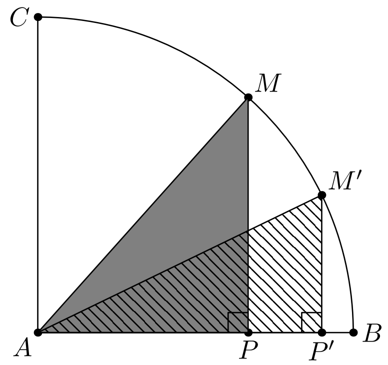
Seconde Recherche d'un extremum lié à une configuration plane avec Xcas

1 Le problème

Étant donné la configuration plane suivante :

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A avec $AB = AC = 5\,\text{cm}$. P étant un point **mobile** du segment $[AB]$, le point M est sur le quart de cercle $\overset{\frown}{CAB}$ de centre A tel que APM est un triangle rectangle en P.



on cherche la position de P pour que l'aire du triangle APM soit maximale.

2 Construction de la figure

Nous allons apprendre à utiliser le logiciels libre Xcas[1] pour résoudre ce problème.
Lancer Xcas et ouvrir une fenêtre de géométrie à l'aide du raccourci `Alt-g`.

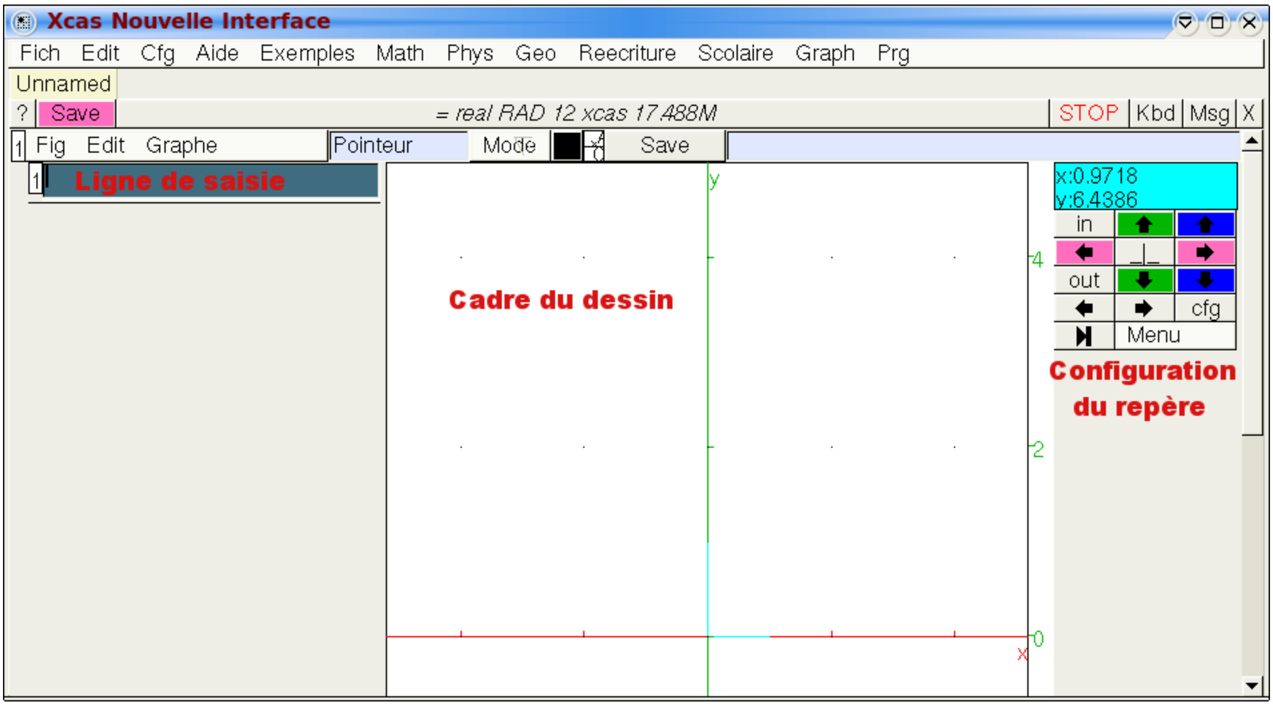


Figure 1 – En rouges, les principales zones de Xcas « en mode géométrie »

1. `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`

2.1 Construction du triangle ABC

☞ Dans la ligne de saisie entrer la commande `A:=point(0,0)` qui définit le point A par ces coordonnées $(0\,;\,0)$.
☞ Définir de même les points $B\,(5\,;\,0)$ et $C\,(0\,;\,5)$.
☞ Il est possible que le repère ne soit pas adapté ; utiliser alors la zone de configuration du repère pour l'ajuster.

2.2 Construction de l'arc de cercle

Si l'on sait que 90 degrés valent $\frac{\pi}{2}$ radians, on peut entrer la commande `ARC:=arc(B,C,pi/2)` qui définit `ARC` comme l'arc de cercle d'extrémité B et C et dont l'angle au centre est $\frac{\pi}{2}$ rad donné dans le sens trigonométrique. Sinon, on peut aussi utiliser la commande `ARC:=cercle(A,5)`.

2.3 Construction du point mobile appartenant au segment $[AB]$

☞ Même si ce n'est pas obligatoire, commençons par définir le segment $[AB]$ avec la commande `sAB:=segment(A,B)`.
☞ Il suffit maintenant d'entrer la commande `P:=element(sAB)` pour que le point P soit défini comme étant un point du segment $[AB]$ (si l'on n'avait pas défini le segment $[AB]$, il aurait fallu entrer `P:=element(segment(A,B))`).
Essayer maintenant de bouger le point P avec le mulot.

2.4 Construction du point M

Le point M est tel que :

- $(PM) \perp (AB)$;
- M appartient à l'arc de cercle $\mathscr{C}$.

Le principe de la construction est donc de créer la droite passant par P perpendiculaire à (AB) puis le point M comme intersection de cette droite avec l'arc de cercle `ARC`.

☞ Voici deux méthodes simples pour créer la droite (d) perpendiculaire à (AB) passant par P, choisissez celle qui vous convient :
  - `d:=droite(x=abscisse(P))` qui définit (d) par son équation ;
  - `d:=perpendiculaire(P,sAB)` qui définit explicitement (d) comme étant perpendiculaire à `sAB` et passant par P.

☞ Pour définir le point M, intersection de `d` avec `ARC` on utilise la commande `M:=inter(d,ARC)[0]`.
On notera que `resultat:=inter(objet1,objet2)` *renvoie dans* `resultat` *une liste de points ; on accède alors à chacun des points en écrivant* `resultat[0]`, `resultat[1]`, `resultat[2]` *etc...*

2.5 Obtention de l'aire du triangle APM

☞ Commençons par définir le triangle APM avec la commande `APM:=polygone(A,P,M)`.
☞ Pour bien visualiser l'aire du triangle, colorions le avec la commande `couleur(APM,blue+rempli)`.

L'aire de APM s'obtient simplement avec la commande `aire(APM)` *et l'abscisse du point P avec* `abscisse(P)`.

☞ Définissons donc le point `AireDeAPM` de coordonnées $(abscisse(P)\,;\,aire(APM))$ avec la commande `AireDeAPM:=point(abscisse(P),aire(APM))`.

Essayer maintenant de bouger le point P avec la sourie.

2.6 ✎ Tableau de valeurs

Reprouver la ligne où vous avez entrer la commande `P:=element(sAB)` (a priori ce doit être la ligne 5) et remplacez la par `P:=element(sAB,1/5)` (ne pas oublier de valider). Expliquer la syntaxe de cette commande et en déduire comment compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

$x = AP$	1	2	3	4
$f(x) =$ Aire deAPM				

☞ Définir les points $A1$, $A2$, $A3$ et $A4$ dont les coordonnées sont les couples $(x\,;\,y)$ du tableau. *Vérifier vos résultats en constatant que le point* `AireDeAPM` *passe bien par ces points lorsque l'on bouge le point P avec la sourie.*

Dans la suite, on définie la fonction f qui, à la longueur AP notée x, associe l'aire du triangle APM, notée f(x).

2.7 Graphe de la fonction f comme un lieu de points

☞ Pour tracer la courbe décrite par le point `AireDeAPM` il suffit de rentrer la commande `courbe:=lieu(AireDeAPM,P)`.

Cela signifie que `courbe` est l'ensemble de tous les points atteints par `AireDeAPM` lorsque le point P parcours tout le segment $[AB]$.

2.8 Expression algébrique de $f(x)$

Trouver l'expression algébrique de $f(x)$ est un détail pour XCAS dans un cas aussi simple que celui qui nous intéresse :

☞ en entrant simplement `equation(courbe)` on doit obtenir `y=(sqrt(25-(x/5*5)^2)*x/5*5/2)`.
Bof... peut mieux faire...
Remplacer la commande précédente par `simplifier(equation(courbe))`. Ha... c'est tout de suite mieux, non ?
Vous l'avez compris, l'équation de la courbe est $y = \frac{x}{2}\sqrt{-x^2+25}$; ce qui signifie que

$$f(x) = \text{AireDeAPM}(x) = \frac{x}{2}\sqrt{-x^2+25}$$

2.9 Maximum de $f(x)$

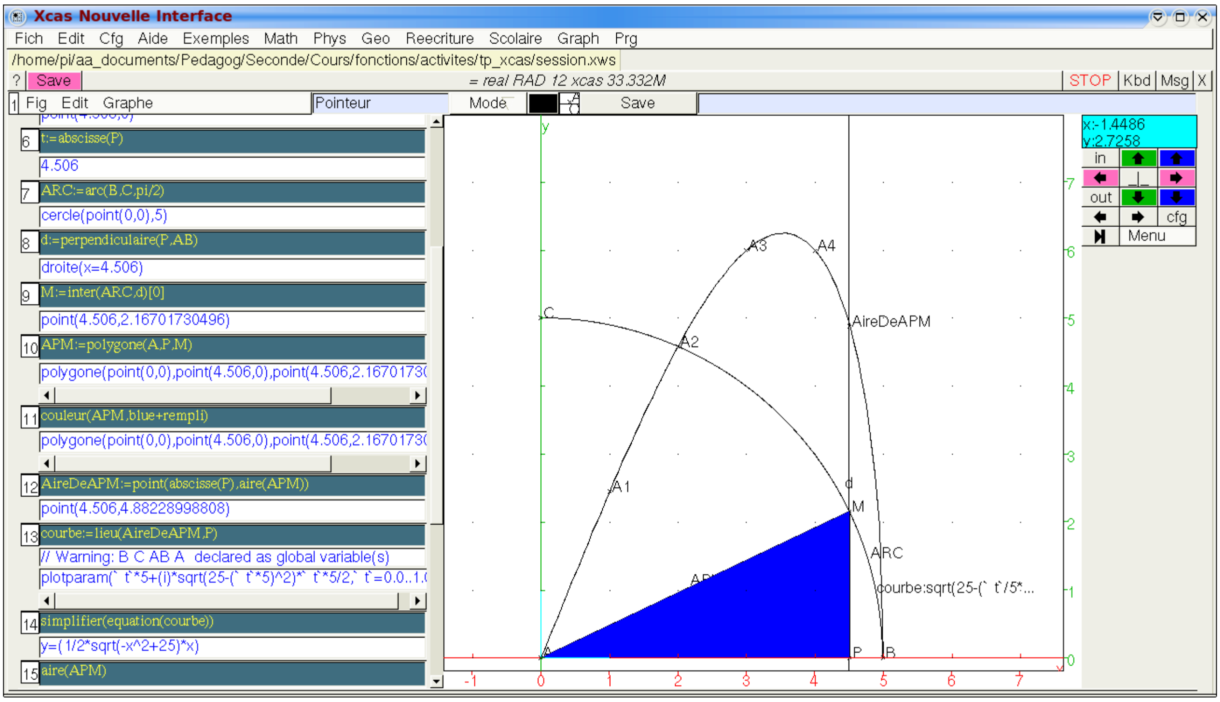
On peut espérer que XCAS va s'en sortir pour trouver le maximum de f.

☞ Définissons la fonction f par la commande `f(x):=1/2*sqrt(-x^2+25)*x`.

☞ Essayons la commande `fMax(f(x),x)`
Pas de chance, il n'y arrive pas... Il faut aider un peu XCAS en lui fournissant l'ensemble de définition. Je vous laisse chercher par quoi il faut remplacer les `???` dans la commande qui va enfin livrer la solution au problème : `assume(x>??? && x<???);fMax(f(x),x)`.

☞ Placer le point correspondant au maximum trouvé.

Voici ce que l'on doit obtenir à la fin de cette activité :



3 ✎ Questions

En interrogeant Xcas, répondre aux questions suivantes (ou pourra utiliser l'aide intégrée au logiciel) :

1) Donner la valeur exacte simplifiée de l'aire maximale de APM.

2) **a)** Combien de triangles ont une aire égale à 6 unités d'aire ?

b) Que vaut AP dans ces cas ? (penser à la commande `resoudre()` ou `solve()`)

c) Traduire ces cas en utilisant le mot « image ».

d) Traduire ces cas par une égalité de la forme $f(a) = b$.

3) **a)** Combien de triangles ont une aire égale à 4 unités d'aire ?

b) Donner les valeurs exactes puis approchées à 10^{-5} près de AP dans ces cas ? (penser à la commande `evalf()` et éventuellement `ans()`).

c) Traduire ces cas en utilisant le mot « antécédent ».

d) Traduire ces cas par une égalité de la forme $f(a) = b$.