TP 5
DES SUITES

L'objet de ce TP est de travailler à la compréhension des définitions des suites convergentes, des suites divergentes, en distinguant celles qui, parmi celles-ci, ont une limite infinie. Le tableur aide en ce sens.

Il s'agit en plus de faire un retour sur les notions, déjà abordées en classe de première, distinguer notamment les suites qui sont déterminées par l'expression de leur terme général explicitement en fonction du rang et celles qui satisfont à une formule de récurrence. La manipulation du tableur aide à la compréhension de la différence entre ces deux types de définition d'une suite. Les graphiques demandés, à l'écran et sur papier, permettent aussi d'insister sur cette différence.

Ce TP est prévu pour deux séances d'une heure en salle informatique. Les élèves travaillent en binôme, mais rédigent un compte-rendu personnel à l'issue de chacune des séances. Une aide à l'utilisation du tableur et du graphique est fournie en annexe (page 7).

La troisième partie du TP constitue surtout une **articulation avec le cours**. La définition d'une suite convergente est au programme de première S, mais un retour sur cette notion est indispensable en classe de terminale. La définition d'une suite qui diverge vers $+\infty$ fait partie du programme de terminale S. Les preuves demandées dans cette troisième partie peuvent être cherchées en classe, en dehors de la salle informatique, les élèves ayant ensuite à les rédiger dans le compte-rendu.

Le bilan fait à la suite de ce TP reprend non seulement les définitions données dans la troisième partie, mais revient également sur toutes les notions vues en classe de première, que l'on peut illustrer avec les suites de ce TP, preuves à l'appui :

- on a des exemples de suites monotones, de suites non monotones ;
- on peut illustrer la notion de suite géométrique et celle de suite non géométrique ;
- on peut illustrer la notion de suite arithmétique et celle de suite non arithmétique ;
- on a des exemples de suites majorées (et non majorées), minorées (et non minorées), bornées (et non bornées) ;
- on a aussi des exemples de suites convergentes, de suites qui n'ont ni limite finie, ni limite infinie…

Il n'est pas question de faire toutes les preuves, surtout si l'on n'a pas encore abordé le raisonnement par récurrence. Il est utile par contre d'avoir déjà rencontré la fonction partie entière.

Dans ce bilan, on revient aussi sur les stratégies de démonstration et sur la représentation des termes d'une suite récurrente, dans un repère orthonormal, en utilisant la première bissectrice.

T P N°5
DES SUITES

L'objet de ce TP est de faire des conjectures sur le comportement de onze suites à l'infini. On examinera aussi le sens de variation de certaines d'entre elles. Cinq suites sont données par leur terme général, explicitement en fonction de n (n s'appelle le *rang* du terme u_n), les autres sont définies par une formule de récurrence et leur premier terme.

Il s'agit des suites dont le terme général est défini de la manière suivante :

$u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour tout nombre entier naturel n strictement positif

$r_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ pour tout nombre entier naturel n et $r_0 = 5$

$t_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{t_n}}$ pour tout nombre entier naturel n et $t_0 = 0{,}6$

$x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}$ pour tout nombre entier naturel n et $x_0 = 4$

$s_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{s_n}}$ pour tout nombre entier naturel n et $s_0 = 1$

$w_n = \dfrac{2n^2+1}{3n^2-3}$ pour tout nombre entier naturel n supérieur à 2

$v_n = \dfrac{2+n}{n-1}$ pour tout nombre entier naturel n supérieur à 2

$a_{n+1} = \dfrac{2+a_n}{a_n-1}$ pour tout nombre entier naturel n et $a_0 = -9$

$b_{n+1} = \dfrac{2+b_n}{b_n-1}$ pour tout nombre entier naturel n et $b_0 = 8$

$c_n = (-2)^n \times 3$ pour tout nombre entier naturel n

$d_n = e\,n + 3$ pour tout nombre entier naturel n (e est l'image de 1 par la fonction exp)

On réglera la configuration du logiciel en mode approximatif (cliquer dans le bandeau où apparaît la configuration, tout en bas de la fenêtre). On pourra se reporter à une aide dans l'utilisation du tableur et du graphique, qui figure en annexe à ce texte, p. 7.

Première partie : étude des cinq premières suites

A) Etude de la suite (u_n)

1. A l'aide du tableur, calculer les 50 premiers termes de la suite (u_n), puis faire des conjectures sur :

   a) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de (u_n) appartiennent à]1,8 ; 2,2[;

   b) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de (u_n) appartiennent à]1,85 ; 2,15[.

2. Dans le compte-rendu, on indiquera comment on a procédé pour obtenir les termes de la suite (u_n) et on rédigera ses conjectures.
3. En utilisant le graphique associé au tableur (voir l'aide p.7) visualiser le nuage de points $(n ; u_n)$, qui représente les 20 premiers termes de (u_n). Que remarque-t-on ?

Appeler la professeure pour qu'elle contrôle la feuille de calcul et le graphique.

4. En utilisant le graphique associé au tableur (voir l'aide p.7), visualiser les représentations graphiques de deux fonctions qui contiennent chacune une partie du nuage de points.
5. Dans le compte-rendu :
   a) décrire et commenter le graphique obtenu ;
   b) faire une conjecture sur le comportement à l'infini de la suite (u_n) ;
   c) dire si la suite (u_n) est croissante, dire si elle est décroissante.

B) Etude des suites (r_n), (t_n), (x_n) et (s_n)

1. A l'aide du tableur, calculer les premiers termes des suites (r_n), (t_n), (s_n) et (x_n), puis faire des conjectures sur :
   a) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de (r_n) appartiennent à [1 ; 1,00001[;
   b) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de (r_n) appartiennent à $[1 ; 1 + 10^{-9}[$;
   c) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de (t_n) appartiennent à]0,999 99 ; 1] ;
   d) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de de (t_n) appartiennent à $]1 - 10^{-7} ; 1]$;
   e) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de (x_n) appartiennent à]2,61 ; 2,62[;
   f) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de (x_n) appartiennent à]2,618 03; 2,618 04[.
2. Dans le compte-rendu, on indiquera comment on a procédé pour obtenir les termes de la suite (t_n) en expliquant en quoi la procédure est différente de celle qui a été utilisée pour (u_n), et on rédigera ses conjectures.
3. En utilisant le graphique associé au tableur (voir l'aide p. 7), visualiser le graphique qui correspond aux trois suites (r_n), (t_n) et (x_n).

Appeler la professeure pour qu'elle contrôle la feuille de calcul et le graphique.

4. Dans le compte-rendu :
   a) on fera un graphique soigné (du même type que celui de la question 3 ci-dessus), dans un repère orthonormal : on tracera les courbes C et C' qui ont respectivement pour équations $y = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $y = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, ainsi que la droite d d'équation $y = x$;
   on représentera, sur l'axe des abscisses :

   - les quatre premiers termes de (r_n) ;
   - les quatre premiers termes de (t_n) ;
   - les trois premiers termes de (x_n).

   Les traits de construction resteront visibles et montreront comment sont utilisées d et C ou C'.

   b) on rédigera ses conjectures, d'une part, sur le comportement à l'infini des suites (r_n), (t_n), (x_n) et (s_n), d'autre part, sur leur sens de variation.

Deuxième partie : faire des conjectures sur le comportement des six autres suites à l'infini, à partir d'un tableur et d'un graphique

1. Dans la feuille de calcul, calculer les 100 premiers termes des suites (w_n), (v_n), (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n)
   On pourra adopter la présentation suivante de la feuille de calcul :

	A	B	C	D	E	F	G
0	n	w(n)	v(n)	a(n)	b(n)	c(n)	d(n)
1	0.0	undef	undef	-9.0	8.0	3.0	3.0
2	1.0	undef	undef	0.7	1.4285714285	-6.0	5.7182818
3	2.0	1.0	4.0	-9.0	8.0	12.0	8.43656365

Appeler la professeure pour qu'elle contrôle la feuille de calcul.

2. A propos de la suite (w_n)
   a) Faire des conjectures sur :
      i) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à [0,6 ; 0,666 9[;
      ii) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à [0,6 ; 0,666 8[;
      iii) le comportement à l'infini de la suite (w_n) ;
      iv) le sens de variation de la suite (w_n).
   b) Dans le compte-rendu, rédiger ces conjectures et prouver celle de iv.
3. Pour la suite (v_n), faire des conjectures, qui seront rédigées dans le compte-rendu, sur :
      i) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à [1; 1,1[;
      ii) l'existence d'un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à [1; 1,05[;
      iii) le comportement à l'infini de la suite (v_n).
4. Concernant les suites (a_n) et (b_n), faire des conjectures, qui seront rédigées dans le compte-rendu :
   a) sur l'existence d'un nombre réel l tel que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ;
   b) en réponse à la question suivante : quel que soit le nombre réel A, existe-t-il un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A ?

   c) en réponse à la question suivante : quel que soit le nombre réel B, existe-t-il un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à B ?

5. Dans le compte-rendu, faire un graphique soigné comportant, dans un repère orthonormal convenablement choisi :
   a) la courbe Γ qui a pour équation $y = \dfrac{2+x}{x-1}$ sur [–9 ; 9],
   b) la droite d'équation $y = x$,
   c) les points de l'axe des ordonnées qui représentent les 4 premiers termes de (v_n) (construits en bleu à partir de Γ),
   d) les points de l'axe des abscisses qui représentent les termes de (a_n) (construits en rouge à partir de Γ et de la droite d'équation $y = x$),
   e) les points de l'axe des abscisses qui représentent les termes de (b_n) (construits en vert à partir de Γ et de la droite d'équation $y = x$).
6. Concernant les suites (c_n) et (d_n)
   a) Faire des conjectures :
      i) sur l'existence d'un nombre réel l tel que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ;
      ii) en réponse à la question suivante : existe-t-il un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à 200 ?
      iii) en réponse à la question suivante : existe-t-il un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à – 200 ?
   b) Dans le compte-rendu, rédiger les conjectures précédentes et démontrer celles qui sont faites en ii et iii.

Troisième partie : prouver

1° Démontrer que (u_n) converge vers 2

Comment définit-on qu'une suite de nombres réels converge vers un nombre réel l ?

Dire qu'une suite converge vers l signifie que **tout intervalle ouvert contenant *l*** (de la forme $]l–a ; l+b[$ où a et b désignent des nombres réels strictement positifs) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Comment démontrer que (u_n) converge vers 2, c'est-à-dire que tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang ?

Tout intervalle ouvert contenant 2 est de la forme $]2 – a ; 2 + b[$ où a et b désignent des nombres réels strictement positifs.

Quels que soient a et b strictement positifs, soit c le plus petit des deux nombres a et b. Donc $]2 – a ; 2 + b[$ contient $]2 – c ; 2 + c[$.

On démontre qu'il existe un rang n_0 tel que, tout $n \geq n_0$, on ait : $u_n \in]2 – c ; 2 + c[$.

Or $u_n \in]2 – c ; 2 + c[$ est équivalent à $|u_n - 2| < c$.

1. Montrer que $|u_n - 2| < c$ est aussi équivalent à $\dfrac{1}{c^2} < n$.
2. A partir de quel rang n_0 a-t-on $u_n \in]2 – c ; 2 + c[$?
3. En déduire la preuve des conjectures données sur la suite (u_n), à la question A 1 de la première partie.

2° Démontrer que (d_n) diverge vers +∞ ou encore que (d_n) a pour limite +∞

Comment définit-on qu'une suite de nombres réels diverge vers +∞ (ou a pour limite +∞) ?

Dire qu'une suite diverge vers +∞ signifie que **tout intervalle** de la forme $]A; +\infty[$ où A désigne un nombre réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

1. Démontrer que, quel que soit le nombre réel A, il existe un rang à partir duquel tous les termes de (d_n) sont supérieurs à A.
2. En déduire la preuve des conjectures faites à la question 6 b de la deuxième partie.

Annexe : aide à l'utilisation du tableur et du graphique pour ce TP

- Il est utile de régler le nombre de lignes du tableur correctement : menu Edit, puis Ajouter, puis Tableur, statistiques : on renseigne alors l'écran qui s'ouvre.
- Pour l'utilisation du tableur, attention aux formules saisies.
  - Pour bloquer le numéro d'une cellule lors de la recopie vers le bas d'une formule et éviter ainsi qu'il n'augmente de 1 à chaque ligne, on place le symbole $ devant le numéro de la cellule à bloquer.
  - De même, pour bloquer la lettre d'une cellule lors de la recopie vers la droite d'une formule et éviter ainsi qu'elle ne se change en la lettre suivante (dans l'ordre alphabétique) à chaque colonne, on place le symbole $ devant la lettre de la cellule à bloquer.
  - Pour bloquer le numéro et la lettre d'une cellule lors de la recopie vers le bas et vers la droite d'une formule, on place le symbole $ devant la lettre et devant le numéro de la cellule à bloquer.
- <u>Pour représenter un nuage de points à partir du tableur</u> :
  ➔ouvrir le menu Maths, puis 2-dstats, puis Nuage de points.
  Un cadre s'ouvre :
  * la plage de cellules doit contenir les abscisses et les ordonnées des points que l'on veut placer ; saisir, par exemple, A0..B19 dans plage de cellules pour tracer les 20 points dont les coordonnées figurent dans cette plage (les abscisses figurant dans la plage allant de A0 à A19 et les ordonnées dans la plage de B0 à B19) ;
  * la cellule-cible est la cellule dans laquelle va s'inscrire l'instruction pour faire le graphique ; saisir une cellule actuellement vide du tableur dans cellule-cible ;
  * ne pas cocher lignes, mais cocher valeurs.
  ➔ Si rien n'apparaît à l'écran graphique, on peut régler la fenêtre graphique, en utilisant le bouton Menu qui figure à droite du graphique, puis Voir, puis Autoscale.
- <u>Pour représenter une fonction à partir du tableur</u> :
  cliquer dans une cellule vide du tableur, puis ouvrir le menu Maths, puis Function, et saisir les données dans le cadre qui s'ouvre : l'expression de la fonction, la variable de cette fonction, la valeur minimale de la variable du tableau de valeur et le pas.
  Voir ci-dessus, si rien n'apparaît à l'écran.
- <u>Pour représenter une suite récurrente à partir du tableur</u> :
  cliquer dans une cellule vide du tableur, puis ouvrir le menu Maths, puis Suite recurrente, et saisir les données dans le cadre qui s'ouvre : l'expression de la fonction qui sous-tend la récurrente, la variable de cette fonction et la valeur du premier terme.
  Voir ci-dessus, si rien n'apparaît à l'écran