Examen du 12 janvier 2018, de 8h à 10h.
Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits.
Ce sujet comporte deux pages. Le barême est indicatif.

1 Aire (6 points)

Soit C l'arc de courbe paramétrée :

$$x(t) = 1 - \cos(t), \quad y(t) = \sin(t) - t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

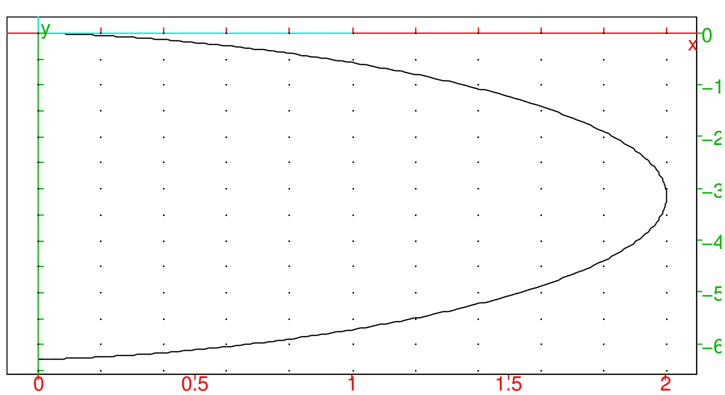
On veut déterminer l'aire A de la zone Z délimitée par l'axe Oy et C.

1. **Calculer x' et y', donner le double tableau de variations de x et y.**
On peut observer une symétrie par rapport à la droite $y = \pi$ correspondant à $x(2\pi - t) = 1 - \cos(2\pi - t) = 1 - \cos(t) = x(t)$ et $y(2\pi - t) = -2\pi - y(t)$ permettant de restreindre à $[0, \pi]$, sur cet intervalle $x' = sin(t) \geq 0$ et $y' = \cos(t) - 1 \leq 0$
`tabvar([1-cos(t),sin(t)-t],t,0,2*pi)`

$$\begin{pmatrix} t & 0 & & \pi & & 2\cdot\pi \\ x = (1-\cos(t)) & 0 & \uparrow & 2 & \downarrow & 0 \\ x' = (\sin(t)) & 0 & + & 0 & - & 0 \\ y = (\sin(t) - t) & 0 & \downarrow & -\pi & \downarrow & -2\cdot\pi \\ y' = (\cos(t) - 1) & 0 & - & -2 & - & 0 \\ x'y'' - y'x'' & 0 & \text{concav} & -2 & \text{concav} & 0 \end{pmatrix}$$

2. **Vérifier que 0 est un point singulier et déterminer la tangente en ce point. Y-a-t-il d'autres points singuliers sur C ?**
On a bien $x'(0) = y'(0) = 0$. La tangente en ce point a pour vecteur directeur $(x''(0), y''(0)) = (1, 0)$. y' s'annule uniquement en 0 et 2π, donc il y a un deuxième point singulier en 2π, symétrique due celui en 0.

3. **Tracer C et hachurer Z.**
`plotparam([1-cos(t),sin(t)-t],t,0,2*pi)`



4. **En utilisant le théorème de Green-Riemann (ou de Stokes), exprimer l'aire**

$$A = \iint_Z dx\, dy$$

à l'aide d'une intégrale curviligne sur C, puis calculer A.
Le bord de Z, parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique est composé de C et du segment $[-2\pi i, 0]$, en appliquant Green-Riemann à la forme $\omega = xdy$ on a donc

$$\begin{aligned} A &= \int_{\partial Z} x\, dy \\ &= -\int_C x\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - cos(t))^2\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 - 2cos(t) + \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

2 Équation différentielle (7 points)

Soit $a > 0$ et $\omega > 0$. On considère l'équation différentielle d'inconnue la fonction $y(t)$:

$$ay' + y = \cos(\omega t)$$

1. **Quel est le type de cette équation ?** Équation différentielle linéaire à coefficients constants.
2. **Donner la solution générale de l'équation** $ay' + y = 0$**.**

$$y(t) = Ce^{-t/a}$$

3. **Déterminer une solution particulière périodique** y_p **de l'équation** $ay' + y = e^{i\omega t}$**, l'écrire sous la forme** $y_p = Ae^{i(\omega t - \phi)}$ **avec** $A > 0$**.**
On pose $y_p = Ke^{i\omega t}$, on a alors :

$$(ia\omega K + K)e^{i\omega t} = e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{1+ia\omega} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2\omega^2}e^{i\phi}}$$

avec ϕ l'argument de $1 + ia\omega$ et donc $A = \sqrt{1+a^2\omega^2}$. On observe que $\phi \in]0, \pi/2[$ et est proche de 0 si a est petit (faible inertie) et proche de $\pi/2$ si a est grand.
4. **Soit** $\overline{y_p}$ **le conjugué de** y_p**, déterminer sans faire de calcul** $a\overline{y_p}' + \overline{y_p}$
Comme a est réel, on obtient le conjugué de $ay'_p + y_p$ donc $e^{-i\omega t}$.
En déduire une solution périodique de $ay' + y = \cos(\omega t)$**.**
On applique le principe de superposition, une solution correspondant à $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ est la demi-somme de y_p et $\overline{y_p}$ ou encore sa partie réelle, soit $A\cos(\omega t - \phi)$.

5. **En déduire la solution générale de $ay' + y = \cos(\omega t)$ et comparer les solutions avec la solution périodique y_p lorsque t tend vers l'infini.** C'est la somme de la solution générale homogène et de la solution particulière $A\cos(\omega t - \phi)$.
6. **On modélise la température moyenne d'un lieu donné en fonction de la saison par l'équation $ay' + y = \cos(\omega t)$ où $2\pi/\omega$ vaut une année (loin de l'équateur) et où a est d'autant plus grand que l'inertie thermique du lieu est grande.**
On observe que la température moyenne la plus élevée a lieu avec un déphasage d'environ 3 semaines après le solstice d'été pour les continents, environ 8 semaines pour les océans et environ 11 semaines pour la banquise.
Déterminer le déphasage ϕ_C, ϕ_O, ϕ_B correspondant aux trois situations (respectivement continents, océans, banquise) et en déduire les valeurs de $a_C\omega, a_O\omega, a_B\omega$ correspondantes.
$$\phi_c = \frac{3}{52}2\pi, \quad \phi_O = \frac{8}{52}2\pi, \quad \phi_B = \frac{11}{52}2\pi$$
On a $\tan(\phi) = a\omega$ donc
$$a_c\omega = \tan(\frac{3}{52}2\pi) = 0.38..., \quad a_o\omega = \tan(\frac{8}{52}2\pi) = 1.45... \quad a_B\omega = \tan(\frac{11}{52}2\pi) = 4.06...$$
7. **Déterminer les valeurs de A_C et A_O, puis le rapport A_C/A_O des amplitudes thermiques au cours d'une année sur les continents et sur les océans. Est-ce vraissemblable ?**
Donc $A = 1/\sqrt{1+\tan(\phi)^2}$ et
$$A_c = \frac{1}{\sqrt{1+\tan(\frac{3}{52}2\pi)^2}} = 0.94, \quad A_O = \frac{1}{\sqrt{1+\tan(\frac{8}{52}2\pi)^2}} = 0.57..., \quad A_B = \frac{1}{\sqrt{1+\tan(\frac{11}{52}2\pi)^2}} = 0.24..,$$
et $A_c/A_o = 1,65...$. Dans ce modèle, les continents ont donc une amplitude thermique plus importante d'environ 65% à celle des océans, ce qui parait vraissemblable...

3 Système différentiel (9 points)

On considère le système différentiel d'ordre 2 d'inconnues les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ à valeurs réelles :
$$\left\{ \begin{array}{rcll} \ddot{x} & = & \omega\dot{y} & + \quad R\omega^2 \\ \ddot{y} & = & -\omega\dot{x} & \end{array} \right.$$
où $R > 0$ et $\omega > 0$ sont des constantes et où $\dot{f}$ désigne la dérivée de f par rapport à t. Ce système modélise la trajectoire d'une particule de charge q et de masse m dans un champ magnétique B et un champ électrique E constants et perpendiculaires avec
$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad R = \frac{E}{B\omega}$$
On va résoudre ce système de deux manières puis représenter la courbe parcourue.

1. **Première méthode : soit $z(t) = x(t) + iy(t)$, déterminer $\ddot{z} + i\omega\dot{z}$**
On a $\ddot{z} + i\omega\dot{z} = \ddot{x} + i\ddot{y} + i\omega\dot{x} - \omega\dot{y} = \omega\dot{y} + R\omega^2 - i\omega\dot{x} + i\omega\dot{x} - \omega\dot{y} = R\omega^2$

2. **Résoudre l'équation homogène $\ddot{z}+i\omega\dot{z}=0$ (attention, les coefficients ne sont pas tous réels). En déduire la solution générale $z(t)$ avec second membre.**
L'équation caractéristique de $\ddot{z}+i\omega\dot{z}=0$ est $r^2+i\omega r=0$, elle possède 2 racines simples 0 et $-i\omega$, donc $z(t)=A+Be^{-i\omega t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $z(t)=Ct$, on remplace et on obtient $iC\omega=R\omega^2$ donc $C=-iR\omega$ et la solution générale avec second membre est
$$z(t)=A+Be^{-i\omega t}-iR\omega t$$
3. **On suppose uniquement dans cette question que $x(0)=y(0)=0, \dot{x}(0)=\dot{y}(0)=0$, déterminer $z(t)$ puis $x(t)$ et $y(t)$**
On a $z(0)=z'(0)=0$ donc $A+B=0$ et $-i\omega B-iR\omega=0$ soit $B=-R$ et $A=R$, finalement
$$z(t)=R(1-e^{-i\omega t}-i\omega t), \quad x(t)=R(1-\cos(\omega t)), \quad y(t)=R(\sin(\omega t)-\omega t)$$
4. **Deuxième méthode : montrer que $(\dot{x},\dot{y})$ vérifie un système linéaire d'ordre 1 à coefficients constants dont on déterminera la matrice A.**
Soit $Y=\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$, on a
$$\dot{Y}=AY+\begin{pmatrix} R\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$
Diagonaliser A, en déduire la solution générale complexe $(\dot{x},\dot{y})$ puis (x,y).
On résoud d'abord l'équation homogène. Le polynome caractéristique de A est $\lambda^2+\omega^2$, les valeurs propres de A sont donc $\pm i\omega$. Un vecteur propre (x,y) associé à $i\omega$ vérifie $i\omega x-\omega y=0$ donc $v_+(1,i)$ convient, on prend son conjugué pour $-i\omega$. On pose donc
$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$
alors $Z=P^{-1}Y$ vérifie $Z'=DZ$ où
$$D=\begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}$$
Donc $Z(t)=(\alpha e^{i\omega t},\beta e^{-i\omega t})$ et
$$Y=PZ=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha e^{i\omega t} \\ \beta e^{-i\omega t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha e^{i\omega t}+\beta e^{-i\omega t} \\ i(\alpha e^{i\omega t}-\beta e^{-i\omega t}) \end{pmatrix}$$
On cherche ensuite une solution particulière Y_p pour $Y'=AY+b$ pour $b=\begin{pmatrix} R\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est constant, donc on peut chercher Y_p constant, donc on résoud $AY_p=-b$, ce qui donne $Y_p=\begin{pmatrix} 0 \\ -R\omega \end{pmatrix}$ et finalement
$$Y=\begin{pmatrix} \alpha e^{i\omega t}+\beta e^{-i\omega t} \\ i(\alpha e^{i\omega t}-\beta e^{-i\omega t})-R\omega \end{pmatrix}$$

5. **On suppose dans la suite que $x(0) = y(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$. Déterminer $x(t)$ et $y(t)$ (on pourra vérifier que l'on retrouve le résultat précédent).**
Donc $Y(0) = 0$, donc $\alpha + \beta = 0$ et $i(\alpha - \beta) - R\omega = 0$, soit $-\alpha = \beta = iR\omega/2$. Finalement,
$$Y(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\omega \sin(\omega t) \\ R\omega(\cos(\omega t) - 1) \end{pmatrix}$$
On intègre par rapport à t avec $x(0) = y(0)$ et on retrouve bien $x(t) = R(1 - \cos(\omega t)$ et $y(t) = R(\omega \sin(\omega t) - \omega t)$

6. **Expliquer pourquoi la courbe décrite par la particule a un point singulier en $t = 0$. Déterminer la tangente en ce point en utilisant le système différentiel.** On a $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ donc la vitesse s'annule ce qui entraine l'existence d'un point singulier en $t = 0$. L'accélération en ce point est non nulle puisque $\ddot{x} = R\omega^2$ et est horizontale puisque $\ddot{y} = 0$.

7. **Représenter l'allure de la courbe décrite par la particule. On pourra faire le lien avec le 1er exercice.**
En changeant de paramètrage $\tau = \omega t$ et en faisant une homothétie de rapport R on se ramène à la cycloide étudiée au 1er exercice.

8. **Appliquer les équations d'Euler-Lagrange au lagrangien**
$$L(x,y,\dot{x},\dot{y},t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qEx + qBx\dot{y}$$
Par rapport à x et $\dot{x}$,
$$\frac{\partial L}{\partial x} = qE + qB\dot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$
Donc
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = qE + qB\dot{y} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y} + \frac{qE}{m}$$
Par rapport à y et $\dot{y}$,
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qBx$$
Donc
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}) = \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{y} + qBx) = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x}$$
On retrouve bien les équations de la première question, sachant que
$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad R = \frac{E}{B\omega}$$
Déterminer une constante du mouvement (indication : observer que L ne dépend pas explicitement du temps ou observer que L ne dépend pas explicitement de y).
On a vu que $\frac{d}{dt}(m\dot{y} + qBx) = 0$ (L ne dépend pas de y) donc $m\dot{y} + qBx$ est une constante du mouvement. En observant que L ne dépend pas du temps, on a une autre constante du mouvement
$$\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = m\dot{x}^2 + \dot{y}(m\dot{y} + qBx) - (\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qEx + qBx\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - qEx$$