Université Grenoble Alpes Année 2018-2019
Module MAT 307

Examen terminal du 26 Juin 2019

Une feuille A4 recto-verso <u>manuscrite</u> est autorisée. Calculatrices autorisées

Le barème est donné à titre indicatif.

Durée 2h

Exercice 1– [*12 points*] Pour a, b deux réels fixés strictement positifs, on considère la courbe suivante

$$\begin{cases} x(t) &= 2t + \dfrac{a}{t^2} \\ \\ y(t) &= t^2 + \dfrac{2b}{t} \end{cases}$$

1. Donner les domaines de définition et d'étude, puis étudier les branches infinies.
2. Déterminer une condition sur a et b telle que la courbe possède un point de rebroussement. Dans ce cas, déterminer la nature du point de rebroussement (*Indication : on pourra calculer les dérivées* $x^{(k)}$ *et* $y^{(k)}$ *pour quelques* $k \in \mathbb{N}$).

   Pour les questions suivantes, on supposera que $a = b = 2$.
3. Donner le tableau de variation, étudier les changements de convexité, puis tracer la courbe (avec le sens de parcours).
4. Calculer et tracer le repère de Frénet et le cercle osculateur au point de paramètre $t = 1$.
5. Donner l'expression de la longueur de l'arc entre les paramètres $t = 2$ et $t = 2.5$, puis en donner une valeur approchée en utilisant la calculatrice.

Exercice 2 (*Système proie-prédateur*)–[*8 points*]

Sur $]0; +\infty[$, on considère que les populations des proies $x(t)$ et des prédateurs $y(t)$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t) \end{cases}$$

où $a, b, c, d > 0$ sont fixés.

1. Montrer qu'il n'y a que deux solutions stationnaires : $(x, y) = (0, 0)$ et $(x, y) = \left(\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{b}\right)$.
2. *Etude du linéarisé autour de la première solution stationnaire*

   On considère le système suivant

   $$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ y'(t) = -dy(t) \end{cases}$$

   avec $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

   Résoudre ce système et donner le comportement de $(x(t), y(t))$ quand $t \to \infty$.

---

3. *Etude du linéarisé autour de la seconde solution stationnaire*
   (a) En posant $X(t) = x(t) - \frac{d}{c}$ et $Y(t) = y(t) - \frac{a}{b}$, donner le système vérifié par $X(t), Y(t)$.
   (b) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ pour $\alpha, \beta > 0$ fixé.
   (c) Résoudre $Z'(t) + AZ(t) = 0$ avec $Z(0) = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$.
   (d) Donner le comportement de $x(t)$ et $y(t)$ quand $t \to \infty$.