Université Grenoble Alpes Année 2020-2021

Module MAT 307

Contrôle continu du 13 Novembre 2020

Une feuille A4 recto-verso <u>*manuscrite*</u> *est autorisée. Calculatrices autorisées*

Le barème est donné à titre indicatif.

Durée 2h

NB : dans les représentations graphiques, il faudra indiquer le sens de parcours, les tangentes remarquables (horizontales/verticales/points singuliers pour les courbes paramétrées, ou portées par $\vec{e}_r/\vec{e}_\theta$ pour les courbes polaires) et quelques points remarquables (avec le t ou θ associé).

Exercice 1 –[*9 points*]

On considère la courbe polaire d'équation $r(\theta) = 4\cos(\theta) - \dfrac{1}{\cos(\theta)}$.

1. Déterminer le domaine de définition et démontrer qu'on peut limiter l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2[$.
2. Étudier la branche infinie.
3. Etudier les variations de r et tracer la courbe. Y a t-il des points singuliers ?
4. A l'aide de la calculatrice, étudier le changement de convexité.
5. Donner la longueur de la boucle en fonction d'une intégrale. Donner en une valeur approchée à l'aide de la calculatrice (pour les bornes, on pourra remplacer 1/4 par 0.25).
6. En utilisant qu'une courbe polaire peut être vue comme une courbe paramétrique $t \to (x(t), y(t))$, écrivez l'aire de la boucle sous la forme d'une intégrale. Donner en une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

Exercice 2– [*14 points*]

Soit M la courbe parametrée par

$$M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4\cos^2(t) + 5)\sin(t) \\ (4\sin^2(t) - 1)\cos(t) \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que le domaine d'étude peut etre réduit aux point de parametres $t \in [0, \pi/2]$.
2. Trouver le seul point singulier pour $t \in [0, \pi/2]$. Déterminer sa nature et tangente en ce point.
(Indication : il est ici plus simple d'utiliser la formule de Taylor en ramenant le calcul des dérivées successives sous la forme $a\cos^3 t + b\cos t$ ou $a\sin^3 t + b\sin t$
Une autre possibilité consiste à simplifier $x(t)$ et $y(t)$ en linéarisant $\sin^3 t$ et $\cos^3 t$, puis d'utiliser les formules de Taylor ou les développements limités.)
3. Donner le tableau de variations pour $t \in [0, \pi/2]$.
4. Tracer la courbe M sur son ensemble de définition.
5. Déterminer le repère de Frenet au point $t = 0$ et rajouter le sur le tracé de la courbe.
6. Donner le cercle osculateur au point $t = 0$ et rajouter le sur le tracé de la courbe.