

TP n°3

L'objet de ce TP est de comprendre comment on représente dans l'espace une fonction de deux variables, de visualiser des lignes de niveau de la surface et de représenter le maximum de la production journalière d'une entreprise sous une contrainte de coût.

Le compte-rendu de ce TP est à rendre le samedi 3 mai. Une évaluation du travail sur ordinateur est faite pendant la séance.

Une entreprise, qui fabrique un certain produit, utilise pour décrire son fonctionnement et faire des prévisions le modèle suivant qui ne retient que deux variables :

- ❖ la durée journalière de travail de la main d'œuvre, exprimée en heures, et désignée par x , appartenant à $]0 ; 10]$;
- ❖ la durée journalière d'utilisation des machines, exprimée en heures, et désignée par y , appartenant à $]0 ; 12]$.

La quantité journalière produite, exprimée en tonnes, est modélisée par la fonction

$$f(x;y) = \frac{3xy}{x+y} \text{ avec } 0 < x \leq 10 \text{ et } 0 < y \leq 12.$$

On veut étudier l'évolution de la quantité journalière produite sous certaines contraintes et visualiser cette évolution.

Lors de la dernière séance, vous avez fait une représentation graphique dans un repère attaché à un cube en perspective cavalière. Vous avez placé quelques points de la représentation graphique de f , représenté par coloriage le plan d'équation $z=2$, cherché la ligne de niveau 2 de la surface qui représente f (surface vue sur l'ordinateur). Vous allez poursuivre ce travail avec XCAS.

Ouvrez une fenêtre *graph, geo3d*.

1. Objectif : représenter f .

- a) Pour cela, placez-vous dans une ligne de commande et utilisez l'*Aide* (tout en haut de l'écran) : tapez *funcplot*, et saisissez l'avant dernière proposition qui s'affiche *funcplot(x^2+y^2,[x=-1..1,y=-2..2],nstep=900)*. Cette instruction représente la fonction qui à $(x ; y)$ associe $x^2 + y^2$ pour x variant de -1 à 1 et y variant de -2 à 2 , avec 900 pas. Modifiez ce qui figure entre les parenthèses par rapport à l'objectif de la question.
- b) Pour améliorer la représentation (mettre de la couleur, obtenir une surface « remplie »), on peut ajouter entre les parenthèses, après *nstep=900*, une virgule, puis *affichage=rempli+bleu*). Représentez f par une surface « remplie en bleu ».
- c) Pour n'avoir de la représentation graphique que la partie qui correspond au modèle, modifiez la configuration en cliquant sur le bouton *cfg* à droite du graphique. Réglez *WX+*, *WX-*, *WY+*, *WY-*, *WZ+*, *WZ-* comme sur le graphique papier. Ce que l'on appelle dans la suite la « surface bleue », c'est la portion de la représentation de f qui correspond à la configuration convenablement réglée.
- d) Faites tourner la figure : pour cela, cliquez sur le bouton *Menu* à droite du graphique, puis *3-d*, puis *Animation par rotation*, et regardez.
- e) Avec la souris, placez la figure dans une position analogue à celle du graphique papier. Appelez la professeure pour qu'elle valide votre travail.

2. Objectif : représenter la ligne de niveau 2, dans l'espace avec XCAS, dans un plan avec la calculatrice.
 - a) Représentez le plan p d'équation $z = 2$. Placez-vous dans une ligne de commande, puis utilisez le menu *Geo*, puis *surface*, puis *plan*. Regardez ce que propose l'aide et adaptez en fonction de l'objectif.
 - b) Pour améliorer la représentation (mettre de la couleur, obtenir une surface « remplie »), on peut ajouter entre les parenthèses, après l'équation du plan, une virgule, puis *affichage=rempli+rouge*). Représentez p par une surface « remplie en rouge ».
 - c) Faites tourner la figure et appelez la professeure pour qu'elle valide votre travail.
 - d) Quelle fonction de la variable x saisissez-vous à la calculatrice pour qu'elle représente la courbe d'intersection de la « surface bleue » et du « plan rouge » ?
Dans le compte-rendu, précisez cette fonction, faites son étude dans un intervalle adapté au problème et dresser son tableau de variation.
 - e) Si l'entreprise se contentait d'une production journalière de 2 tonnes, quelle devrait être la durée journalière de travail de la main d'œuvre pour 2 heures d'utilisation journalière des machines ?
Rédigez la réponse dans le compte-rendu.
Faites apparaître le point A qui correspond à la solution trouvée comme l'intersection de deux plans et de la « surface bleue ». Précisez lesquels dans le compte-rendu.
Contrôlez en plaçant le point A sur le graphique : il suffit de saisir, dans une ligne de commande, $A := \text{point}(\dots, \dots, \dots)$, les parenthèses contenant les coordonnées du point.
3. L'entreprise plafonne sa production journalière à 15 tonnes. Complétez le graphique en trois dimensions pour représenter cette nouvelle situation.
Appelez la professeure pour qu'elle valide votre travail, puis effacez les plans et ne gardez sur la figure que la surface bleue.
4. Pour chaque heure, le coût total du travail est de 4 milliers d'euros et le coût total d'utilisation des machines s'élève à 1 million d'euros.
L'entreprise fixe sa dépense journalière à 36 milliers d'euros et cherche à maximiser sa production journalière sous cette contrainte.
 - a) Quelle est la relation entre x et y qui traduit cette contrainte de coût ?
L'ensemble des couples $(x ; y)$ qui satisfont à cette relation est un plan : représentez-le.
Comment est représentée la quantité journalière produite sous cette contrainte de coût ?
Appelez la professeure pour lui donner votre réponse orale.
 - b) Déterminez la fonction g , de la seule variable x , qui permet de modéliser la quantité journalière produite (en tonnes), avec l'ensemble de définition $]0 ; 10]$.
Faites l'étude de cette fonction dans le compte-rendu et dresser son tableau de variation.
 - c) Quelles sont les durées journalières de travail et d'utilisation des machines permettant d'obtenir une production journalière maximale pour un coût total de 36 milliers d'euros ?
Rédigez votre réponse dans le compte-rendu et précisez la quantité journalière maximale produite en tonnes.
Faites apparaître sur le graphique le point B qui correspond à la solution trouvée.
Appelez la professeure pour qu'elle valide votre travail.