Corrigé contrôle continu du 24 Octobre 2019

Exercice 1

1. On calcule $x'(t) = -t(t^2 - 5t + 4)e^{-t} = -t(t-1)(t-4)e^{-t}$ et $y'(t) = -t^2(t-3)e^{-t}$, ce qui nous permet de conclure qu'il y a un point singulier en $t = 0$. En utilisant le développement limité d'exponentiel au voisinage de zéro, on trouve $(x(t), y(t)) = (-2, 0)t^2 + (3, 1)t^3 + o(t^3)$. Comme $(3, 1)$ n'est pas colinéaire à $(-2, 0)$, nous obtenons $p = 2$ et $q = 3$, ce qui implique que nous avons un point de rebroussement de 1ere espèce de vecteur tangent $(-2, 0)$.

2. Du calcul des dérivées, on trouve

t	$-\infty$		0		1		3		4		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0		$+$		0	$-$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-e^{-1} \approx -0.37$	$\nearrow$	$9e^{-3} \approx 0.45$	$\nearrow$	$32e^{-4} \approx 0.59$	$\searrow$	0
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e^{-1} \approx 0.37$	$\nearrow$	$27e^{-3} \approx 1.34$	$\searrow$	$64e^{-4} \approx 1.17$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0		$+$		0		$-$		

3. Comme $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$, on calcule $\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{1-2t^{-1}} = 1$. On remarque ensuite que $\lim_{t\to-\infty} y(t) - x(t) = \lim_{t\to-\infty} 2t^2e^{-t} = +\infty$, on a donc une branche parabolique de direction $y = x$.

4. On a $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ et la courbe converge vers l'origine. Comme $y(t)/x(t) = \frac{1}{1-2t^{-1}}$ converge vers 1 en $+\infty$, on en déduit que la courbe va à l'origine avec pour tangente la droite $y = x$.

5.

6. La longueur est $\displaystyle\int_0^{t_0} te^{-t}\sqrt{(t-1)^2(t-4)^2 + t^2(t-3)^2}dt$, ce qui vaut à peu près 2.52 pour $t_0 = 5$; 3.45 pour $t_0 = 10$; 3.51 pour $t_0 = 20$ et $t_0 = 100$.

7. On calcule $\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 4e^{-2} \\ 4e^{-2} \end{pmatrix}$ d'où $\vec{T}(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{N}(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On calcule de plus $\vec{a}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4e^{-2} \end{pmatrix}$ ce qui donne $a_N(2) = \vec{a}(2)\cdot\vec{N}(2) = -2\sqrt{2}e^{-2}$ et donc un rayon signé $R = \frac{\|\vec{v}(2)\|^2}{a_N(2)} = -8\sqrt{2}e^{-2}$. On calcule finalement $C = M(2) + R\vec{N}(2) = \begin{pmatrix} 8e^{-2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Le cercle osculateur est donc le cercle de centre C et de rayon $8\sqrt{2}e^{-2}$ (et qui passe par $M(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8e^{-2} \end{pmatrix}$). On note que $8e^{-2} \approx 1.08$.

Exercice 2

1. La fonction r est 2π périodique et paire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0,\pi]$ puis de faire une symétrie par rapport à l'axe (Ox) pour avoir la courbe entière.

2. On calcule $r'(\theta) = -3\cos^2\theta\sin\theta \leq 0$ sur $[0,\pi]$, ce qui ne s'annule qu'en $0, \pi/2, \pi$. La fonction r ne s'annule qu'en π et on conclut que l'on a un seul point singulier, en $\theta = \pi$.

3. En $\theta = 0$, $r'(0) = 0$ et $r(0) \neq 0$: la tangente est donc de direction $\vec{e}_\theta(0) = (0,1)$, c-a-d que l'on a une tangente verticale.

   En $\theta = \pi$, $r'(0) = r(0) = 0$: on a un point singulier et la tangente est donc de direction $\vec{e}_r(\pi) = (-1,0)$, c-a-d que l'on a une tangente horizontale. Comme r est toujours positif, nous avons un point de rebroussement de 1ere espèce.

4. Nous observons qu'entre 0 et π, la courbe ne change que deux fois de signe : en $\theta_1 \approx 1.05$ et $\theta_2 \approx 1.4$. En calculant $\pi/3 \approx 1.04$ et $\pi/2 \approx 1.57$, on se doute que θ_1 est peut être égal à $\pi/3$. Et en effet, on vérifie que la fonction s'annule en $\pi/3$. On conclut donc que la courbe change deux fois de convexité : en $\pi/3$ et $\theta_2 \approx 1.4 \in]\pi/3, \pi/2[$. Si on demande à la calculatrice de résoudre $F(\theta) = 0$, elle trouve $\pi/3$, 1.39 et π (mais la fonction de change pas de signe en π).

5.