

# SOMME DES INVERSES

## Proposition de scénario

---

- Durée de l'activité : 2h00 (à poursuivre à la maison dans le cadre d'un devoir à la maison éventuellement)
- Pré-requis : Identités remarquables.
- Objectif : Calcul littéral, travail sur la notion de minimum (introduction ou consolidation), renforcer la conception de fraction en tant que nombre.
- Place du logiciel de calcul formel : Le logiciel réalise un travail technique fastidieux à la place de l'élève.
- Déroulement : Le professeur projette la question "L'objectif est de minimiser  $(a + b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels strictement positifs".  
Phase de recherche
- Quelques remarques :
  -

### L'énoncé distribué aux élèves

- 1) Montrer que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a > 0, b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .
- 2) L'objectif est de minimiser  $S = (a + b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels strictement positifs.
  - a) Recherche, conjecture.
  - b) Preuve : directe
    - i) Montrer que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a > 0, b > 0 \Rightarrow (a + b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 0$ .
    - ii) Montrer que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a > 0, b > 0 \Rightarrow (a + b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$ .
    - iii) Quelles informations nous donnent les deux questions précédentes concernant le minimum de  $S$ ?
    - iv) Trouver  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$  tels que  $S = 4$ . Conclure.
- 3) Vers une généralisation
  - a) Minimiser  $S = (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$  où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels strictement positifs.
    - Développer  $S$  à l'aide d'un logiciel de Xcas.
    - Regrouper les inverses et conclure.
  - b) Minimiser  $S = (a+b+c+d) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont des nombres réels strictement positifs.
  - c) Quelle conjecture peut-on faire concernant le produit entre la somme de  $n$  réels strictement positifs et celle de leurs inverses.