Université Grenoble Alpes Année 2019-2020

Module MAT 307

Contrôle continu du 24 Octobre 2019

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée. Calculatrices autorisées

Le barème est donné à titre indicatif.

Durée 2h

Exercice 1– [*12 points*]

On considère la courbe paramétrée Γ définie par $M(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = (-2t^2 + t^3)e^{-t}$, $y(t) = t^3 e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$, déterminer les points singuliers de Γ, leurs natures et la tangente en ces points.
2. Donner le tableau de variation de $x(t)$ et $y(t)$.
3. Etudier la branche infinie en $-\infty$.
4. Montrer que la courbe Γ converge en $+\infty$ vers un point. En étudiant la pente $\frac{y(t)}{x(t)}$, montrer que cette convergence se fait tangentiellement à une droite qu'on déterminera.
5. Tracer la courbe Γ.
6. Pour $t_0 > 0$, déterminer la longueur de l'arc de courbe entre les points de paramètre $t = 0$ et $t = t_0$ sous la forme d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à simplifier. En donner une valeur approchée pour $t_0 = 5$, $t_0 = 10$, $t_0 = 20$ et $t_0 = 100$.
7. Calculer le cercle osculateur au point de paramètre $t = 2$ (centre et rayon). Rajouter son tracé sur la courbe.

Exercice 2 –[*8 points*]

Dans cet exercice, on étudie la courbe Γ définie par l'équation polaire :

$$r(\theta) = 1 + (\cos(\theta))^3.$$

1. Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\theta \in [0, \pi]$.
2. Déterminer les points singuliers de Γ et donner le tableau de variation de r.
3. Déterminer la direction de la tangente en $\theta = 0$ et en $\theta = \pi$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner l'allure du graphe de la fonction $\theta \mapsto r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)$. En déduire le nombre de point d'inflexion de la courbe et donner une valeur approchée des angles θ correspondants (à comparer avec $\pi/3$ et $\pi/2$).
5. Tracer la courbe Γ en indiquant le sens de parcours et en mettant en évidence les points d'inflexion étudiés à la question précédente.