Examen du 29 juin 2017, de 7h30 à 9h30

Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisés. Autres documents et portables interdits.

Ce sujet comporte deux pages. Le barème est indicatif.

1. Courbe en paramétriques (12 points)

Cet exercice est consacré à l'étude de la courbe

$$x(t) = \cos(t)^3 - \cos(t), \quad y(t) = \sin(t)^3 + \sin(t)$$

(1) Donner le domaine de définition commun de x et y. Montrer qu'on peut restreindre le domaine d'étude à $[0, \pi/2]$ grâce aux symétries de la courbe que l'on justifiera.

(2) Calculer dx/dt et dy/dt. La courbe admet-elle des points singuliers ? Si oui, déterminer la tangente à la courbe en ces points.

(3) Déterminer le signe de dx/dt et dy/dt sur $[0, \pi/2]$. Dresser le double tableau de variations et représenter l'allure de la courbe en indiquant les points de paramètres $0, \pi/2, \pi$ et le sens de parcours.

(4) Déterminer la longueur de l'arc de courbe entre les points de paramètre $t = 0$ et $t = \pi/2$ sous la forme d'une intégrale dont on ne cherchera pas à déterminer la valeur exacte. Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de cette longueur, vérifier la vraissemblance du résultat sur votre représentation graphique. En déduire la longueur totale de la courbe.

(5) Déterminer le repère de Frenet, la courbure et le cercle osculateur au point de paramètre $t = \pi/4$, tracer le cercle sur votre représentation graphique.

(6) Exprimer l'aire située à l'intérieur de l'arc de courbe entre les points de paramètre 0 et π à l'aide d'une intégrale curviligne puis d'une intégrale. Déterminer la valeur de cette intégrale à la calculatrice en indiquant la commande utilisée. Vérifier la vraissemblance du résultat sur votre représentation graphique.

2. Équation différentielle (11 points)

On étudie dans cet exercice pour λ un paramètre réel l'équation différentielle d'inconnue la fonction $y(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = y^3 - \lambda y$$

(1) Quel est le type de cette équation différentielle ?

(2) Déterminez les solutions stationnaires de cette équation différentielle, on discutera en fonction de λ.

(3) Résoudre l'équation différentielle pour $\lambda = 0$. Les solutions sont-elles bornées ?
On suppose dans la suite que $\lambda \neq 0$

(4) On suppose que $y(0)$ est proche de 0. Lorsque t est proche de 0, on s'attend à ce que y^3 soit négligeable devant y.
Quelle est la solution générale de $\frac{dy}{dt} = -\lambda y$?
Discuter en fonction de λ si la solution se rapproche de 0 (équilibre stable) ou s'éloigne de 0 (équilibre instable) lorsque t augmente.

(5) On suppose dans cette question que $\lambda > 0$ et que $y(0) \in [-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]$.
Montrer sans calculer explicitement la solution que $y(t)$ reste bornée.
Conjecturer l'allure du graphe lorsque la condition initiale $y(0)$ est positive et proche de 0 (représenter l'allure sur la copie).

(6) On suppose dans cette question que $y(0) > 0$.
Montrer que $y(t) > 0$ pour tout t.
En déduire le sens de variations de y lorsque $\lambda < 0$.
La solution est-elle bornée pour $t > 0$?
Conjecturer l'allure du graphe lorsque la condition initiale $y(0)$ est positive et proche de 0 (représenter l'allure sur la copie).

(7) On suppose $\lambda > 0$ et $0 < y(0) < \sqrt{\lambda}$. Résoudre l'équation différentielle.
Indications : on pourra déterminer à la calculatrice en donnant la commande utilisée :

$$\int \frac{1}{x^3 - \lambda x} \, dx$$

et on pourra exprimer $e^{2\lambda t}$ en fonction de y.