# Mat 307 - CC1 (Partiel) - 2018
# Corrigé

## I Courbe paramétrique

(1) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 2\}$

Pas de symétrie évidente.

(2) * En $+\infty$ :

$\lim_{t \to +\infty} x = \lim_{t \to +\infty} y = +\infty$

$\lim_{t \to +\infty} \frac{y}{x} = 1$ ; $\lim_{t \to +\infty} y - x = \lim \left(3 + \frac{4}{t-2} - \frac{1}{1+t}\right) = 3$

On a une asymptote d'équation $y = x + 3$

* En $-\infty$ : idem.

* En $-1$

$\lim_{t \to -1^{\pm}} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \to -1} y(t) = -\frac{1}{3}$ : asymptote horizontale $y = -\frac{1}{3}$

* En 2

$\lim_{t \to 2^{\pm}} y(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \to 2^{\pm}} x(t) = \frac{4}{3}$ : asymptote verticale $x = \frac{4}{3}$

(3) $x'(t) = 1 - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{t(t+2)}{(1+t)^2} = 0$ pour $t = 0$ et $-2$

$y'(t) = 1 - \frac{4}{(t-2)^2} = \frac{t(t-4)}{(t-2)^2} = 0$ pour $t = 0$ et $4$

tangente horizontale en $t = 4$ et verticale en $t = -2$

(4) On a un point singulier : $t=0$.

$$x(t) = t-1+\left(1-t+t^2-t^3+o(t^3)\right) = t^2-t^3+o(t^3)$$

$$y(t) = t+2-\frac{2}{1-\frac{t}{2}} = t+2-2\left(1+\frac{t}{2}+\left(\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{2}\right)^3+o(t^3)\right)$$

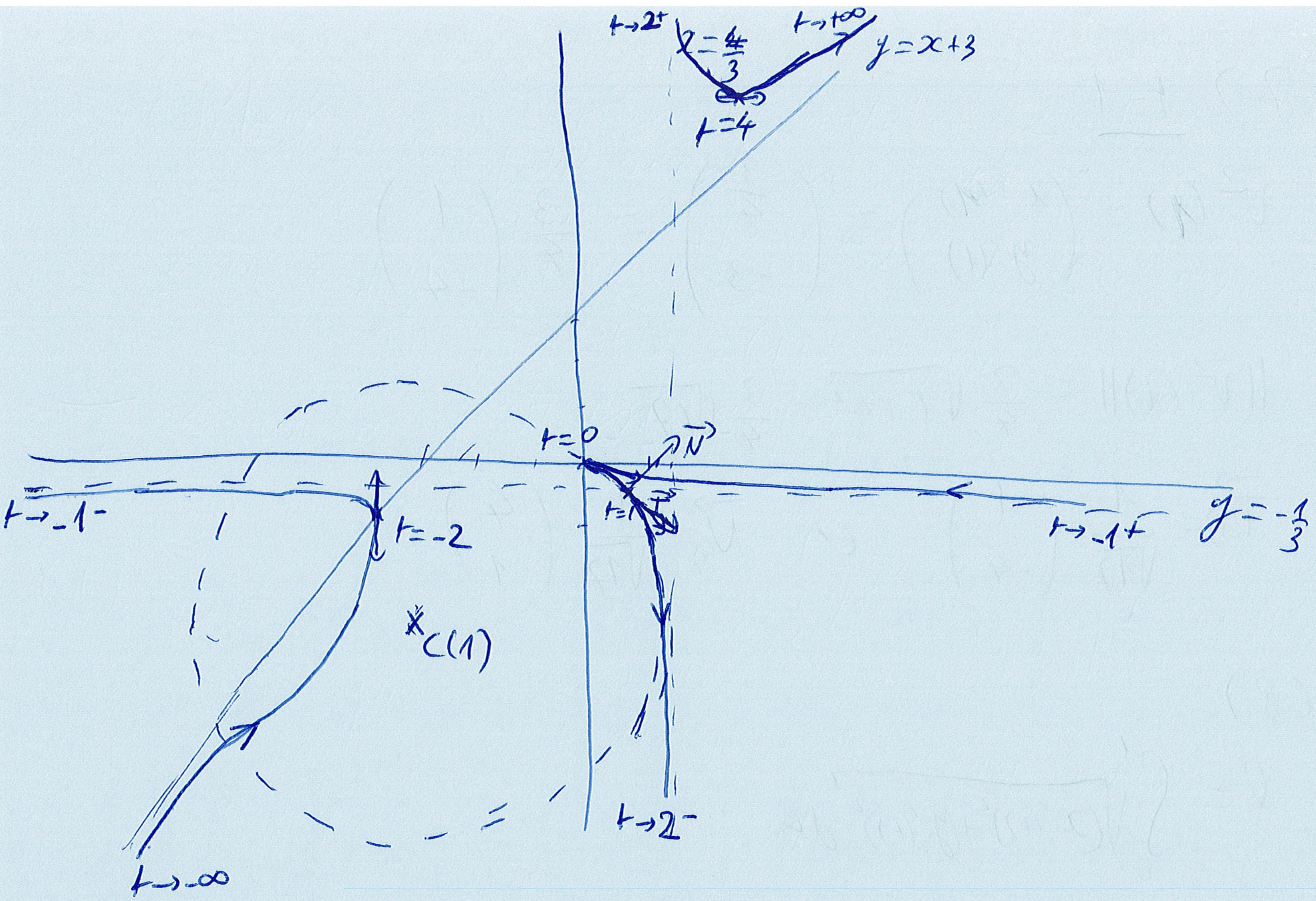
$$= -\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}t^3+o(t^3)$$

d'où $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} t^3 + o(t^3)$

$p=2$, $q=3$ : on a un point de rebroussement de 1ère espèce de tangente $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(5)

| $t$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | | $+$ | | |
| $x$ | $-\infty$ | ↗ | $-4$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\frac{4}{3}$ ‖ $\frac{4}{3}$ | ↗ | $3{,}2$ | ↗ | $+\infty$ |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↗ | $-\frac{1}{3}$ ‖ $-\frac{1}{3}$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $8$ | ↗ | $+\infty$ |
| $y'$ | | | $+$ | | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |




(6) En utilisant la calculatrice avec les commandes factor et diff, on trouve

$$x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t) = \frac{6t^2(t+6)}{(t-2)^3(t+1)^3}$$

Il y a donc un point d'inflexion avec changement de convexité en $t = -6$.

(7) $\underline{t=1}$

$$\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{v}(1)\| = \frac{3}{4}\sqrt{1+4^2} = \frac{3}{4}\sqrt{17}$$

$$\vec{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(8)

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{t^2(t+2)^2}{(1+t)^4} + \frac{t^2(t-4)^2}{(t-2)^4}}\, dt \simeq 1,14$$

(avec calculatrice)

(9) $x''(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3}$ , $y''(t) = \dfrac{8}{(t-2)^3}$

$$\vec{a}(1) = \begin{pmatrix} x''(1) \\ y''(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$a_N(1) = \vec{a}(1) \cdot \vec{N}(1) = \frac{1-8}{\sqrt{17}} = -\frac{7}{\sqrt{17}}$$

$$R = \frac{\|\vec{v}(1)\|^2}{a_N(1)} = \frac{\frac{9}{16}\times 17}{-\frac{7}{\sqrt{17}}} \simeq -5,63 \quad \text{rayon signé}$$

$$= -\frac{9 \times 17 \times \sqrt{17}}{16 \times 7}$$

$$C(1) = M(1) + R\vec{N}(1)$$

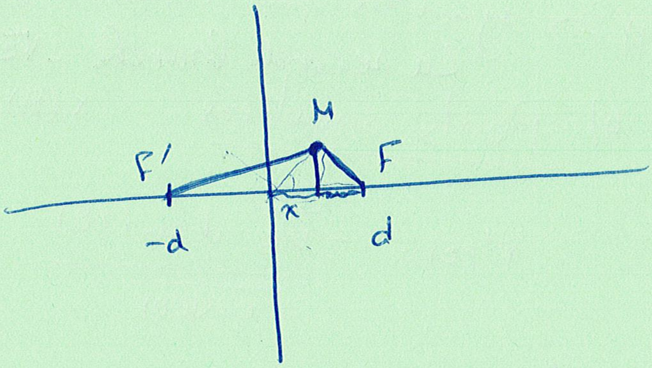
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{9 \times 17 \times \sqrt{17}}{16 \times 7} \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{9 \times 17}{4 \times 7} \\ -1 - \frac{9 \times 17}{16 \times 7} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -4{,}96 \\ -2{,}37 \end{pmatrix}$$

Cercle osculateur : cercle de centre $C(1)$ et de rayon $5{,}63$.

Correction exo 2

2. $d(M, F)\, d(M, F') = d(O, F)^2$




1) $MF^2 = (d-x)^2 + y^2$

$MF'^2 = (x+d)^2 + y^2$

$\Rightarrow \left((d-x)^2 + y^2\right)\left((x+d)^2 + y^2\right) = d^4$

$(d-x)^2(d+x)^2 + y^2(d-x)^2 + (d+x)^2 y^2 + y^4 = d^4$

$(d-x)^2(d+x)^2 + y^2\left((d-x)^2 + (d+x)^2\right) + y^4 = d^4$

$(d^2 - 2dx + x^2)(d^2 + x^2 + 2dx) + y^2\left((d-x)^2 + (d+x)^2\right) + y^4 = d^4$

$(d^2 + x^2)^2 - 4d^2x^2 + 2y^2(x^2 + d^2) + y^4 = d^4$

$x^4 + 2d^2x^2 + d^4 - 4d^2x^2 + 2y^2x^2 + 2y^2d^2 + y^4 = d^4$

$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2d^2(x^2 - y^2) = d^4 - d^4$

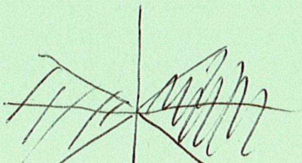
$(x^2 + y^2)^2 = 2d^2(x^2 - y^2)$.

2) $r^2 = x^2 + y^2$ $\quad \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $\quad \Rightarrow r^4 = 2d^2 r^2 \cos 2\theta$

$\Rightarrow r^2 = 2d^2 \cos 2\theta$

$\cos 2\theta \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \theta + k\pi < \frac{\pi}{4}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$



3) 1) $r(\theta+\pi) = r(\theta)$
2) $r(-\theta) = r(\theta)$ $\Big\} \Rightarrow$ domaine d'etude $[0, \frac{\pi}{4}]$
$\left(\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \, [\text{mod } \pi]\right)$

1) $\Rightarrow$ symétrie par rotation de $\pi$ , 2) $\Rightarrow$ symétrie p/r $(Ox)$
La seconde branche $-\sqrt{2}\, d \sqrt{\cos 2\theta}$ sera donc déjà tracée

4) Points singuliers : $r(\theta) = r'(\theta) = 0$

$$r'(\theta) = \frac{-\sqrt{2}\, d \sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$$

Il n'y a pas de point singulier car on ne peut pas avoir $\cos 2\theta = \sin 2\theta = 0$

5.) $\theta = 0$

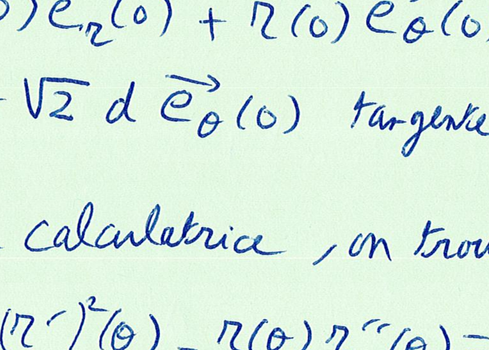
$$\vec{T} = r'(0)\vec{e}_r(0) + r(0)\vec{e}_\theta(0)$$
$$= 0 + \sqrt{2}\, d\, \vec{e}_\theta(0) \text{ tangente verticale}$$

6.) Avec la calculatrice, on trouve (avec factor)

$$r^2(\theta) + 2(r')^2(\theta) - r(\theta) r''(\theta) = 6d^2\left(\frac{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}\right) > 0$$

ce qui ne change jamais de signe
$\Rightarrow$ pas de changement de convexité.

7.)




8.)