Corrigé CC de novembre 2021.

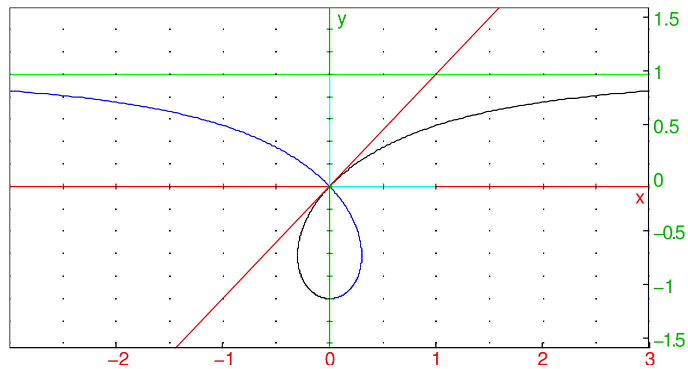
1 Polaire

Étude de $\rho = \cos(2\theta)/\sin(\theta)$. Pour les calculs à la machine, on utilisera la variable x au lieu de θ, on pose

```
r:=cos(2x)/sin(x)
```

1. ρ est 2π périodique et $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ on peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$ (symétrie Oy). De plus $r(\pi - \theta) = r(\theta)$ donc on peut restreindre à $[0, \pi/2]$ avec à nouveau la même symétrie par rapport à Oy. Le domaine est alors $]0, \pi/2]$.
2. On a aussi
$$\rho = \frac{1 - 2\sin(\theta)^2}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\sin(\theta)} - 2\sin(\theta)$$
Donc
$$\rho' = \cos(\theta)\left(\frac{-1}{\sin(\theta)^2} - 2\right) \leq 0$$
avec égalité pour $\theta = \pi/2$. En 0^+, ρ tend vers $+\infty$, en $\pi/2$, ρ vaut -1 avec une tangente perpendiculaire au rayon vecteur. Entre les deux ρ décroit et s'annule donc en θ tel que $\cos(2\theta) = 0$ soit $\theta = \pi/4$
$$\left[\begin{array}{cccccc} x & 0 & & \frac{\pi}{4} & & \frac{\pi}{2} \\ \rho' & -\infty & - & & - & 0 \\ \rho & +\infty & \downarrow & 0 & \downarrow & -1 \end{array}\right]$$
3. En $\theta = \pi/4$ ρ s'annule et la tangente fait cet angle avec Ox.
4. Cf. question 2, tangente horizontale.
5. Il nous reste à étudier la branche infinie pour $\theta = 0$.
$$\lim_{\theta \to 0} \rho \sin(\theta - 0) = 1$$
Donc asymptote horizontale d'équation $Y = 1$ dans le repère tourné, mais comme $\theta = 0$ le repère tourné est Oxy.
6. `trigsin(texpand(1+r*(1/r)''))`
$$\frac{-8\sin^2 x + 12}{4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 1}$$
Il n'y a donc pas de changement de convexité, le numérateur est plus grand que 4.

7. `gl_x=-3..3; gl_ortho=1;plotpolar(r,x,0.01,1.57);plotpolar(r,x,1.58,3.13,color=blue);droite(y=x,color=red);droite(y=1,color=green);`



2 Paramétrique

Étude de

$$(x(t) = \cos(t) + t\sin(t), y(t) = \sin(t) - t\cos(t)), t \in [-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

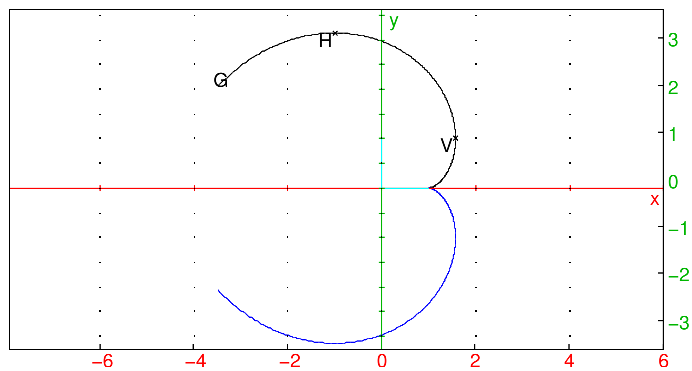
Pour faciliter les calculs à la machine, on utilise x à la place de la variable t, et on note `X,Y` l'expression des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.

```
X:=cos(x)+x*sin(x);Y:=sin(x)-x*cos(x); X1:=X'; Y1:=Y';
```

1. La courbe est bien définie sur $[-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Si on change t en $-t$, x reste constant et y change de signe, on peut donc restreindre l'étude à $[0, \frac{5\pi}{4}]$ avec une symétrie par rapport à Ox.
   On a
   $$\dot{x} = t\cos(t), \dot{y} = t\sin(t)$$
   Donc $\dot{x}$ s'annule en $\pi/2$ est positif avant et négatif après, $\dot{y}$ s'annule en π est positifi avant et négatif aprés. D'où le tableau de variations :
   $$\begin{bmatrix} t & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \pi & & \frac{5\pi}{4} \\ x = \cos t + t\sin t & 1 & \uparrow & \frac{\pi}{2} & \downarrow & -1 & \downarrow & -\pi\frac{5\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x' = \cos t \cdot t & 0 & + & 0 & - & -\pi & - & -\pi\frac{5\sqrt{2}}{8} \\ y = \sin t - t\cos t & 0 & \uparrow & 1 & \uparrow & \pi & \downarrow & \pi\frac{5\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \sin t \cdot t & 0 & + & \frac{\pi}{2} & + & 0 & - & -\pi\frac{5\sqrt{2}}{8} \end{bmatrix}$$
   On a une tangente verticale en $t = \pi/2$, une tangente horizontale en $t = \pi$.
2. On a un point singulier en $t = 0$. Les développements limités à l'ordre 3 donnent
   $$x = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2 + o(t^3) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3), \quad y = t - \frac{t^3}{3!} - t(1 - \frac{t^2}{2}) + o(t^3) = \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

Il s'agit donc d'un rebroussement de première espèce avec une tangente horizontale.

3. `gl_ortho=1;G:=plotparam([X,Y],x,0,5*pi/4 );V:=point(pi/2,1); H:=point(-1,pi);symetrie (droite(y=0),G,color=blue);`



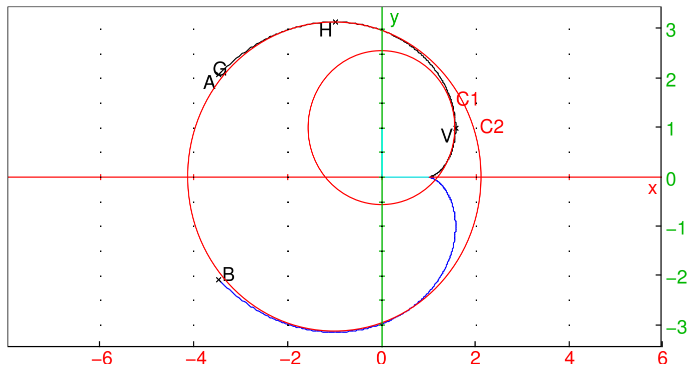
4. Pour $t > 0$, on a
$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = t\, dt$$
donc la longueur de l'arc de courbe sur $[0, 5\pi/4$ est
$$\int_0^{\frac{5\pi}{4}} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{25\pi^2}{32}$$
et le double pour C. On vérifie
`simplify(arclen([X,Y],x,0,5*pi/4))`
$$\frac{25}{32}\pi^2$$

5. La vitesse vaut $t(\cos(t), \sin(t))$ donc le repère de Frénet est donné par $\overrightarrow{T} = (\cos(t), \sin(t))$ et $\overrightarrow{N} = (-\sin(t), \cos(t))$.
De plus
$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \overrightarrow{N}\frac{1}{t}$$
donc la courbure vaut $\kappa = \frac{1}{t}$ et le rayon de courbure vaut t, donc le centre de courbure est
$$M + R\overrightarrow{N} = (\cos(t) + t\sin(t), \sin(t) - t\cos(t) + t(-\sin(t), \cos(t)) = (\cos(t), \sin(t))$$

6. En $\pi/2$, on obtient le cercle de centre $(0, 1)$ et rayon $\pi/2$, en π le cercle de centre $(-1, 0)$ et rayon π.

```
G:=plotparam([X,Y],x,0,5*pi/4);V:=point(pi/2,1
); H:=point(-1,pi); A:=point(subst(X+i*Y,x=5*pi/4
```

```
));symetrie(droite(y=0),G,color=blue); B:=symetrie
(droite(y=0),A);C1:=cercle(i,pi/2,color=red
); C2:=cercle(-1,pi,color=red);
```



7. On a

$$\dot{x} = t\cos(t), \ddot{x} = -t\sin(t) + \cos(t), \dot{y} = t\sin(t), \ddot{y} = t\cos(t) + \sin(t)$$

donc le déterminant de la vitesse et accélération vaut

$$t\cos(t)(t\cos(t) + \sin(t)) - t\sin(t)(-t\sin(t) + \cos(t)) = t^2$$

il n'y a donc pas de changement de convexité.

8. On choisit d'utiliser la forme ydx pour calculer l'aire, car $dx = 0$ sur le segment vertical AB. Sur l'arc de courbe :

$$ydx = y\dot{x}dt = (\sin(t) - t\cos(t))t\cos(t)$$

d'où l'aire demandée :

$$-\int_B^A ydx = -\int_{-5\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(t) - t\cos(t))t\cos(t)\, dt$$

on termine le calcul à la machine, en valeur exacte
`-integrate(Y*X1,x,-5*pi/4,5*pi/4)`

$$-\frac{-125\pi^3 - 150\pi^2 + 96}{384} + \frac{125\pi^3 + 150\pi^2 - 96}{384}$$

en approché cela donne environ 27.4. L'aire d'un disque de rayon 3 est 9π qui fait un peu plus de 28. C'est l'aire du cercle osculateur en $t = \pi$ qui est assez proche (voir graphique) de celle recherchée.