Examen du 5 janvier 2016, de 10h30 à 12h30.
Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits.
Ce sujet comporte deux pages. Le barème est indicatif.

1. Aire et centre de gravité d'une arche de cycloïde (7 points)

Dans cet exercice, vous pouvez donner directement les valeurs des intégrales obtenues à la calculatrice à condition de préciser la commande utilisée.
Soit C l'arche de cycloïde d'équations paramétriques

$$x(t) = t - \sin(t), \quad y(t) = 1 - \cos(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

On veut déterminer l'aire A et le centre de gravité G de la zone Z délimitée par l'axe Ox et l'arche C.

(1) Calculer x' et y', donner le double tableau de variations de x et y puis tracer C et hachurer Z.

(2) En utilisant le théorème de Green-Riemann (ou de Stokes), exprimer l'aire

$$A = \iint_Z dx\, dy$$

à l'aide d'une intégrale curviligne sur C, puis calculer A.

(3) Montrer que C admet une symétrie par rapport à une droite verticale. En déduire l'abscisse de G.

(4) Déterminer l'ordonnée de G :

$$y_G = \frac{1}{A} \iint_Z y dx\, dy$$

On pourra choisir des fonctions M et N telles que $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = y$.

2. Formes et équations différentielles (8 points).

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = \frac{5x - 3y + 1}{3x - 5y - 1}$$

(1) Répondre par oui ou par non aux deux questions suivantes : Cette équation est-elle linéaire ? À variables séparables ?

(2) Soit $\omega = (5x - 3y + 1)dx - (3x - 5y - 1)dy$. ω est-elle fermée ?

(3) En déduire une intégrale première de (E). Montrer que les graphes des solutions de (E) sont inclus dans les courbes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ dont on donnera l'expression.

(4) Déterminer une équation implicite du graphe de la solution correspondant à la condition initiale $y(0) = 2$.

(5) On définit un nouveau repère dans lequel les coordonnées (X,Y) se calculent en fonction des coordonnées (x,y) dans l'ancien repère par :

$$X = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{x+y+1}{\sqrt{2}}$$

Exprimer $8X^2+2Y^2$ en fonction de x et y.

(6) Déterminer les coordonnées (x,y) dans l'ancien repère du point tel que $X=0, Y=0$, origine du nouveau repère. Même question pour les points de coordonnées $X=1, Y=0$ et $X=0, Y=1$. Représenter le nouveau repère dans l'ancien. Le nouveau repère est-il orthonormé ?

(7) En déduire la nature des courbes de niveau de f.

(8) Tracer l'allure du graphe de la solution de condition initiale $y(0)=2$.

3. PIÈGE ... À PARTICULE ! (9 POINTS)

Pour $b \geq 0$ et $\omega > 0$, on considère le système différentiel d'ordre 2 en $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ (où la dérivation d'une fonction f par rapport à t est notée $\dot{f}$) :

$$\left\{ \begin{array}{lcrcl} \ddot{x} & = & \omega^2 x & - & b\dot{y} \\ \ddot{y} & = & \omega^2 y & + & b\dot{x} \\ \ddot{z} & = & -2\omega^2 z & & \end{array} \right.$$

Ces équations régissent le mouvement d'une particule chargée soumise à un champ électrique linéaire en x,y,z et un champ magnétique vertical constant proportionnel à b.

(1) Déterminer la solution générale $z(t)$ et son comportement lorsque $t \to +\infty$.

(2) On pose $c(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$, exprimer $\ddot{c}$ en fonction de $\dot{c}$ et c et des paramètres ω et b.

(3) Déterminer l'équation caractéristique de cette équation différentielle, calculer ses deux solutions c_1 et c_2. On observe que c_1 et c_2 ne sont pas conjugués, pourquoi ?

(4) Donner la solution générale de l'équation différentielle à coefficients complexes d'inconnue $c(t)$ en fonction de $e^{c_1 t}$ et $e^{c_2 t}$.

(5) En déduire $x(t)$ et $y(t)$ en prenant la partie réelle et imaginaire de $c(t)$.

(6) Montrer que pour ω fixé, il existe une valeur seuil b_0 de b au-delà de laquelle x et y restent bornés. Déterminer b_0.

(7) On suppose $b > b_0$, montrer que les solutions sont combinaison linéaire de solutions périodiques dont on déterminera les périodes.

(8) Soit $Y = (x, \dot{x}, y, \dot{y})$. Déterminer un système différentiel d'ordre 1 de la forme $\dot{Y} = AY$ dont Y est solution. Montrer que par une condition initiale fixée $(x(t_0), \dot{x}(t_0), y(t_0), \dot{y}(t_0)) = (x_0, \dot{x}_0, y, \dot{y}_0)$, il passe une solution unique.

(9) Calculer les valeurs propres de la matrice A (vous pouvez donner le résultat obtenu à la calculatrice en précisant la commande utilisée). Retrouver le comportement périodique des solutions x et y pour b assez grand.

(10) **Bonus** Déterminer les équations d'Euler-Lagrange pour le lagrangien :

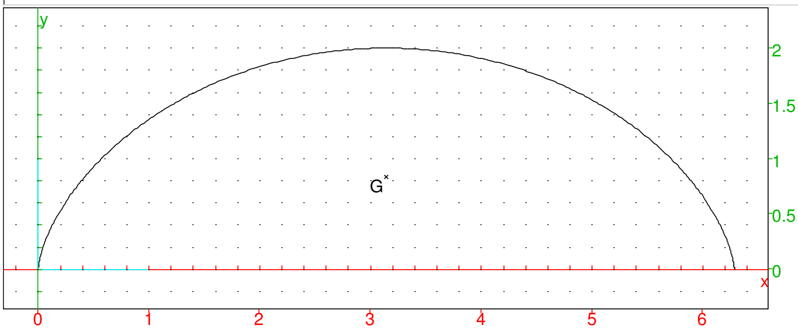
$$L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2-2z^2) + by\dot{x}$$

En déduire une constante du mouvement (indication : L ne dépend pas explicitement du temps).

4. CORRECTION AIRE ET CENTRE DE GRAVITÉ...

(1) $x' = 1 - \cos(t) \geq 0$ (s'annule pour $t = 0, 2\pi$), et $y' = \sin(t)$ est positif sur $[0, \pi]$, négatif ensuite (s'annule pour $t = 0, \pi, 2\pi$). Donc x et y croissent sur $[0, \pi]$ (point singulier) en allant de l'origine au point $(\pi, 2)$ (tangente horizontale), puis x croit et y décroit sur $[\pi, 2\pi]$ en allant du point $(\pi, 2)$ au point $(2\pi, 0)$ (point singulier).

```
plotparam([t-sin(t),1-cos(t)],t,0,2pi); G:=point(pi,5/6)
```



(2) On choisit $\omega = M\,dx + N\,dy$ tel que $\partial_x N - \partial_y M = 1$, par exemple $M = -y$ et $N = 0$, et on note S le segment reliant les deux extrémités $(0,0)$ et $(2\pi, 0)$ de l'arche de cycloïde, on a alors

$$A = \iint_Z dx\,dy = -\int_S y\,dx + \int_C y\,dx$$

avec un signe plus pour $\int_C$, car il faut parcourir l'arche dans le sens trigonométrique, en sens inverse du paramétrage. Sur S on a $y = 0$, d'où :

$$A = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt = 3\pi$$

calculé avec la commande `∫((1-cos(t))^2,t,0,2pi)`.

(3) On a $x(2\pi - t) - \pi = \pi - t - \sin(2\pi - t) = \pi - t + \sin(t) = \pi - x(t)$ et $y(2\pi - t) = 1 - \cos(2\pi - t) = y(t)$ car sin est impaire et cos paire (et elles sont 2π-périodiques). Donc l'arche est symétrique par rapport à la droite $x = \pi$, donc l'abscisse de G vaut π.

(4) On prend par exemple $N = 0, M = -y^2/2$, l'intégrale de $\omega = Mdx + Ndy$ est nulle sur le segment S, on parcourt à nouveau C dans le sens trigonométrique inverse du paramétrage donc

$$\iint_Z y\,dx\,dy = \int_C \frac{y^2}{2} dx = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos(t))^2}{2} (1 - \cos(t))\,dt = 5\pi/2$$

obtenu avec la commande `∫((1-cos(t))^3/2,t,0,2pi)`. Donc $y_G = 5/6$ ce qui parait graphiquement raisonnable.

5. CORRECTION FORMES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

(1) (E) n'est pas linéaire (y est au numérateur et au dénominateur) et n'est pas à variables séparables (impossible de factoriser le membre de droite en une partie dépendant de x uniquement et l'autre de y uniquement)

(2)
$$\frac{\partial}{\partial y}(5x-3y+1) = -3 = \frac{\partial}{\partial x}(-(3x-5y-1))$$
donc ω est fermée, donc exacte (ω est régulière sur $\mathbb{R}^2$).

(3) Le long des courbes intégrales de (E), on a $\omega = 0$, donc les graphes des solutions de (E) sont incluses dans les lignes de niveau d'un potentiel $f(x,y)$ de ω (f est une intégrale première de (E)). On cherche donc f tel que
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x-3y+1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x+5y+1$$
La première équation donne $f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 - 3xy + x + C(y)$, on remplace dans la deuxième équation $-3x + C'(y) = -3x+5y+1$ donc $C(y) = \frac{5}{2}y^2 + y$ et $f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 - 3xy + x + \frac{5}{2}y^2 + y$.

(4) Si $y(0) = 2$ alors $f(0,2) = 12$ donc la courbe de niveau a pour équation
$$5x^2 - 6xy + 2x + 5y^2 + 2y = 24$$

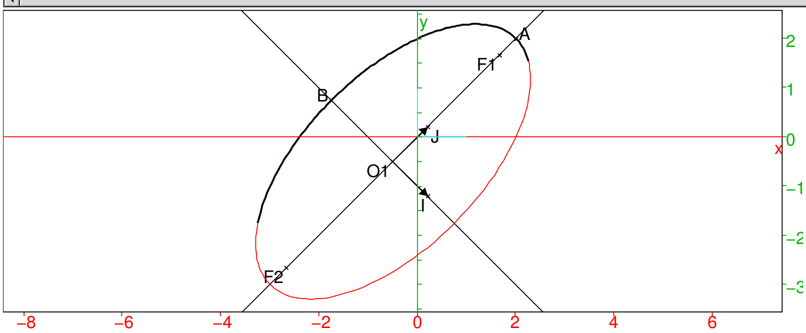
(5) $8X^2 + Y^2 = 4(x-y)^2 + (x+y+1)^2 = 5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2y + 2x + 1$

(6) L'origine O' du nouveau repère vérifie $X = Y = 0$ donc $x = y$ et $2x+1 = 0$ donc $x = y = -1/2$. De même pour I de coordonnées $X = 1, Y = 0$, on a $x = y + \sqrt{2}$ puis $2y + 1 + \sqrt{2} = 0$ et $y = -\frac{1}{2} - \sqrt{2}/2, x = -\frac{1}{2} + \sqrt{2}/2$, et pour J de coordonnées $X = 0, Y = 1$, on a $x = y$ donc $y = -1/2 + \sqrt{2}/2 = x$ On vérifie facilement que le repère est orthonormé, les deux vecteurs de la nouvelle base étant $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ et $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

(7) Les courbes de niveau de f sont donc des ellipses d'équations $8X^2 + 2Y^2 = C$ pour $C \geq 0$ (si $C = 0$ l'ellipse est réduite à O')

(8) On a $8X^2 + 2Y^2 = 25$ sur la courbe intégrale de condition initiale $y(0) = 2$. Elle est donc incluse dans une ellipse de grand axe $O'Y$ et de petit axe $O'X$ ($a = 5/\sqrt{2}$ et $b = a/2$, excentricité $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 5/2\sqrt{3/2}$).

```
O1:=point(-1/2,-1/2); I:=point(-1/2+sqrt(2)/2,-1/2-sqrt(2)/2);
J:=point(-1/2+sqrt(2)/2,-1/2+sqrt(2)/2,affichage=quadrant4); vecteur(O1,I); vecteur(O1,J);
droite(O1,J); droite(O1,I);
A:=affichage(O1+5/sqrt(2)*(J-O1),quadrant1); B:=affichage(O1-5/2/sqrt(2)*(I-O1),quadrant2);
F1:=O1+5/2*sqrt(3/2)*(J-O1); F2:=O1-5/2*sqrt(3/2)*(J-O1);
ellipse(F1,F2,B,affichage=rouge);
plot(-(-3*x-(sqrt(-16*x^2-16*x+121))+1)/5,x,affichage=epaisseur_ligne_2);
```



6. Correction piège à particules.

(1) Équation caractéristique $r^2 = -2\omega^2$ donc $z(t) = A\cos(\sqrt{2}\omega t) + B\sin(\sqrt{2}\omega t)$ la solution est bornée (remarque : le coefficient 2 est imposé par divergence du champ électrique nulle dans le vide)

(2)
$$\ddot{c} = \ddot{x} + i\ddot{y} = \omega^2(x+iy) + b(-\dot{y}+i\dot{x}) = \omega^2 c + ib\dot{c}$$

(3) Équation caractéristique $r^2 - ibr - \omega^2 = 0$, discriminant $\Delta = -b^2 + 4\omega^2$, racines
$$c_1 = \frac{ib+\sqrt{\Delta}}{2},\ c_2 = \frac{ib-\sqrt{\Delta}}{2},\ \Delta = -b^2+4\omega^2$$
Les racines n'ont aucune raison d'être conjuguées car l'équation caractéristique n'est pas à coefficients réels.

(4) Solution générale
$$c(t) = \lambda_1 e^{c_1 t} + \lambda_2 e^{c_2 t}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$
sauf si $\Delta = 0$, dans ce cas $c(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{ibt}$

(5) On a $x(t) = \Re(c(t)), y(t) = \Im(c(t))$. On pose $\lambda_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \lambda_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$.
— Si $\Delta > 0$ alors
$$x(t) = \rho_1 e^{\sqrt{\Delta}t/2}\cos(\frac{b}{2}t+\theta_1) + \rho_2 e^{-\sqrt{\Delta}t/2}\cos(\frac{b}{2}t+\theta_2),$$
$$y(t) = \rho_1 e^{\sqrt{\Delta}t/2}\sin(\frac{b}{2}t+\theta_1) + \rho_2 e^{-\sqrt{\Delta}t/2}\sin(\frac{b}{2}t+\theta_2)$$
— Si $\Delta = 0$, alors
$$x(t) = \rho_1 t\cos(\frac{b}{2}t+\theta_1) + \rho_2 t\cos(\frac{b}{2}t+\theta_2),$$
$$y(t) = \rho_1 t\sin(\frac{b}{2}t+\theta_1) + \rho_2 t\sin(\frac{b}{2}t+\theta_2)$$
— Si $\Delta < 0$, alors
$$x(t) = \rho_1\cos(\frac{b+\sqrt{-\Delta}}{2}t+\theta_1) + \rho_2\cos(\frac{b-\sqrt{-\Delta}}{2}t+\theta_2),$$
$$y(t) = \rho_1\sin(\frac{b+\sqrt{-\Delta}}{2}t+\theta_1) + \rho_2\sin(\frac{b-\sqrt{-\Delta}}{2}t+\theta_2),$$

(6) Les solutions sont bornées si $\Delta < 0$ donc si $-b^2+4\omega^2 < 0$ soit $b > b_0 = 2\omega$.

(7) les solutions sont alors des sommes de sinusoides de périodes
$$\frac{4\pi}{b+\sqrt{-\Delta}},\quad \frac{4\pi}{b-\sqrt{-\Delta}}$$

(8)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega^2 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$
Le système est d'ordre 1, de la forme $Y' = AY$ donc régulier en tout point, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, par toute condition initiale passe une courbe intégrale et une seule.

(9) `a:=[[0,1,0,0],[w^2,0,0,-b],[0,0,0,1],[0,b,w^2,0]]`
`p:=factor(det(a-x*identity(4)))`
on obtient le polynôme caractéristique :

$$x^4 + (b^2 - 2\omega^2) \cdot x^2 + \omega^4$$

qui ne se factorise pas plus sur $\mathbb{Q}$, on en trouve les racines avec la commande `csolve(p=0,x)`, on trouve $c_1, c_2, -c_1, -c_2$. Sans outil de calcul, on peut observer que p est un polynôme bicarré, on pose $X = x^2$, on a

$$X^2 + (b^2 - 2\omega^2)X + \omega^4$$

On vérifie alors que $X = r^2$ pour $r = c_1$ et $r = c_2$ sont les deux solutions de l'équation bicarrée, en effet $X = r^2 = ibr + \omega^2$ donc

$$X^2 = -b^2r^2 + 2ibr\omega^2 + \omega^4 = -b^2X + 2\omega^2(X - \omega^2) + \omega^4$$

Donc les 4 valeurs propres de A, racines de l'équation en x sont bien $c_1, -c_1, c_2, -c_2$. On peut aussi retrouver le comportement des solutions du système sans calculer complètement les racines, en effet le discriminant vaut

$$(b^2 - 2\omega^2)^2 - 4\omega^4 = b^2(b^2 - 4\omega^2)$$

Si $b > 2\omega$ le discriminant est positif, on a deux racines réelles X_1 et X_2 dont la somme $2\omega^2 - b^2$ est négative et le produit ω^4 est positif donc X_1 et X_2 sont négatives, les valeurs propres de A sont donc imaginaires pures (car ce sont les racines carrées de X_1 et X_2) donc le mouvement est somme de mouvement périodiques.

(10) On a :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + by, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \omega^2 x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \omega^2 y + b\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -2\omega^2 z,$$

donc les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + by) = \omega^2 x, \quad \frac{d}{dt}(\dot{y}) = \omega^2 y + b\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}(\dot{z}) = -2\omega^2 z$$

on retrouve le système étudié ici. Comme L ne dépend pas explicitement du temps, le hamiltonien est conservé :

$$H = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\omega^2}{2}(-x^2 - y^2 + 2z^2)$$

Remarque : ce piège à particules chargées est appelé trappe de Penning.