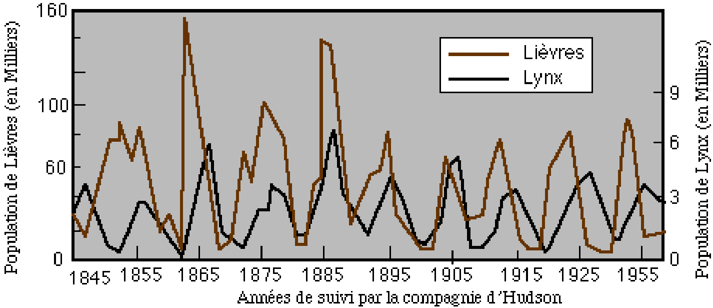
Modèles proie-prédateur

Exposé de Modélisation

Kévin Tribut Yvan Duron

7 mai 2013

Introduction



Équations de Lotka-Volterra

x : proies

y : prédateurs

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t) \\ y'(t) = c\,x(t)\,y(t) - d\,y(t) \end{cases}$$

$$z' = F(z) \quad \text{où} \quad \begin{cases} z = (x, y) \\ F : (x, y) \mapsto (ax - bxy, cxy - dy) \end{cases}$$

Résolution numérique

$$\boxed{z' = F(z)} \quad \text{où} \quad z = (x, y) \quad \text{et} \quad F : (x, y) \mapsto (ax - bxy, cxy - dy)$$

Résolution numérique

$$\boxed{z' = F(z)} \quad \text{où} \quad z = (x, y) \quad \text{et} \quad F : (x, y) \mapsto (ax - bxy, cxy - dy)$$

Méthode d'Euler

$$z_0 = (x_0, y_0)$$

$$\boxed{z_{n+1} = z_n + h\, F(z_n)}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(1 + ah - bhy_n) \\ y_{n+1} = y_n(1 - dh + chx_n) \end{cases}$$

Résolution numérique

$$\boxed{z' = F(z)} \quad \text{où} \quad z = (x, y) \quad \text{et} \quad F : (x, y) \mapsto (ax - bxy, cxy - dy)$$

Méthode d'Euler

$$z_0 = (x_0, y_0)$$

$$\boxed{z_{n+1} = z_n + h\, F(z_n)}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(1 + ah - bhy_n) \\ y_{n+1} = y_n(1 - dh + chx_n) \end{cases}$$

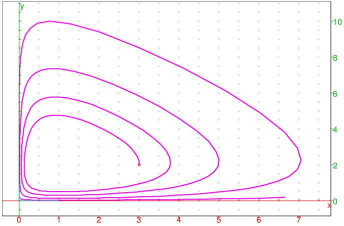
Méthode de Runge Kutta

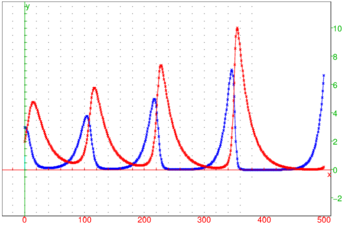
$$z_0 = (x_0, y_0)$$

$$\boxed{z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}\Big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\Big)}$$

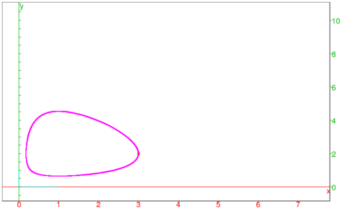
$$k_1 = F\left(t_n, y_n\right)$$
$$k_2 = F\left(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2} k_1\right)$$
$$k_3 = F\left(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2} k_2\right)$$
$$k_4 = F\left(t_n + h, y_n + hk_3\right)$$

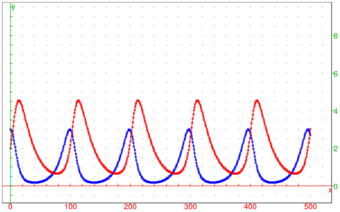
Méthode d'Euler





Méthode de Runge-Kutta





Rappel : $F : (t, x, y) \mapsto (ax - bxy, cxy - dy)$

Existence et unicité

Positivité des solutions

Soient $x_0, y_0 > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$.
Alors la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(t, x(t), y(t)) \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

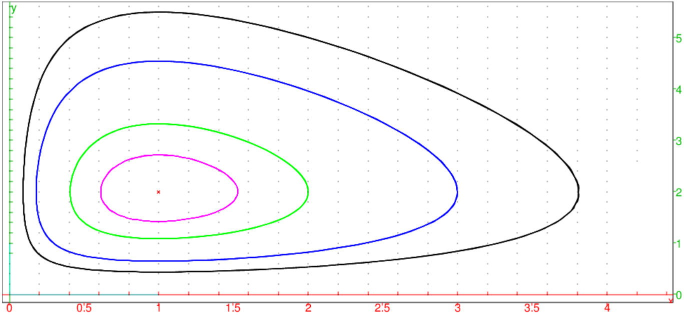
vérifie pour tout réel t $\begin{cases} x(t) > 0 \\ y(t) > 0 \end{cases}$.

Points d'équilibre

- $(0, 0)$ est un *point selle*
- $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ est un *point centre*

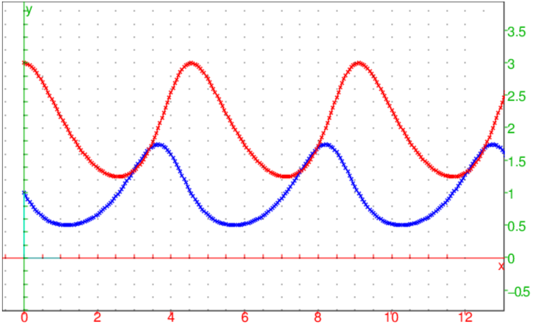
Point moyen

$(X, Y) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$



Périodicité des solutions

Toute solution du système de Lotka-Volterra est périodique.
Au voisinage du point d'équilibre $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$, la période vaut $\frac{2\pi}{\sqrt{ad}}$.



$$a = 2$$

$$b = c = d = 1$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{ad}} \approx 4,4$$

Effectif des proies et des prédateurs

x : insectes

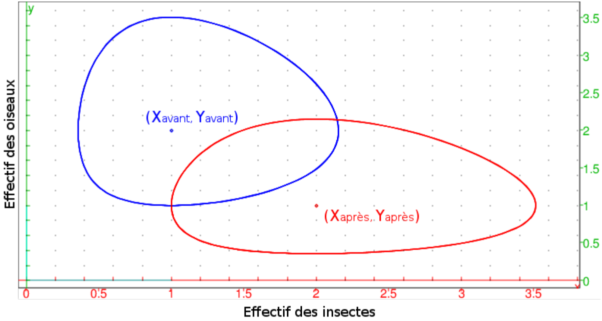
y : oiseaux

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \color{red}{-ex} \\ y' = cxy - dy \color{red}{-fy} \end{cases}$$

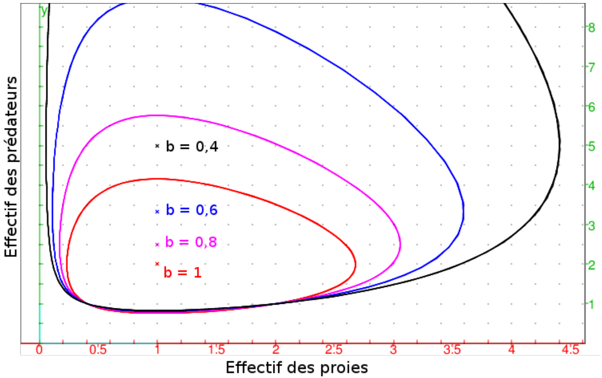
$$\iff \quad \begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = \gamma xy - \delta y \end{cases} \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = a - e > 0 \\ \beta = b \\ \gamma = c \\ \delta = d + f \end{array} \right.$$

$$\text{Insectes :} \quad X_{\text{après}} = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{d+f}{c} = X_{\text{avant}} + \frac{f}{c}$$

$$\text{Oiseaux :} \quad Y_{\text{après}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a-e}{b} = Y_{\text{avant}} - \frac{e}{b}$$



Limites du modèle



Amélioration du modèle

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \color{red}{-kx^2(t)} - bx(t)y(t) \\ y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t) \end{cases} \qquad \text{où } k > 0$$