Corrigé CC1 - Novembre 2020

Exercice 1 –[*9 points*]

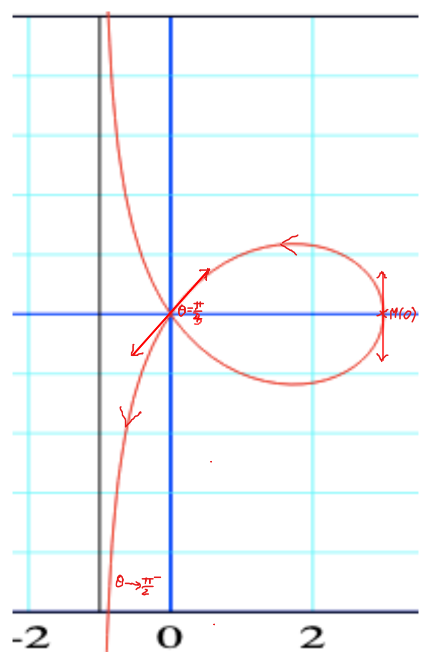
1. La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. La fonction étant 2π périodique, il suffit d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur 2π, comme $[-\pi, \pi] \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}$. Vu que $r(-\theta) = r(\theta)$ il suffit d'étudier la courbe sur $[0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ puis de faire une symétrie d'axe (Ox). De plus, $r(\pi - \theta) = -r(\theta)$, ce qui nous permet de réduire l'intervalle d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}[$ puis de faire une symétrie d'axe (Ox).

2. On calcule
$$r(\theta)\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \Big(4\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\Big)(-\cos\theta) = -4\cos^2\theta + 1 \to 1 \text{ quand } \theta \to \frac{\pi}{2}$$
ce qui implique que nous avons une asymptote d'équation $Y = 1$ dans le repère tourné de $\frac{\pi}{2}$ (c'est à dire une asymptote verticale d'équation $x = -1$).

3. Sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, On calcule
$$r'(\theta) = -4\sin\theta - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = -\sin\theta\Big(4 + \frac{1}{\cos^2\theta}\Big) \leq 0$$
et qui ne s'annule qu'en 0.
Tableau de variations

θ	0		$\frac{\pi}{2}$
$r'(\theta)$	0	$-$	
$r(\theta)$	3	$\searrow$	$-\infty$

On remarque que r s'annule en $\frac{\pi}{3}$ (seul angle tel que $\cos^2\theta = 1/4$).
La tangente est portée par $\vec{e}_\theta$ en 0 et par $\vec{e}_r$ en $\frac{\pi}{3}$.
Il n'y a pas de point singulier (car r et r' ne s'annule pas en même temps).



4. Avec la commande simplify, la calculatrice obtient $r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta) = 24(\tan^2(\theta) + 1)$ ce qui est toujours positif. La courbe ne change donc pas de convexité.

5. La longueur est
$$\ell = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 1)^2 + \sin^2\theta(4\cos^2\theta + 1)^2}}{\cos^2\theta}\, d\theta \approx 8,24$$
où on a mis comme bornes $\pm 1.0 * \pi/3$ (on obtient 8,10 avec les bornes $\pm 0.33\pi$).

6. En utilisant le théorème de Green-Riemann avec la forme différentielle xdy, on obtient
$$\mathcal{A} = \iint_U 1\, dxdy = \int_\gamma xdy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} r(\theta)\cos\theta\Big(r(\theta)\cos\theta + r'(\theta)\sin\theta\Big)\, d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2\theta - 1)\Big(4\cos^2\theta - 1 - 4\sin^2\theta - \tan^2\theta\Big)\, d\theta \approx 5,20 \quad \text{(5,22 si les bornes } \pm 0.33\pi\text{)}.$$

Exercice 2– [*14 points*]

1. La courbe paramétrée est définie sur $\mathbb{R}$. Comme elle est 2π-périodique, il suffit d'étudier la courbe sur $[-\pi, \pi]$. Vu que $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, il est possible de restreindre l'étude à $[0, \pi]$ puis de faire une symétrie d'axe (Oy). Enfin, $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ nous permet de définir l'intervalle d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis nous obtiendrons la courbe entière par une symétrie d'axe (Ox) suivie d'une symétrie d'axe (Oy).

2. Nous dérivons $x(t) = -4\sin^3 t + 9\sin t$

$$x'(t) = -12\sin^2 t\cos t + 9\cos t = 12\cos^3 t - 3\cos t = 12\cos t(\cos t - \tfrac{1}{2})(\cos t + \tfrac{1}{2})$$

qui ne s'annule (sur $[0, \frac{\pi}{2}]$) qu'en $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. On dérive ensuite $y(t) = -4\cos^3 t + 3\cos t$

$$y'(t) = -12\cos^2 t(-\sin t) - 3\sin t = \sin t(12\cos^2 t - 3) = 12\sin t(\cos t - \tfrac{1}{2})(\cos t + \tfrac{1}{2})$$

ne s'annule (sur $[0, \frac{\pi}{2}]$) qu'en 0 et $\frac{\pi}{3}$. L'unique point singulier sur $[0, \pi/2]$ est donc en $\frac{\pi}{3}$.

Nous réécrivons $y'(t) = 12\cos^2 t\sin t - 3\sin t = -12\sin^3 t + 9\sin t$ et nous procédons de même pour les dérivées supérieures :

$$\begin{aligned}
x''(t) &= -36\cos^2 t\sin t + 3\sin t = 36\sin^3 t - 33\sin t\\
x'''(t) &= 108\sin^2 t\cos t - 33\cos t = -108\cos^3 t + 75\cos t\\
y''(t) &= -36\sin^2 t\cos t + 9\cos t = 36\cos^3 t - 27\cos t\\
y'''(t) &= -108\cos^2 t\sin t + 27\sin t = 108\sin^3 t - 81\sin t
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
&x''(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(36\tfrac{3}{4} - 33) = -3\sqrt{3} \qquad && x'''(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}(-108\tfrac{1}{4} + 75) = 24\\
&y''(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}(36\tfrac{1}{4} - 27) = -9 && y'''(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(108\tfrac{3}{4} - 81) = 0
\end{aligned}$$

Par les formules de Taylor, ceci se réécrit

$$M(t) = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}(t - \tfrac{\pi}{3})^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}(t - \tfrac{\pi}{3})^3 + o((t - \tfrac{\pi}{3})^3).$$

Autre méthode : par développement limité. En posant, $u = t - \frac{\pi}{3}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
x(t) &= (4\cos^2(u + \tfrac{\pi}{3}) + 5)\sin(u + \tfrac{\pi}{3}) = \Big(4(\tfrac{1}{2}\cos u - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin u)^2 + 5\Big)(\tfrac{1}{2}\sin u + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos u)\\
&= (\cos^2 u - 2\sqrt{3}\cos u\sin u + 3\sin^2 u + 5)\tfrac{1}{2}(\sin u + \sqrt{3}\cos u) = (-\sqrt{3}\sin 2u + 2\sin^2 u + 6)\tfrac{1}{2}(\sin u + \sqrt{3}\cos u)\\
&= (-\sqrt{3}u + \sqrt{3}\tfrac{2}{3}u^3 + u^2 + 3 + o(u^3))(\sqrt{3} + u - \tfrac{\sqrt{3}}{2}u^2 - \tfrac{1}{6}u^3 + o(u^3))\\
&= 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}u^2 + 4u^3 + o(u^3).
\end{aligned}$$

De même, nous calculons

$$\begin{aligned}
y(t) &= (4\sin^2(u + \tfrac{\pi}{3}) - 1)\cos(u + \tfrac{\pi}{3}) = \Big(4(\tfrac{1}{2}\sin u + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos u)^2 - 1\Big)(\tfrac{1}{2}\cos u - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin u)\\
&= (\sin^2 u + 2\sqrt{3}\sin u\cos u + 3\cos^2 u - 1)\tfrac{1}{2}(\cos u - \sqrt{3}\sin u) = \cos u(\sqrt{3}\sin u + \cos u)(\cos u - \sqrt{3}\sin u)\\
&= \cos u(\cos^2 u - 3\sin^2 u) = \cos u(1 - 4\sin^2 u) = (1 - \tfrac{1}{2}u^2 + o(u^2))(1 - 4u^2 + o(u^3))\\
&= 1 - \frac{9}{2}u^2 + o(u^3).
\end{aligned}$$

Ceci se re-écrit

$$M(t) = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}(t - \tfrac{\pi}{3})^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}(t - \tfrac{\pi}{3})^3 + o((t - \tfrac{\pi}{3})^3)$$

Une troisième possibilité consiste à linéariser $\cos^3 t$ et $\sin^3 t$ pour simplifier les expressions $x(t) = \sin(3t) + 3\sin t$ et $y(t) = -\cos(3t)$. Il est alors possible d'utiliser de manière plus simple la formule de Taylor ou les développements limités.

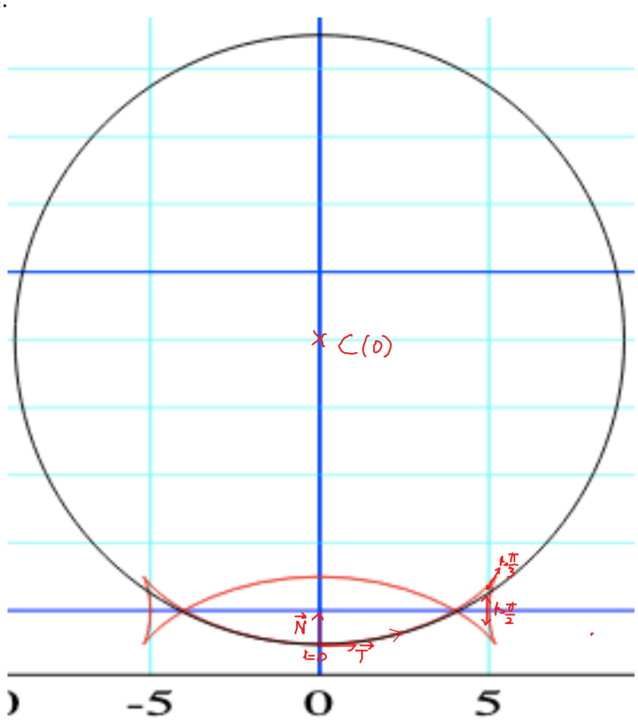
Ce développement donne $p = 2$ et $q = 3$. Nous avons donc un point de rebroussement de première espèce de vecteur tangent $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

3. Vu notre formule pour $x'(t)$ et $y'(t)$ il est clair que nous avons le tableau de variations suivant

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	5
$y(t)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	

Nous remarquons que nous avons une tangente horizontale en $t = 0$ et une tangente verticale en $t = \frac{\pi}{2}$.

4.



5. Vu que $y'(0) = 0$ et que $x'(0) > 0$ il est clair que $\vec{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Vu le vecteur normal $a_N(0) = y''(0) = \sin 0(\dots) + \cos 0(12\cos 0 - 3) = 9$.
On a de plus $\|\vec{v}(0)\| = |x'(0)| = 9$. Donc $R = \frac{\|\vec{v}(0)\|^2}{a_N(0)} = 9$ et $C(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.