Examen du 6 janvier 2017, de 13h à 15h.
Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits.
Ce sujet comporte deux pages. Le barême est indicatif.

1 Forme différentielle (3 points)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la forme différentielle $\omega = (6x - \alpha y)dx + (-x + 2y)dy$.

1. **Déterminer la ou les valeurs de α pour lesquelles la forme ω est fermée.**

$$\omega = Mdx + Ndy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\alpha, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

la forme est fermée si ces 2 dérivées sont égales donc pour $\alpha = 1$

2. **Pour cette ou ces valeurs de α, la forme ω est-elle exacte ? Si oui, en donner un potentiel.**
La forme est définie sur $\mathbb{R}^2$ et fermée donc exacte.

$$M = \frac{\partial V}{\partial x} = 6x - y \Rightarrow V = 3x^2 - xy + f(y)$$

on remplace dans

$$N = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow -x + f'(y) = -x + 2y$$

donc $f(y) = y^2 + c$ et $V = 3x^2 - xy + y^2$ (pour $c = 0$).

3. **Pour la ou les valeurs de α pour lesquelles ω admet un potentiel, calculer l'intégrale curviligne**

$$\int_\gamma \omega, \quad \gamma(t) = (\frac{t}{t^2+1}, \frac{1}{t^2+1}), t \in [0,1]$$

Il suffit de calculer la différence de potentiel entre les deux extrémités, en $t = 0$ on a $(x,y) = (0,1)$ et en $t = 1$ on a $(x,y) = (1/2, 1/2)$ donc

$$V(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - V(0,1) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

2 Équation et système différentiel (7 points)

Pour $\alpha \leq 0$, on considère le système différentiel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+3 & 2 \\ -5 & \alpha-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{on pose } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

1. **Déterminer y en fonction de x et x' dans la première équation du système, en déduire que x est solution de**

$$x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2+1)x = 0 \quad (H)$$

On a $y = \frac{1}{2}x' - \frac{\alpha+3}{2}x$, on reporte dans la deuxième équation :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\alpha+3}{2}x\right) = -5x + (\alpha-3)\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\alpha+3}{2}x\right)$$

on multiple par 2 et on effectue :

$$x'' = (\alpha+3)x' - 10x + (\alpha-3)x' - (\alpha^2-9)x = 2\alpha x' - (\alpha^2+1)x$$

2. **Résoudre l'équation (H).**
L'équation caractéristique est

$$r^2 - 2\alpha r + (\alpha^2+1) = 0$$

discriminant -4, donc deux racines complexes conjuguées $r_\pm = \alpha \pm i$. La solution générale est donc

$$e^{\alpha t}(A\cos(t) + B\sin(t))$$

Décrire le comportement asymptotique des solutions $x(t)$ lorsque $t \to +\infty$ (on distinguera $\alpha = 0$ et $\alpha < 0$)
Les solutions tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$ si $\alpha < 0$ et sont périodiques de fréquence 1 si $\alpha = 0$.

3. **On ajoute un second membre $\cos(\omega t)$ à (H). Donner la forme attendue d'une solution particulière lorsque $\alpha = 0$, et discuter en fonction de ω si les solutions de l'équation avec second membre sont bornées.**
Si $\omega \neq 1$, on aura une solution particulière de la forme $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ donc périodique et la solution générale sera bornée, par contre si $\omega = 1$, il y a résonance, la solution particulière est de la forme $t(a\cos(t) + b\sin(t))$ et les solutions sont non bornées.
Que se passe-t-il si $\alpha < 0$?
Il ne peut pas y avoir résonance, on a une solution particulière de la forme $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ (régime permanent) et toutes les solutions s'en rapprochent exponentiellement vite.

4. **Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.**
Polynome caractéristique

$$(3-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - 9 + 10 = \lambda^2 + 1$$

les valeurs propres sont donc i et $-i$.

5. **En déduire la solution générale du système (on pourra observer que la matrice du système est $A + \alpha I_2$, on pourra laisser des exponentielles complexes).**
Les valeurs propres de $A + \alpha I_2$ sont donc $\alpha \pm i$. L'espace propre associé à $\alpha + i$ est donné par

$$(3-i)x + 2y = 0, \quad -5x + (-3-i)y = 0$$

donc engendré par $(-2,3-i)$, celui associé à $\alpha - i$ est conjugué. Donc la solution générale du système est donnée par

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3-i & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+ e^{(\alpha+i)t} \\ c_- e^{(\alpha-i)t} \end{pmatrix}$$

où $c_+ \in \mathbb{C}$ et $c_- = \overline{c_+}$.
Comment se comportent les solutions lorsque $t \to +\infty$?
Lorsque $\alpha < 0$, $e^{(\alpha \pm i)t}$ tend vers 0, les solutions tendent vers 0. Pour $\alpha = 0$, $e^{\pm it}$ est périodique de fréquence 1 donc les solutions du système homogène aussi.

3 Problème : durée des saisons (10 points)

On modélise l'orbite de la Terre autour du Soleil par une ellipse d'excentricité e et demi-grand axe $a = 1$ (quitte à changer l'unité de longueur), ellipse d'équations paramétriques

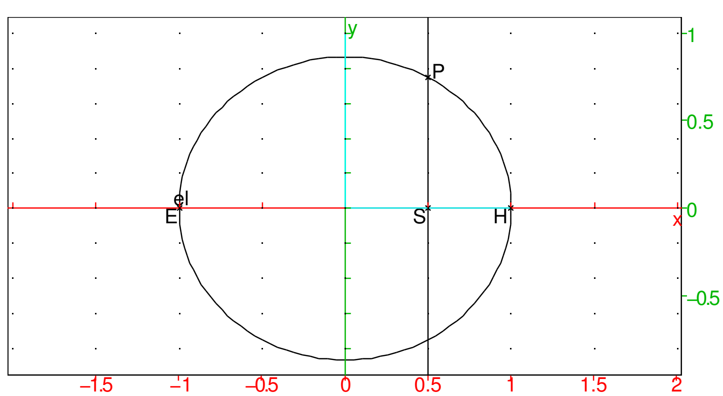
$$x(\tau) = \cos(\tau), \quad y(\tau) = \sqrt{1-e^2}\sin(\tau), \quad \tau \in [0, 2\pi]$$

dont le Soleil occupe un foyer $S(e,0)$.
Attention : τ n'est proportionnel au temps t qui s'écoule lorsque la Terre parcourt l'orbite. Attention sur certaines calculatrices il faut utiliser pour l'excentricité une autre lettre que `e` *qui vaut* `exp(1)`.

On suppose pour simplifier que la Terre occupe la position la plus proche du Soleil au solstice d'hiver de l'hémisphère Nord $H(1,0)$ et la plus éloignée du Soleil au solstice d'été $E(-1,0)$. On admettra que l'équinoxe de printemps se produit au point P de l'ellipse ayant la même abscisse que le Soleil, donc de paramètre τ tel que $x(\tau) = e$ et $y(\tau) > 0$ (l'automne correspondant à $y(\tau) < 0$).

1. **Dans cette question, on suppose $e = 0.5$. Faire une figure où vous représenterez l'ellipse (on ne demande pas d'en faire l'étude), les points S, H, P, E et le segment SP.**

```
ex:=0.5;b:=sqrt(1-ex^2); el:=ellipse(ex,-ex,1
);S:=point(ex,0); H:=point(1,0); E:=point
(-1,0); d:=line(x=ex);P:=inter(el,d,1);
```



2. **Déterminer le paramètre τ correspondant au point P en fonction de e, en déduire l'ordonnée y_P de P.**
On a $\cos(\tau) = e$ donc $\tau = \arccos(e)$ ($\tau \in [0, \pi/2]$ car $y_P > 0$) puis

$$y_P = \sqrt{1-e^2}\sin(\arccos(e)) = 1-e^2$$

3. **On veut calculer l'aire de la zone Z comprise entre SH, SP et l'arc d'ellipse HP. Hachurer Z sur votre figure. En utilisant le théorème de Green-Riemann (ou de Stokes), exprimer l'aire**

$$A = \iint_Z dx\, dy$$

à l'aide de l'intégrale curviligne de $\omega = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ sur le bord de Z.
Le bord de Z se décompose en 3 parties (dans le sens trigonométrique), le segment horizontal SH sur lequel la forme ω est nulle ($y = 0$ et $dy = 0$), l'arc d'ellipse HP sur lequel l'intégrale curviligne de ω vaut

$$\int_0^\tau \frac{1}{2}\cos(t)\sqrt{1-e^2}\cos(t) - \sin(t)\sqrt{1-e^2}(-\sin(t))\, dt = \int_0^\tau \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\tau$$

et le segment vertical PS parcouru de haut en bas donc opposé à

$$\frac{1}{2}\int_0^{1-e^2} edy = \frac{1}{2}e(1-e^2)$$

d'où l'intégrale de ω sur le bord de Z

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1-e^2}\arccos(e) - e(1-e^2))$$

Comme $\omega = Mdx + Ndy$ avec $M = -y/2, N = x/2$, le théorème de Stokes nous dit que l'intégrale sur le bord de Z est l'intégrale double sur Z de $\partial N/\partial x - \partial M/\partial y = 1$, c'est donc l'aire de Z.

4. **Déterminer l'aire de l'intérieur de l'ellipse en ramenant le calcul à celui d'une intégrale curviligne d'une forme différentielle sur l'ellipse.**
Le même raisonnement sur l'ellipse donne l'aire égale à l'intégrale curviligne de ω sur l'ellipse soit

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos(t)\sqrt{1-e^2}\cos(t) - \sin(t)\sqrt{1-e^2}(-\sin(t))\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\, dt = \sqrt{1-e^2}\pi$$

5. **Dans cette question, on prendra $e = 0.0167$. Déterminer une approximation numérique de A à la calculatrice (indiquer les commandes utilisées).**

```
ex:=0.0167;  A:=sqrt(1-ex^2)* acos(ex)/2
 - ex*(1-ex^2)/2
```

$$0.0167, 0.768591740975$$

6. **La loi des aires dit que l'aire balayée par le rayon Soleil-Terre est proportionnelle au temps écoulé. L'aire de l'ellipse correspond donc à une durée de 365**

jours. En déduire la durée de l'hiver (temps pour aller de H à P), puis des trois autres saisons.

```
A/sqrt(1-ex^2)/pi*365
```

$$89.309832279$$

L'automne dure également un peu plus de 89 jours par symétrie, le printemps et l'été le complémentaire 93.5 jours. *En réalité l'hiver est un peu plus court que l'automne, et l'été un peu plus long que le printemps car le passage au périhélie se produit un peu après le solstice d'hiver*

7. **On se place maintenant en coordonnées polaires centrées en S (l'axe Sx ayant comme angle 0). L'équation polaire de l'ellipse est donnée par**

$$r(\theta) = \frac{1-e^2}{1+e\cos(\theta)}$$

Quels sont les valeurs de θ correspondant à H,E,P ?

$$H : \theta = 0, E : \theta = \pi, P : \theta = \pi/2$$

On retrouve bien la valeur $1-e^2$ de l'ordonnée de P.

8. **La loi des aires en coordonnées polaires s'exprime par l'équation différentielle dépendant d'une constante C d'inconnue $\theta(t)$**

$$r^2(\theta)\frac{d\theta}{dt} = C \qquad (*)$$

Donner le type de cette équation différentielle.
Équation d'ordre 1 autonome, ou à variables séparables.

9. **On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la Terre est au point H. Déterminer Ct en fonction de θ par une intégrale qu'on ne demande pas de calculer.**

$$\left(\frac{1-e^2}{1+e\cos(\theta)}\right)^2 \frac{d\theta}{dt} = C$$

donc

$$\int \left(\frac{1-e^2}{1+e\cos(\theta)}\right)^2 d\theta = \int C\,dt$$

donc

$$Ct = \int_0^\theta \left(\frac{1-e^2}{1+e\cos(\vartheta)}\right)^2 d\vartheta$$

10. **On suppose $e = 0.0167$. Calculer à la calculatrice une valeur approchée de Ct pour $\theta = 2\pi$. En déduire une valeur approchée de C. Calculer une valeur approchée de t pour $\theta = \theta_P$ et retrouver la durée de l'hiver.**

```
f(t):=int(((1-ex^2)/(1+ex*cos(x)))^2,x,0,t
):;  C:=f(2*pi)/365; f(pi/2)/C
```

$$\text{Done}, 0.0172118057187, 89.309832279$$

11. (*Bonus*)**Déterminer les composantes de la vitesse de la Terre au point de coordonnées polaires** $(\theta(t), r(t))$ **dans la base orthonormée directe** $\{e_r, e_\theta\}$ **avec** $e_r = (\cos(\theta), \sin(\theta))$**.**
$$v = \frac{d}{dt}(re_r) = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta$$
En déduire le lagrangien du système, on prendra comme potentiel $V(r,\theta) = -k/r$**.**
$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}$$
Donner les équations d'Euler-Lagrange et retrouver la loi des aires (*).
Il y a deux variables r et θ. Par rapport à r, on a
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r}$$
donc
$$m\ddot{r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = mr\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2}$$
Par rapport à θ :
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$
donc
$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$
qui est la loi des aires.
Déterminer le hamiltonien, est-il une constante du mouvement ?
$$\begin{aligned} H = \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - L &= \dot{\theta}mr^2\dot{\theta} + \dot{r}m\dot{r} - (\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \end{aligned}$$
L ne dépend pas explicitement du temps donc H est constant.

12. (*Bonus*) **Justifier les coordonnées de l'équinoxe de printemps.**
Les solstices se produisent lorsque la projection de l'axe de rotation de la Terre sur le plan de l'orbite est parallèle au segment Terre-Soleil, les équinoxes lorsque la projection est perpendiculaire.