-x^2)$*).*
On utilise la question 3
$$-(K''s + 2K's' + Ks'') + 4x^2Ks = EKs$$
comme $s$ est solution pour $E = 2$, on a $-Ks'' + 4x^2Ks = 2Ks$, donc en posant $K = P_n$,
$$-(P_n''s + 2P_n's') = (E-2)P_ns$$
comme $s = \exp(-x^2)$, on a :
$$-P_n'' + 4xP_n' = (E-2)P_n$$
Si on pose $P_n = a_nx^n + ... + a_0$, on obtient pour le terme de plus haut degré $n$ et les termes de degré $k, 0 \leq k < n$ (en posant $a_{n+1} = 0$) :
$$4na_n = (E-2)a_n, \quad -(k+2)(k+1)a_{k+2} + 4ka_k = (E-2)a_k$$

Donc $E = E_n = 4n+2$, $a_n$ est arbitraire, $a_{n-1} = 0$ et on peut déduire par une récurrence descendante les coefficients du polynôme pour $k < n$ :

$$a_k = \frac{-(k+2)(k+1)a_{k+2}}{E-(4k+2)} = \frac{-(k+2)(k+1)a_{k+2}}{4(n-k)}$$

Seuls les termes d'indice de même parité que $n$ sont non nuls.
Par exemple pour $n = 2$ et $a_2 = 1$, on a $a_1 = 0$ et $a_0 = -2a_2/8 = -1/4$, d'où la solution

$$y = (x^2 - \frac{1}{4})\exp(-x^2), \quad E = 10$$

Pour $n = 3$ et $a_3 = 1$, on a $a_2 = a_0 = 0$ et $a_1 = -6a_3/8 = -3/4$ d'où la solution

$$y = (x^3 - \frac{3}{4}x)\exp(-x^2), \quad E = 14$$

Remarque : cette équation différentielle $(**)$ provient d'une équation de Schrödinger en dimension un avec un potentiel quadratique ("oscillateur harmonique quantique"), les valeurs $E = E_n$ obtenues ci-dessus sont les seules valeurs de $E$ pour lesquelles il existe une solution $y(x)$ de $(**)$ tendant vers 0 à l'infini (plus précisément $y(x)$ doit être de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, pour pouvoir normaliser à 1 l'intégrale de la densité de probabilité de présence en $x$). Les polynômes $P_n(x/\sqrt{2})$ sont proportionnels aux polynômes appelés polynômes de Hermite

```
hermite(2); hermite(3)
```

$$4x^2 - 2, 8x^3 - 12x$$