

TP xcas : Calcul approché de l'aire située sous une parabole à l'aide du logiciel xcas

On a vu en classe comment estimer l'aire d'un domaine délimité par une courbe, l'axe des abscisses et deux droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$, en encadrant le domaine par des rectangles "un peu trop petits" puis "un peu trop grands". Le travail est vite fastidieux si on doit le refaire pour augmenter la précision. On va utiliser un logiciel de calcul qui permet de confier les calculs à la machine et de **garder ses forces pour réfléchir !!!**

1. Vous allez utiliser le logiciel xcas qui permet de travailler dans pratiquement tous les domaines mathématiques, calcul algébrique, géométrie, étude de fonctions, résolution d'équations ou inéquations et programmation, plus le mode "tableur", mais il s'agit toujours faire du **calcul formel**.

Pour obtenir des expressions algébriques ou des valeurs numériques simplifiées, vous demanderez `simplify(f(x))` ou `evalf(f(5))`. Les commandes les plus courantes se trouvent dans les différents menus du bandeau supérieur.

2. **Définition d'une fonction** : tapez `f(x):=x^2`, validez, puis `F:=plot(f(x))` puis `D:=droite(y=2x-1)`. La parabole et la droite apparaissent chacune dans une fenêtre graphique. Demandez `f(5)` puis `f(3/4)` puis `f(x+1)` puis `f(sin(x)) + f(cos(x))`. Contrôlez les résultats obtenus, en demandant "simplify" ou "evalf".

Pour obtenir deux représentations graphiques dans le même repère, il faut donner les deux instructions dans la même ligne e commande, séparées par une virgule ou bien ouvrir une session de géométrie (Edit, Add, Geometry) dans laquelle on demandera `F:=plot(f(x))` puis, **par exemple, couleur(D:=droite(y=2x-1),bleu)**.

3. **Ouvrez une session tableur en allant dans edit puis add puis tableur** : on vous demande aussitôt de donner un nom à ce tableau. Vous avez par défaut un tableau de 6 colonnes (de A à F) et 40 lignes (de 0 à 39) mais vous pouvez augmenter ces dimensions en tapant dans la zone située au dessus du tableau, à gauche par exemple "Z150", ce qui aura pour effet d'ouvrir un tableau de 26 colonnes et 151 lignes. Vous pouvez utiliser les fonctions classiques d'un tableur, par exemple "`=sum(A10:A25)`" pour demander la somme des nombres contenus dans les cellules A10 à A25.

Dans le tableau, les calculs sont exacts, donc vous pouvez travailler avec des fractions : essayez `A0=1/2`, `B0=1/3` et demandez en `C0 "=A0+B0"`. Si vous voulez la valeur approchée, il faudra demander "`=evalf(A0+B0)`". Si `A0=x`, `B0=1/3`, observez `C0=A0+B0`, puis vous demanderez dans `D0 "=simplify(C0)"`. Saisissez dans `D1 « f(D0)` et observez le résultat obtenu. Proposer une instruction permettant d'obtenir l'écriture développée de `D1` dans `D2`.

Attention, si vous utilisez des nombres décimaux, le séparateur entre la partie entière et la partie décimale est le point et les calculs seront alors automatiquement réalisés en mode approché. Par exemple la valeur $1/2$ et la valeur 0.5 ne donneront pas les résultats des calculs sous la même forme.

Dernière remarque avant de se lancer : **on sauvegarde son travail** pour le tableur, comme pour les autres travaux. Les fichiers ".tab" et ".xws" correspondent respectivement à des tableaux ou des sessions complètes.

4. **Mise en place des calculs des rectangles** : Dans la colonne A, on va indiquer les abscisses x et dans la colonne B les ordonnées y pour ensuite calculer les aires des rectangles inférieurs et supérieurs qui "encadrent" la parabole, pour des abscisses qui vont varier de 0 à 1 par pas constant égal à la valeur qu'on indiquera dans la cellule A0, on commence par exemple avec un pas égal à $\frac{1}{10}$. Cette valeur pourra être modifiée et xcas recalculera automatiquement.

a) Dans la cellule A1 on indique la première valeur de x , donc 0, et dans A2, on écrit "=A1+ A\$0", puis on valide et de nouveau on se positionne sur A2 et on clique sur "remplir", "vers le bas".

Quel est le contenu de la colonne A à partir de la ligne 1?

b) Dans la cellule B1 on indique la première valeur de y , donc =f(A1), puis "remplir", "vers le bas".

Que contient la colonne B?

c) On veut calculer une valeur approchée de l'aire \mathcal{A} délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$ et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$. Comment calculer l'aire d'un "rectangle inférieur"?

d) Comment calculer l'aire totale représentée par tous les rectangles inférieurs? Quelle formule simplifiée écrire pour obtenir cette aire? Ecrivez ce calcul en utilisant les noms des cellules du tableur. Adaptez le nombre de lignes au pas choisi dans la colonne A.

Demandez à xcas ce calcul dans la cellule C0. Dans C1, demandez une valeur approchée de C0. Montrez que si le pas est égal à $\frac{1}{n}$, cette aire est égale à $\frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$.

e) Mêmes questions pour les rectangles supérieurs. Vous inscrirez la formule de calcul dans la cellule D0 et sa valeur approchée dans D1. Quelle est la formule de l'aire supérieure pour un pas égal à $\frac{1}{n}$?

f) Comparez les résultats numériques obtenus. Quelle est la précision de l'encadrement ? Calculez cette précision dans E0 et sa valeur approchée dans E1.

g) Dans la session, demandez le calcul des aires en utilisant "sum(k^2,k,1,n)/n^3", "sum(k^2,k,0,n-1)/n^3", puis leur différence. Demandez une écriture simplifiée des calculs puis démontrez "à la main" les résultats obtenus.

h) Modifiez les choix précédents pour affiner l'encadrement et obtenir une précision de 10^{-2} .

5. Comment doit-on modifier le travail précédent si on veut calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire comprise entre la parabole d'équation $y = (x - 1)^2$ et l'axe des ordonnées? Vous pouvez aller modifier la fonction f dans la session en écrivant $f(x) := (x - 1)^2$ (n'oubliez pas de valider) puis revenez à la feuille de calcul et observez les nouvelles valeurs. Expliquez ce qui se passe.

6. Encadrez l'aire du domaine compris entre la parabole d'équation $y = x^2$, la droite d'équation $x = a$ et les axes du repère, en utilisant n subdivisions de l'intervalle $[0 ; a]$. Que se passe-t-il quand n augmente ? Quand n tend vers $+\infty$? Est-ce que vous pouvez en déduire la valeur exacte de cette aire en fonction de a ?