# T P n°1
# Meilleure approximation affine d'une fonction en un point

Il s'agit du premier TP en salle infomatique, expérimenté dans une classe de terminale S, en septembre 2007, dès le début de l'année. Le logiciel utilisé est XCAS. Il s'agit d'un logiciel libre, développé en partie à l'IREM de Grenoble, qui peut être téléchargé à l'adresse suivante :
www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜parisse/giac_fr.html (ou chercher sur internet avec un moteur de recherche (taper XCAS)).

Chacune des parties du TP correspond à une séance d'une heure en salle informatique. Cependant, les élèves doivent terminer le travail « à la maison » et rendre un compte-rendu rédigé, pour chacune des parties.

Etant données une fonction $f$ et sa représentation graphique $C$ dans un repère, on considère une valeur $a$ de la variable $x$, en laquelle $f$ est dérivable, et $A$ le point de $C$, qui a pour abscisse $a$.

L'objectif est d'amener les élèves à comprendre comment est caractérisée la tangente à $C$ au point $A$, parmi toutes les droites, qui passent par $A$ (et qui ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées), ceci afin d'aboutir au développement limité d'ordre 1 de $f$ en $a$ (pour arriver au plus vite à la méthode d'Euler dans le TP n°2).

Pour ce faire, on étudie :

- d'une part, l'erreur commise quand, au voisinage de $A$, on remplace le point $M$, de coordonnées $(x\,;f(x))$, par le point $P$, qui a la même abscisse que $M$ et qui appartient à une droite quelconque, qui passe par $A$ (non parallèle à l'axe des ordonnées) et qui n'est pas la tangente à $C$ en $A$ ;
- d'autre part l'erreur commise quand, au voisinage de $A$, on remplace le point $M$, de coordonnées $(x\,;f(x))$, par le point $H$, qui a la même abscisse que $M$ et qui appartient à la tangente à $C$ en $A$.

Le logiciel permet de visualiser la tangente, mais aussi de voir que la droite quelconque $d$ « tourne autour de $A$ », en déplaçant un curseur, introduit par la définition du paramètre $m$ pour le coefficient directeur de $d$. Il permet aussi de voir « bouger » les points $M$, $H$ et $P$, qui se déplacent sur leur courbe respective, en actionnant un autre curseur dû à l'introduction du paramètre $h$ tel que $h = x - a$.

Ces deux erreurs tendent vers 0, quand $h$ tend vers 0, mais seule la seconde citée est négligeable devant $h$, quand $h$ tend vers 0. En effet, le quotient par $h$ de l'erreur commise avec la droite $d$ (qui n'est pas la tangente) ne tend pas vers 0, quand $h$ tend vers 0, alors que le quotient par $h$, de l'erreur commise avec la tangente, tend vers 0, quand $h$ tend vers 0. C'est ce qui permet de caractériser la tangente comme la droite « qui épouse le mieux la courbe au point $A$ », parmi toutes les droites qui passent par $A$.

Le calcul formel permet de contrôler les expressions obtenues et leur limite quand $h$ tend vers 0. Les élèves doivent justifier les résultats obtenus : c'est l'occasion pour eux de retravailler les théorèmes sur les limites vus en classe de première et de lever des indéterminations en utilisant, par exemple, le taux d'accroissement.

Le TP propose, dans une première partie, l'étude de la fonction « cube », au voisinage de –1, puis, dans une seconde partie, l'étude de la fonction « cube » au voisinage de $a$, nombre réel quelconque, et l'étude de la fonction « racine carrée » au voisinage de 2, puis au voisinage de tout nombre réel $a$ strictement positif. Le découpage en parties tient compte du fait que les élèves découvrent le logiciel. S'approprier l'environnement informatique et étudier seulement la fonction « cube » au voisinage de –1 constituent une première partie suffisamment dense. Pour la seconde partie, il est demandé un retour sur la stratégie globale en jeu dans la première partie, sans qu'elle soit détaillée dans l'énoncé ; de plus, ils doivent prendre l'initiative d'introduire un nouveau paramètre, qui est l'abscisse du point que l'on étudie. Les preuves demandées peuvent être faites, « à la main » ou à l'aide du calcul formel du logiciel.

Ce TP est articulé au cours. En effet, dans le cours, avant et après la première partie du TP, les élèves ont étudié la fonction « inverse » au voisinage de 1, puis de tout nombre $a$ différent de 0. Une séance a été organisée à l'aide d'un vidéoprojecteur pour présenter XCAS et montrer la saisie des principales instructions.

La synthèse, à l'issue de ce TP, sera faite en cours, en rapport avec l'objectif visé ci-dessus.

Les pages suivantes donnent l'énoncé fourni aux élèves.

# TP n°1 - première partie

L'objet de ce TP est double :

- prise en main de deux fonctionnalités du logiciel, calcul formel et graphique,
- étudier la fonction « cube » au voisinage de quelques points, graphiquement et par le calcul, et déterminer le développement limité d'ordre 1 de cette fonction en quelques valeurs, puis faire le même travail avec la fonction « racine carrée ».

*On se reportera à l'aide qui figure à la fin de ce texte, pour les instructions informatiques utiles à ce TP.On précisera les instructions exactes données au logiciel pour chacune des questions où il est utile.*

*Un compte-rendu de cette première partie est à rendre la semaine prochaine.*

Dans toute la suite, $h$ désigne un nombre réel quelconque non nul.

**Dans cette première partie, on étudie la fonction « cube » au voisinage de –1.**

On désigne par $C$ la représentation graphique dans un repère de la fonction $f\ :\ x \mapsto x^3$.

1. Quelle est la pente de $C$ au point $A$ d'abscisse $-1$ ?
2. Déterminer une équation d'une droite quelconque qui passe par $A$ et qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées (on désignera par $m$ son coefficient directeur).
3. Parmi toutes les droites qui passent par $A$, il y en a une que l'on privilégie, c'est la tangente à $C$ en $A$. On la note $T$. En donner une équation.
4. <u>En utilisant XCAS :</u>

   a) Saisir $f$, tracer $C$, placer $A$, puis tracer $T$ en utilisant l'équation qui vient d'être déterminée et contrôler en utilisant l'instruction « `tangente(C,A)` ».
   Rédiger les instructions utilisées et ce que l'on remarque.

   b) On note $d$ une droite quelconque qui passe par $A$, mais qui n'est pas $T$. Saisir $d$. Mais le logiciel ne trace pas $d$ car il ne sait pas quelle valeur donner à $m$, qui est un *paramètre*. *Voir l'aide à la fin du texte pour la saisie d'un paramètre.*
   Après avoir saisi le paramètre $m$, tracer $d$.
   En déplaçant le curseur relatif à $m$, qui apparaît à droite de l'écran graphique, faire varier la valeur de $m$. Rédiger les instructions utilisées et ce que l'on remarque.

   c) Rappelons que l'on cherche à étudier la fonction « cube » au voisinage de $-1$, ce qui signifie pour $x$ infiniment proche de $-1$, ou encore pour $h$ infiniment proche de 0 si l'on pose
   $h = x - (-1)$
   Après avoir saisi le paramètre $h$, placer :
   * le point $M$ qui a pour abscisse $-1+h$ et qui appartient à $C$,
   * le point $H$, qui a pour abscisse $-1+h$ et qui appartient à $T$,
   * le point $P$, qui a pour abscisse $-1+h$ et qui appartient à $d$.

   Faire varier la valeur de $h$ et rédiger ce que l'on remarque .

   d) « L'erreur algébrique » commise quand on remplace $M$ par $H$ étant définie comme la différence entre l'ordonnée de $M$ et l'ordonnée de $H$, soit $y_M - y_H$, l'écrire le plus simplement possible.
   Quelle est sa limite quand $h$ tend vers 0 (de quelle valeur est-elle infiniment proche quand $h$ est infiniment petit ?) ?

Rédiger l'instruction utilisée, donner le résultat, puis le justifier dans le compte-rendu en précisant les théorèmes utilisés.

e) « L'erreur algébrique » commise quand on remplace $M$ par $P$ étant définie comme la différence entre l'ordonnée de $M$ et l'ordonnée de $P$, soit $y_M - y_P$, l'écrire le plus simplement possible.
Quelle est sa limite quand $h$ tend vers 0 (de quelle valeur est-elle infiniment proche quand $h$ est infiniment petit ?) ?
Rédiger l'instruction utilisée, donner le résultat, puis le justifier dans le compte-rendu en précisant les théorèmes utilisés.

5. Ces résultats obtenus en 4.d) et 4.e) permettent-ils de distinguer $T$, parmi toutes les droites qui passent par $A$ ?

6. Sans, puis avec XCAS :

   a) Laquelle de ces deux erreurs est négligeable devant $h$ quand $h$ tend vers 0 ?

   b) Rédiger quelle instruction donner à XCAS pour le vérifier.

7. Déduire de ce qui précède le développement limité d'ordre 1 de $f$ en $-1$.

---

**Aide : quelques instructions utiles pour ce TP**

- Pour placer dans le repère le point $M$ de coordonnées (1, 3), par exemple, il suffit de taper dans la ligne de commande : « M := point (1, 3) ».
- Pour saisir une fonction $f$ qui, par exemple, à $x$ associe $x^3$, il suffit de taper « f(x) :=x^3 ».
- Pour représenter graphiquement une fonction $f$ et nommer $C$ sa représentation graphique, il suffit de taper « C :=plotfunc(f(x),x) ».
- Pour tracer dans le repère la droite $d$, définie par une équation, comme par exemple, $y = 3x + 2$, il suffit de taper dans la ligne de commande : « d :=droite(y = 3 x + 2) ».
- Pour déterminer la limite d'une fonction $u$ de la variable $h$, quand $h$ tend vers 0, il suffit de taper « limit(u(h),h,0) ».
- Pour saisir un paramètre :
  - on clique dans une des lignes à gauche de l'écran,
  - puis, dans le sous-menu de géométrie, Edit, on choisit Ajouter parametre,
  - un écran s'ouvre, qu'il s'agit de remplir en réfléchissant à ce que l'on veut faire,
  - après appui sur OK, il s'affiche en rouge assume …=[…,…,…], on valide,
  - et il s'affiche alors un curseur à droite de la figure, que l'on déplace pour changer la valeur du paramètre.

# TP n°1 - deuxième partie

**On étudie d'abord la fonction « cube » au voisinage d'une valeur quelconque, puis la fonction « racine carrée » au voisinage d'une valeur quelconque strictement positive**

*La deuxième partie de ce TP n°1 est à rendre le ……………….*

## A - La fonction « cube » au voisinage de n'importe quelle valeur réelle *a*

Reprendre les notations ($A$ désignera le point de $C$ qui a pour abscisse $a$) et la démarche de la première partie pour :

1. Faire une représentation dynamique de la situation, comportant $C$, $T$, $d$, ainsi que les points $A$, $M$, $H$ et $P$ : on doit pouvoir faire varier $A$ et tous les éléments qui sont liés à $A$.
   *Appeler la professeure pour qu'elle contrôle.*
   Dans le compte-rendu : poser le problème qui est illustré par la figure dynamique.
2. Etudier le comportement, quand $h$ tend vers 0, des « erreurs » $y_M - y_P$ et $y_M - y_H$, et démontrer que seule, l'une d'elles, est négligeable devant $h$.
   En conclusion, écrire le développement limité d'ordre 1 de $f$ en $a$.

## B - La fonction « racine carrée »

On désigne par :

- $C$ la représentation graphique dans un repère de la fonction $f \ : \ x \mapsto \sqrt{x}$ ;
- $a$ un nombre réel strictement positif ;
- $A$ le point de $C$ qui a pour abscisse $a$.

Reprendre les notations et la démarche précédente pour :

1. Faire une représentation dynamique de la situation, comportant les éléments utiles.
   *Appeler la professeure pour qu'elle contrôle.*
2. Etudier le comportement, quand $h$ tend vers 0, des « erreurs » $y_M - y_P$ et $y_M - y_H$, et démontrer que seule, l'une d'elles, est négligeable devant $h$.
   En conclusion, écrire le développement limité d'ordre 1 de $f$ en $a$.