Université Grenoble Alpes Année 2017-2018
Module MAT 307

CC1 : examen partiel du 26 octobre 2017

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée. Calculatrices autorisées

Le barème est donné à titre indicatif.

Durée 2h

NB : dans les tracés de courbes, on fera apparaître le sens de parcours, les valeurs correspondantes pour t, θ et les informations obtenues dans les questions précédentes.

Exercice 0–[*1 point*] En utilisant les formules trigonométriques sur le cosinus et sinus, montrer que $\tan(\frac{\pi}{2} + u) = -1/\tan u$.

Exercice 1 (*Tractrice*)–[*9 points*]
On considère la courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = \left(\sin(t), \cos(t) + \ln \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.

1. Après avoir étudié la périodicité, donner le domaine de définition sur une période.
2. Après avoir relié $y(\pi - t), x(\pi - t)$ à $y(t)$ et $x(t)$, réduire l'intervalle d'étude à $]0, \pi/2]$.
3. Calculer la dérivée de $x(t)$ et celle de $y(t)$. Donner le tableau de variations conjoint. *(Indication : vérifier que la derivée de* $\ln(\tan(t/2))$ *vaut* $1/\sin(t)$*)*
4. Étudier les asymptotes éventuelles.
5. Déterminer les points singuliers éventuels et les tangentes en ces points. (BONUS : déterminer la nature des points singuliers à l'aide de la caculatrice)
6. Tracer l'allure de la courbe sur tout son ensemble de définition.
7. En tout point t, donner le répère de Frénet, la courbure, le rayon de courbure et le centre du cercle osculateur. Pour $t = \pi/3$, donner les valeurs exactes pour le rayon et le centre du cercle, et rajouter le cercle sur l'allure de la courbe.
8. Démontrer que, sur la droite tangente à la courbe en un point, la longueur du segment entre ce point et l'intersection de la tangente avec l'axe des ordonnées y est toujours 1.

Exercice 2 – [*10 points*]
On considère la courbe paramétrée en polaire $r(\theta) = \tan \frac{2\theta}{3}$.

1. Donner le domaine de définition. Quel est l'entier k le plus petit possible tel que r soit $2\pi k$ périodique ?
2. En notant que $r(\theta + 3\pi/2) = r(\theta)$, en déduire qu'il suffit d'étudier sur un intervalle de longueur $3\pi/2$, puis donner le nombre de rotation qu'il faut faire pour avoir la courbe pour tout θ.
3. Par un argument de symétrie, réduire l'intervalle d'étude à $[0, 3\pi/4[$.
4. Donner le tableau de variations.
5. Étudier la branche infinie. *(Indication : on pourra faire le changement de variable* $u = \theta - \frac{3\pi}{4}$*)*
6. Donner la direction de la tangente en $\theta = 0$ puis tracer la courbe.
7. Remarquer que la courbe décrit une boucle fermée entre les paramètres $\theta_0 = -\pi/2$ et $\theta_1 = \pi/2$. Exprimer la longueur de cette boucle sous la forme d'une intégrale. Avec la calculatrice, donner une valeur approchée de cette longueur.