CC1 : corrigé du partiel du 26 octobre 2017

Exercice 0

Comme $\cos(\frac{\pi}{2}+u) = -\sin u$ et $\sin(\frac{\pi}{2}+u) = \cos u$, nous avons $\tan(\frac{\pi}{2}+u) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+u)}{\cos(\frac{\pi}{2}+u)} = -\frac{\cos u}{\sin u} = -\frac{1}{\tan u}$.

Exercice 1

1. Les fonctions $\cos(\cdot), \sin(\cdot)$ sont de période 2π, alors que $\tan(\cdot)$ est de période π. Donc la fonction $t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ est de période 2π. De même pour $x(\cdot), y(\cdot)$. On peut se ramener à la période $[-\pi, \pi[$. Pour que $y(\cdot)$ soit bien définie, il faut que

$$\tan\left(\frac{t}{2}\right) > 0.$$

L'ensemble des solutions de cette inégalité dans la période $[-\pi, \pi[$ est clairement $]0, \pi[$.

2. Grâce aux identités $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$, $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$, $\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}) = -\frac{1}{\tan(-\frac{t}{2})} = \frac{1}{\tan(\frac{t}{2})}$, on a donc

$$x(\pi - t) = x(t) \quad \text{et} \quad y(\pi - t) = \cos(\pi - t) + \ln\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) = -\cos(t) + \ln\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} = -y(t).$$

On en déduit que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Cela nous permet de ramener l'intervalle d'étude à $]0, \frac{\pi}{2}]$, puis nous obtiendrons la courbe pour tout t en faisant une symétrie par rapport à l'axe (Ox).

3. Tout d'abord, sachant que $(\tan t)' = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, $\sin(t) = 2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$, on vérifie que

$$\left(\ln\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)' = \frac{1}{\tan(\frac{t}{2})}\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)' = \frac{\cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\frac{1}{\cos^2(\frac{t}{2})} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})} = \frac{1}{\sin t}.$$

On obtient

$$x'(t) = \cos(t), \quad y'(t) = -\sin(t) + \frac{1}{\sin t} = \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} = \frac{\cos^2 t}{\sin t}.$$

Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos t, \sin t > 0$, ce qui implique que les fonctions $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ sont croissantes.

4. On ne pourrait avoir qu'une seule branche infinie autour de $t = 0$. En fait, on a $\lim_{t\to 0^+} x(t) = 0$ et

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = 1 + \lim_{t\to 0^+} \ln\tan\left(\frac{t}{2}\right) = 1 + \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Nous avons donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

5. Dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$x'(t) = \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

On a aussi

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2})} = 0.$$

On a donc un seul point singulier, qui est en $t = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire au point $(x(\frac{\pi}{2}), y(\frac{\pi}{2})) = (1, 0)$.
Pour calculer la tangente en ce point, on présente deux méthodes.
(I) La calculatrice nous donne le comportement des fonctions au voisinage de $t = \pi/2$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}(t - \tfrac{\pi}{2})^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}(t - \tfrac{\pi}{2})^3 + o\Big((t - \tfrac{\pi}{2})^3\Big)$$

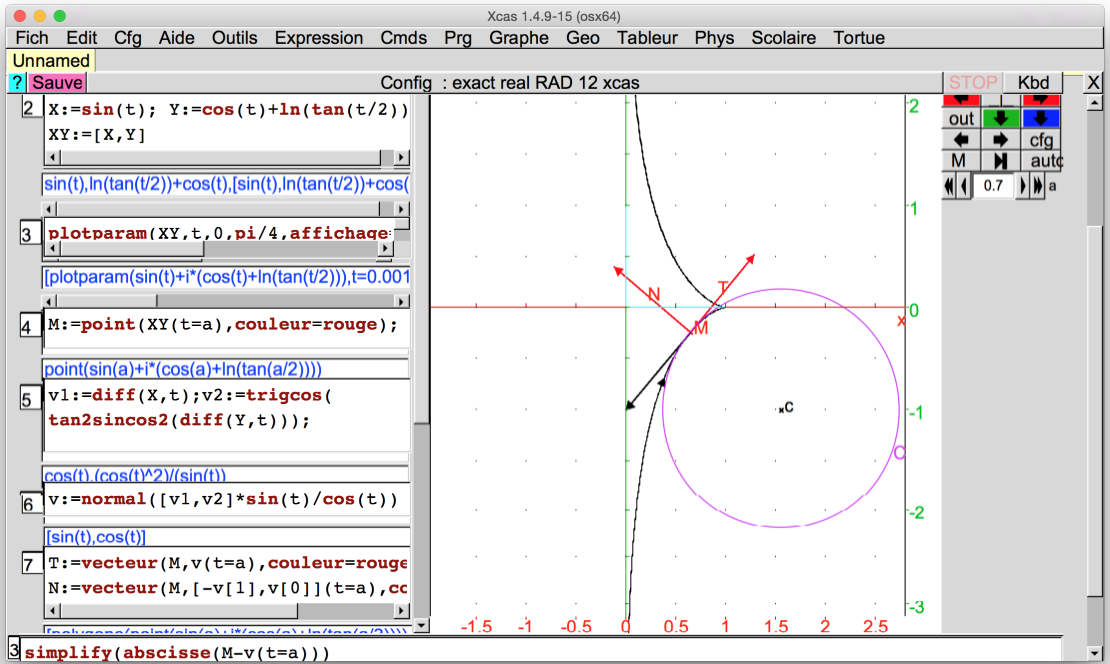
Nous en déduisons que le vecteur tangent est horizontal. Comme $(0, \frac{1}{3})$ n'est pas proportionnel à $(\frac{1}{2}, 0)$, il s'agit donc d'un point de rebroussement de 1ère espèce.
(II) On calcule la seconde dérivée.

$$x''(t) = -\sin t, \quad y''(t) = -\cos t - \frac{\cos t}{\sin^2 t}.$$

On a $(x''(\frac{\pi}{2}), y''(\frac{\pi}{2})) = (-1, 0)$. La tangente est donc portée par la seconde dérivée qui est $(-1, 0)$. Elle est donc horizontale d'équation $y = 0$.
Pour déterminer la nature de ce point singulier, on calcule la troisième dérivée.

$$x'''(t) = -\cos t, \quad y'''(t) = \sin t + \frac{1 + \cos^2 t}{\sin^3 t}.$$

On a donc $(x'''(\frac{\pi}{2}), y'''(\frac{\pi}{2})) = (0, 2)$, qui n'est pas colinéaire à $(x''(\frac{\pi}{2}), y''(\frac{\pi}{2})) = (-1, 0)$. Il s'agit donc un point de rebroussement de première espèce.



6.

7. D'après les calculs précédents, on a pour tout $t \in]0, \pi[$, le vecteur vitesse

$$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t}\right).$$

Alors la norme du vecteur vitesse est

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{\frac{\cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}{\sin^2 t}} = \left|\frac{\cos t}{\sin t}\right| = \frac{|\cos t|}{\sin t},$$

car le sinus est positif sur $]0, \pi[$. D'où le repère de Frénet de direction tangentielle et de direction normale

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v} = \frac{\cos t}{|\cos t|}(\sin t, \cos t), \quad \vec{N}(t) = \frac{\cos t}{|\cos t|}(-\cos t, \sin t).$$

Comme l'accélération vaut $\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t)) = -\left(\sin t, \cos t\left(1 + \frac{1}{\sin^2 t}\right)\right)$, nous calculons que l'accélération normale est $a_n(t) = \vec{a}(t) \cdot \vec{N}(t) = -\frac{|\cos t|}{\sin t}$. D'après la formule du cours, $a_n(t) = \chi(t)v^2(t)$, nous en déduisons la courbure $\chi(t) = -\frac{\sin t}{|\cos t|}$, le rayon de courbure signé $-\frac{|\cos t|}{\sin t}$ et le rayon du cercle osculateur $\frac{|\cos t|}{\sin t}$. Le centre du cercle osculateur est donc

$$\vec{C}(t) = \vec{M}(t) + \frac{1}{\chi(t)}\vec{N} = \left(\sin t, \cos t + \ln\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \frac{|\cos t|}{\sin t}\frac{\cos t}{|\cos t|}(-\cos t, \sin t) = \left(\frac{1}{\sin t}, \ln\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

Pour $t = \frac{\pi}{3}$, on obtient que le cercle osculateur est le cercle de rayon $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et de centre $C\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\ln 3\right)$.

8. Pour tout paramètre $t_0 \in]0, \pi[$, une équation paramétrique de la tangente en $M(t_0)$ est

$$x_{\tan}(t) = tx'(t_0) + x(t_0) = t\cos t_0 + \sin t_0 \quad \text{et} \quad y_{\tan}(t) = ty'(t_0) + y(t_0) = t\frac{\cos^2 t_0}{\sin t_0} + \cos t_0 + \ln\tan\tfrac{t_0}{2}.$$

Cette droite croise l'axe des ordonnées quand $x_{\tan}(t) = 0$ c'est à dire pour $t = -\tan t_0$, et en ce point, on a $y_{\tan}(-\tan t_0) = \ln\tan\frac{t_0}{2}$. La distance entre ce point de coordonnées $(0, \ln\tan\frac{t_0}{2})$ et $M(t_0) = (\sin t_0, \cos t_0 + \ln\tan\frac{t_0}{2})$ vaut donc $\sqrt{\sin^2 t_0 + \cos^2 t_0} = 1$.

Exercice 2

1. Rappelons que $\tan(u)$ est défini pour $u \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$. Donc ici $\tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$ est défini pour $\frac{2\theta}{3} \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$ soit (on divise par 2 et on multiplie par 3, dans le modulo aussi) $\theta \neq \frac{3\pi}{4} \mod \frac{3\pi}{2}$. On voit aussi que $r(\theta + 2\pi k) = \tan\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{4\pi k}{3}\right)$. Comme la fonction tangente est périodique de période π, ceci est égal à $r(\theta)$ si $\frac{4\pi k}{3}$ est un multiple entier de π. Alors en essayant $k = 1$ puis $k = 2$ on trouve que la plus petite valeur possible est $k = 3$. Cela signifie que le point qu'on trace de coordonnées polaires $(\theta, r(\theta))$ revient sur lui-même après avoir tourné de 6π.

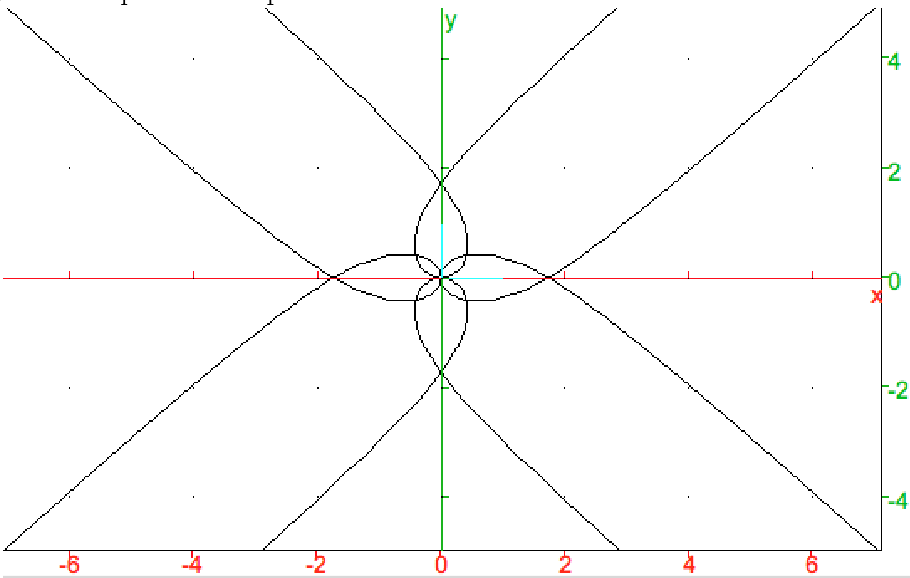
2. On vient de voir qu'on peut se restreindre à un intervalle de longueur 6π. Comme l'énoncé le suggère, $r\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{2\theta}{3} + \pi\right) = \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right) = r(\theta)$ à cause de la périodicité de tan. Or le point de coordonnées polaires $\left(\theta + \frac{3\pi}{2}, r\right)$ est obtenu à partir du point (θ, r) par une simple rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Cela signifie qu'une fois tracée la courbe sur un intervalle de longueur $\frac{3\pi}{2}$ le reste de la courbe est obtenu par des rotations d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Il nous faut alors compter combien d'intervalles de longueur $\frac{3\pi}{2}$ sont nécessaires pour remplir un intervalle de longueur 6π, et c'est 4. Ainsi, après avoir tracé un morceau, trois rotations seront nécessaires pour obtenir tout le reste de la courbe.

3. On a vu qu'on pouvait réduire l'étude à un intervalle de longueur $\frac{3\pi}{2}$, on choisit un intervalle symétrique. À cause de la question 1, $r(\theta)$ n'est pas définie en $-\frac{3\pi}{4}$ ni en $\frac{3\pi}{4}$. L'intervalle qu'on choisit est donc $]-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$. Puis on s'intéresse à $r(-\theta)$. Or $r(-\theta) = \tan\left(-\frac{2\theta}{3}\right) = -\tan\left(\frac{2\theta}{3}\right) = -r(\theta)$. Géométriquement, le point de coordonnées polaires $(-\theta, -r)$ est obtenu à partir du point de coordonnées polaires (θ, r) par une symétrie par rapport à l'axe vertical (qui est la composée de la symétrie d'axe horizontale, correspondant à changer θ en $-\theta$, et de la symétrie centrale de centre 0, correspondant à changer r en $-r$). On peut donc réduire l'étude à l'intervalle $[0, \frac{3\pi}{4}[$: quand θ parcourt cet intervalle, $-\theta$ parcourt $]-\frac{3\pi}{4}, 0]$ et la courbe sur $]-\frac{3\pi}{4}, 0]$ est obtenue à partir de la courbe sur $[0, \frac{3\pi}{4}[$ par une symétrie d'axe vertical.

4. D'abord on calcule $r'(\theta) = \frac{2}{3}\left(1 + \tan^2\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right) > 0$. La fonction r est donc strictement croissante. Il est aussi utile d'étudier son signe et quelques valeurs particulières. Or $r(0) = 0$ donc $r(\theta) > 0$ pour $\theta > 0$ (toujours sous-entendu, dans notre intervalle d'étude) et, quand $\theta \to \frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\theta}{3} \to \frac{\pi}{2}$ donc $r(\theta) \to +\infty$.

5. On vient de le dire, il y a une branche infinie dans la direction $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$. Pour étudier plus précisément l'asymptote on se place dans le repère mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en θ_0. Un point de coordonnées polaires (θ, r) a des coordonnées cartésiennes (X, Y) dans ce repère mobile données par $X = r\cos(\theta - \theta_0)$ et $Y = r\sin(\theta - \theta_0)$. Alors quand $\theta \to \theta_0$, comme c'est une valeur pour laquelle $r(\theta) \to +\infty$, on voit que $X \to +\infty$ et il faut étudier la limite de Y pour connaître précisément s'il y a une asymptote et son équation dans le repère mobile. Ici la quantité à étudier est donc la limite en $\frac{3\pi}{4}$ de $\tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)$ (c'est toujours, a priori, une forme indeterminée puisque θ_0 est une valeur pour laquelle $r(\theta)$ tend vers l'infini et $\sin(\theta - \theta_0)$ tend vers 0).
On suit l'indication de l'énoncé de poser $u = \theta - \frac{3\pi}{4}$, ce qui est équivalent à écrire $\theta = u + \frac{3\pi}{4}$, et θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$ si et seulement si u tend vers 0. On réécrit alors : $\tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{2u}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\sin(u)$. On utilise ensuite la formule démontrée dans l'exercice 0, qui donne $\tan\left(\frac{2u}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\left(\frac{2u}{3}\right)}$, puis on remplace tan par $\frac{\sin}{\cos}$ ce qui donne $\tan\left(\frac{2u}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\sin(u) = -\frac{\cos\left(\frac{2u}{3}\right)}{\sin\left(\frac{2u}{3}\right)}\sin(u)$. Le terme $\cos\left(\frac{2u}{3}\right)$ tend vers 1 quand $u \to 0$ et on met aussi de côté le signe $-$ alors pour le terme restant on peut écrire $\frac{\sin(u)}{\sin\left(\frac{2u}{3}\right)} = \frac{3}{2} \times \frac{\sin(u)}{u} \times \frac{\frac{2u}{3}}{\sin\left(\frac{2u}{3}\right)}$ et la limite de ceci quand $u \to 0$ est $\frac{3}{2}$ car on utilise deux fois que $\frac{\sin(h)}{h} \to 1$ quand $h \to 0$, une fois avec $h = u$ et une fois avec $h = \frac{2u}{3}$. Si on est à l'aise avec les développements limités et les équivalents on peut aussi écrire directement $\sin(u) \sim u$ et $\sin\left(\frac{2u}{3}\right) \sim \frac{2u}{3}$, qui donne $\frac{\sin(u)}{\sin\left(\frac{2u}{3}\right)} \sim \frac{u}{\frac{2u}{3}} = \frac{3}{2}$. Mis bout à bout la limite de $\tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)$ en $\theta \to \frac{3\pi}{4}$ est donc $-\frac{3}{2}$.
On conclut alors que l'asymptote a pour équation cartésienne $Y = -\frac{3}{2}$ dans le repère mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en $\frac{3\pi}{4}$.

6. Pour la tangente en 0 il suffit décrire le vecteur vitesse $\vec{v}(\theta) = r'(\theta)\vec{e}_r + r(\theta)\vec{e}_\theta$ qui donne tout simplement $\vec{v}(0) = \frac{2}{3}\vec{e}_r$ en gardant en tête qu'en $\theta = 0$ le vecteur $\vec{e}_r$ est le vecteur de la base fixe $\vec{e}_x$. C'est donc une tangente horizontale, portée par un vecteur vitesse dirigé vers la droite.
Il n'est pas inutile de calculer la valeur $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \approx 1.7$, c'est là où la courbe doit couper l'axe des ordonnées.
Cela suffit alors pour tracer la courbe sur notre intervalle d'étude : on place soigneusement la tangente en 0, le point correspondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'asymptote, et il y a une seule façon simple de relier ces informations. On n'oublie pas de faire apparaître que cela correspond à la courbe sur l'intervalle $[0, \frac{3\pi}{4}[$, en indiquant le sens de parcours quand θ croît.
Ensuite on utilise les symétries déterminées dans les questions 1 et 2. Par une symétrie verticale, on obtient la courbe sur $]-\frac{3\pi}{4}, 0]$. Par une première rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ de la courbe qu'on a tracé jusque là sur $]-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$ on obtient la courbe sur $]-\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}[=]\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}[$. Par une deuxième rotation, on obtient la courbe sur $]\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}[=]\frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}[$. Enfin par une troisième rotation on obtient la courbe sur $]\frac{9\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}, \frac{15\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}[=]\frac{15\pi}{4}, \frac{21\pi}{4}[$. On a bien balayé tout l'intervalle de $-\frac{3\pi}{4}$ à $\frac{21\pi}{4}$ ce qui est un intervalle de longueur 6π comme promis à la question 1.



7. D'abord $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset]-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$, c'est donc une portion de courbe sur le premier morceau qu'on a tracé. Il suffit alors de vérifier que les points de paramètre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ sont les mêmes. Or précisément par l'étude des symétries $r\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -r\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et les points de coordonnée polaire $\left(-\frac{\pi}{2}, -r\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, r\right)$ sont égaux.
On doit alors exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(\theta)$, puis sa norme $v(\theta) = \|\vec{v}(\theta)\|$, et la longueur de la courbe sera $L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v(\theta)\, d\theta$. Ici $\vec{v}(\theta) = r'(\theta)\vec{e}_r + r(\theta)\vec{e}_\theta = \frac{2}{3}\left(1 + \tan^2\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right)\vec{e}_r + \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)\vec{e}_\theta$. La norme est donnée par $v(\theta) = \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}$ soit ici

$$v(\theta) = \sqrt{\frac{4}{9}\left(1 + \tan^2\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right)^2 + \tan^2\left(\frac{2\theta}{3}\right)}$$

et la longueur est donc

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{4}{9}\left(1 + \tan^2\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right)^2 + \tan^2\left(\frac{2\theta}{3}\right)}\, d\theta.$$

Inutile de chercher à simplifier cette intégrale. La calculatrice ou Xcas donne $L \approx 4,088$.