Actions Académiques Mutualisées **Année 2008/2009**
Groupe lycée de l'Académie de Nantes

Aventures avec le Calcul Formel au lycée

Dix professeurs de l'Académie de Nantes ont travaillé, durant l'année 2008/2009, et dans le cadre des Actions Académiques Mutualisées, sur une utilisation du calcul formel au lycée .

Ces dix professeurs, qui ont travaillé sous la direction de Françoise MUNCK, IA-IPR de mathématiques dans l'Académie de Nantes, sont :

Régis BAILLY Lycée Jean Perrin 44000 Reze
Pascal BARBAUD Lycée Jean Monnet 85500 Les Herbiers
Françoise CHAMPIAT Lycée François Truffaut 85300 Challans
Gérard CORDES Lycée De Lattre de Tassigny 85000 La Roche sur Yon
Vincent FERRE Lycée Europe Robert Schuman 49311 Cholet
Philippe JONIN Lycée Estournelle de Constant 72205 La Flèche
Frédéric MARTIN Lycée Pierre Abelard 44330 Vallet
Nathalie MARY Lycée François Truffaut 85300 Challans
Olivier PINSON Lycée Auguste et Jean Renoir 49035 Angers
Jean-Luc PLANES Lycée François Truffaut 85300 Challans

Ce document réalise une synthèse des échanges qui ont eu lieu dans ce groupe autour d'activités toutes expérimentées en classe. Il tente de présenter une typologie des activités pouvant faire intervenir le calcul formel de façon pertinente tout en restant exigeant sur une bonne pratique du calcul algébrique. On y trouvera des exemples permettant d'illustrer chacun des aspects abordés et de montrer qu'en toutes circonstances c'est l'élève qui doit rester aux commandes de sa stratégie de calcul.

Ce document s'appuie sur des travaux menés pendant une année dans l'Académie de Nantes : ce n'est qu'une première réflexion qui sera complétée et enrichie par la suite.

A la fin de ce document, on trouvera une synthèse des principaux points forts identifiés ainsi qu'un tableau récapitulatif.

Nous n'avons pas voulu surcharger ce document en y intégrant pour chacune des activités présentées ci-dessous un scénario complet et un compte rendu d'expérimentation. Mais toutes ces ressources existent et sont mises en ligne sur le site de l'Académie de Nantes.

Sommaire

Modalités pratiques……………………………………………………………………………… page 2

Quelques principes retenus par le groupe………………………………………………………… page 3

Activité 1 : Autour des identités remarquables (seconde) ……………………………………… Page 4

Activité 2 : Curiosités arithmétiques (seconde) ………………………………………………….. page 6

Activité 3 : Des pavés dans un cube (seconde) ………………………………………………… page 8

Activité 4 : Jauger un réservoir (seconde) ……………………………………………………….. page 9

Activité 5 : Une famille de paraboles (première S) ……………………………………………… page 11

Activité 6 : Aires dans un trapèze (seconde) ……………………………………………………… page 13

Activité 7 : Algorithmique au lycée …………………………………………………………….. page 15

Activité 8 : Recherche de cycles dans un trinôme (première S ou terminale S)……………………page 15

Activité 9 : A partir d'un complexe de module 1 (terminale S)…………………………………..page 17

Synthèse…………………………………………………………………………………………page 19

Tableau récapitulatif……………………………………………………………………………..page 21

Modalités pratiques

► Dans l'optique d'une intégration des potentialités d'un logiciel de calcul formel, on pourra naturellement **travailler en salle informatique** mais la plupart du temps **un ordinateur ressource, installé en libre service dans la classe**, nous semble suffisant: les élèves peuvent aller consulter cet ordinateur librement, quand ils en éprouvent le besoin.

► Les logiciels utilisées ici peuvent être : Xcas (libre et gratuit), Dérive (prix abordable 450€ pour une licence établissement et professeurs. Je ne suis pas sûr que ce logiciel soit encore développé), Ti*n*spire…

Quelques principes retenus par le groupe

► La plupart des situations présentées laissent une large part au calcul formel mais ne sont pas des activités très « pointues » en calcul formel. Nous avons préféré des activités dans lesquelles le calcul formel intervient de façon ponctuelle, mais néanmoins selon nous pertinente, pour éclairer ou débloquer un problème.

► **L'utilisation du calcul formel n'empêche pas une bonne pratique le calcul algébrique.**

Deux points de vigilance sont à garder :

- Il n'y a pas lieu de recourir systématiquement au calcul formel dont l'utilisation est inutile dans de nombreuses situations . Cet outil doit être employé avec discernement.
- Quand la situation étudiée n'exige qu'un niveau de maîtrise technique abordable, un calcul algébrique réalisé à la main est toujours un attendu.

L'acquisition des automatismes de calcul algébrique reste bien un objectif.

► Dans les exemples qui suivent, on découvrira que, lors de l'utilisation d'un logiciel quelconque de calcul formel, **le nombre d'instructions à mobiliser pour un élève est très restreint.**

L'objectif est ici que l'élève ait été confronté à un certain nombre de commandes (utilisées par le professeur et/ou par lui même). **L'attendu n'est pas que l'élève mémorise toutes ces commandes durablement, mais qu'il en connaisse l'existence et qu'il puisse en exprimer le besoin.**

Autrement dit l'essentiel est que l'élève sache que ces commandes existent et qu'il soit capable d'en formuler la demande. Le professeur pourra alors rappeler la succession de touches qui correspond à cette commande.

► **L'utilisation du calcul formel n'empêche pas la mobilisation chez l'élève de l'intelligence du calcul mais tout au contraire la favorise.**

Nous avons essayé de montrer, sur un maximum d'exemples, l'élève aux commandes d'un logiciel de calcul formel C'est bien lui qui décide de la stratégie à suivre, qui prend des initiatives, qui pilote et qui choisit de déléguer certains calculs au logiciel. **L'intelligence du calcul relève complètement de l'élève.**

► Quelles tâches confier à un logiciel de calcul formel ?

L'idéal est que l'élève confie, au logiciel de calcul formel, des calculs répétitifs ou trop techniques tout en gardant l'initiative des commandes et de la stratégie.

Par exemple l'élève identifie des besoins de calcul dont il connaît la nature mais qu'il ne peut parfois pas mener à bien, n'ayant pas la dextérité nécessaire. Déléguer ces tâches à un logiciel de calcul formel peut lui permettre de finaliser l'étude attendue.

Ou encore dans le cadre d'une résolution de problème, l'élève délègue au logiciel un calcul, qu'il maîtrise dans un cas simple, mais qui est pour lui trop technique dans le cas traité.

Activité 1

AUTOUR DES IDENTITES REMARQUABLES (Seconde)
Enoncé de l'activité
Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

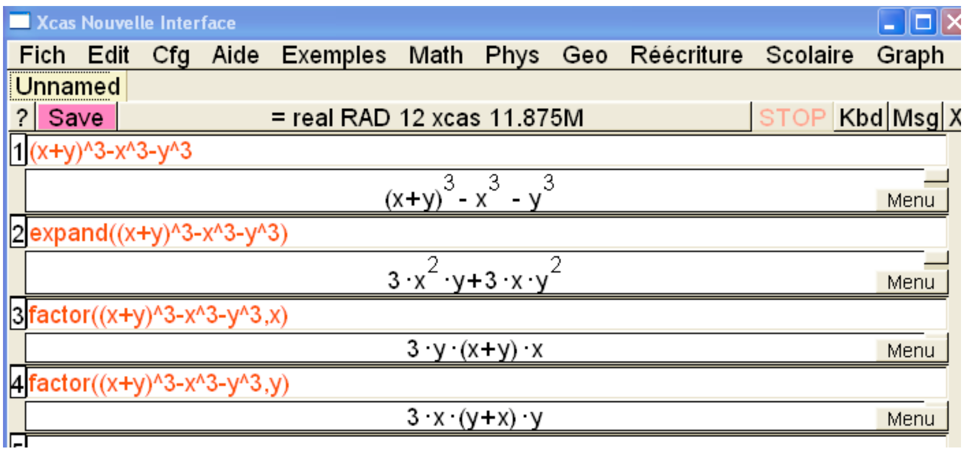
b) $(x+y)^3 = x^3 + y^3$

Question **Défi** pour stimuler les élèves les plus rapides :
Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que : $(x+y)^4 = x^4 + y^4$

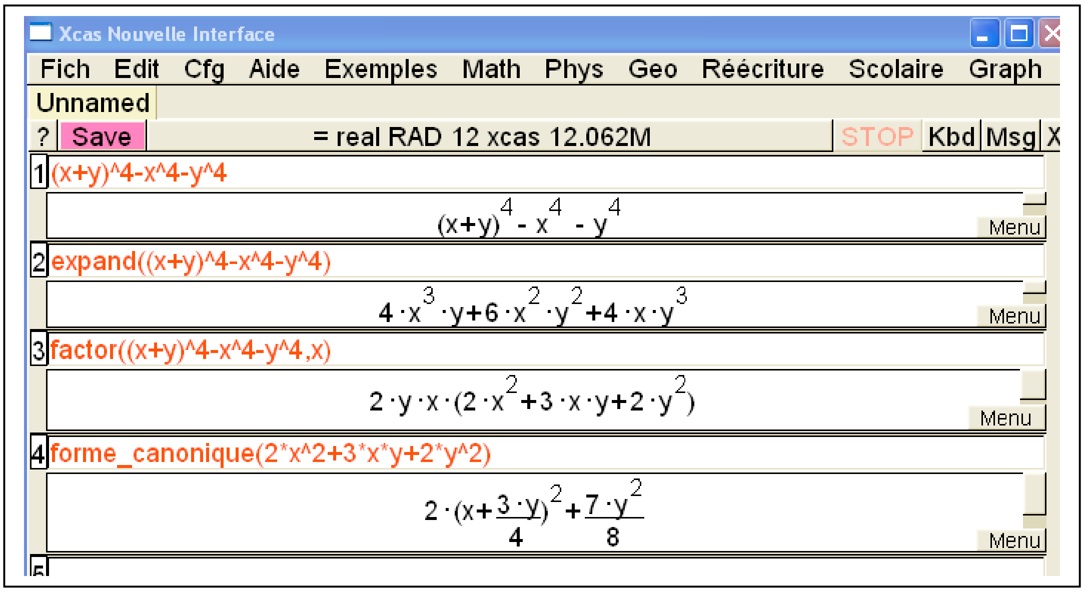
Cette activité est une situation intéressante à faire vivre en classe de seconde.
Il s'agit de revisiter les identités remarquables en travaillant sur les quantifications(souvent implicites)et les différents sens du symbole $=$ qui sont liés par ces quantifications.
L'élève ne s'approprie bien l'énoncé qu'après avoir réfléchi à des phrases du type :
« quels que soient les réels a et b ,$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ »
« il existe des réels a et b tels que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ »
« rechercher tous les réels a et b tels que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ »

► Ici, la possibilité de mobiliser le calcul formel est au service d'une différenciation pédagogique.

Le calcul formel ne dispense aucunement l'élève de l'élaboration d'une stratégie. La transformation de la question posée en une autre question que l'on peut traiter reste à sa charge. Par exemple, traduire le problème en « rechercher tous les réels a et b tels que $(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 0$. L'intelligence des calculs à faire pour traiter cette question reste également à sa charge : développer, factoriser ?
Le calcul formel, inutile pour la première question, pourra aider certains élèves pour mener à bien les calculs du b) .
Il ne dispense que de la maîtrise technique quand la maîtrise du cas simple est avérée.



Il devient précieux pour les élèves qui abordent la question défi.



► Le calcul formel contraint à une réflexion sur la nature des objets mathématiques (quel calcul faire? Quelle forme chercher pour une expression algébrique ?…).

On produit différentes écritures d'une expression par développement ou factorisation. La résolution d'une équation poussera à opter pour la forme factorisée.

Dans le défi, l'écriture de $2x^2+3xy+2y^2$ sous la forme canonique $2\left(x+\frac{3y}{4}\right)^2+\frac{7y^2}{8}$ est intéressante à exploiter et donne lieu à une véritable réflexion sur les informations apportées par cette nouvelle écriture (une somme de deux carrés est nulle ssi les deux termes sont nuls…).

Un élève a même obtenu $2x^2+3xy+2y^2=(x+y)^2+(x-y)^2+3xy$: joli mais pas très intéressant ici.

Activité 2

Enoncé : CURIOSITES ARITHMETIQUES (Seconde)
Première situation :
Calculer :
$48^2 - 47^2 - 46^2 + 45^2$
$49^2 - 48^2 - 47^2 + 46^2$
$50^2 - 49^2 - 48^2 + 47^2$
Qu'y a-t-il de remarquable ? En est-il toujours ainsi ?

Deuxième situation :
Vérifier que :
$1\times 2\times 3\times 4 + 1 = 5^2$
$2\times 3\times 4\times 5 + 1 = 11^2$
$3\times 4\times 5\times 6 + 1 = 19^2$
Qu'y a-t-il de remarquable ? En est-il toujours ainsi ?

Présentation : A partir d'une curiosité arithmétique, il s'agit de découvrir une formule algébrique. Dans la deuxième situation, plus difficile, le passage au calcul littéral, préparé par l'utilisation d'un tableur, est bien accompagné par l'utilisation du calcul formel.

Le calcul formel doit être utilisé avec discernement, uniquement dans des situations où il est pertinent. Il faut éviter l'utilisation systématique de cet outil mais plutôt valoriser l'élève qui prend l'initiative d'utiliser cet outil à bon escient.

Dans la première situation de cette activité, les élèves passent plus ou moins rapidement à une expression algébrique et le développement de cette expression se fait sans problème. **Le recours au calcul formel est inutile.**

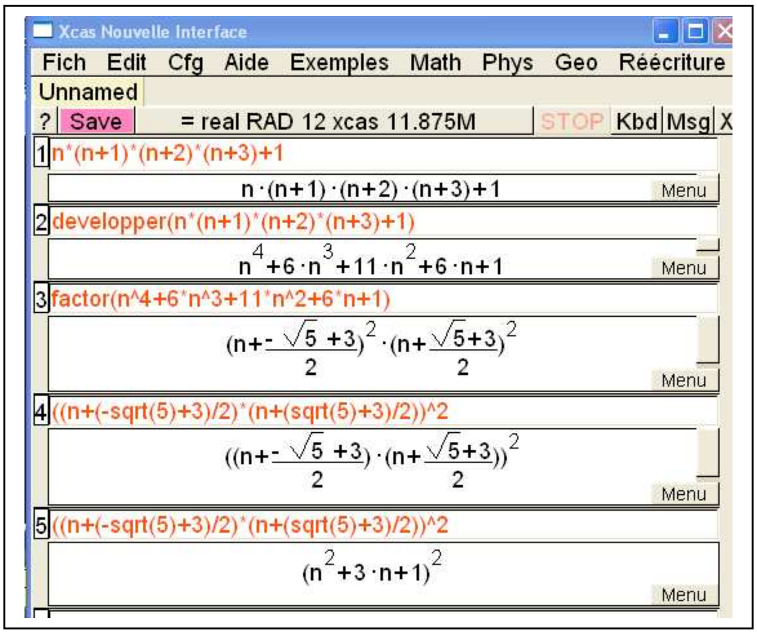
► Pour la deuxième situation, les élèves ont d'abord mobilisé un tableur pour constater qu'effectivement, le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ s'écrit sous la forme du carré d'un nombre entier N mais ils ont du mal à exprimer cet entier N en fonction de n. Ils finissent par deviner $N = n(n+3)+1$ ou $N = (n+1)(n+2)-1$.
Le tableur confirme ce résultat qui reste à prouver.

Pour la preuve, les élèves commencent par développer l'expression $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ et là ils n'hésitent pas à mobiliser le calcul formel pour vérifier les étapes du calcul.
Ils doivent ensuite développer N^2 et ils n'ont pas l'habitude de ce type de calcul. Le calcul formel rassure.

Le calcul formel permet le calcul accompagné par ordinateur.

Il permet de donner confiance aux élèves qui entreprennent un calcul long ou délicat ou inhabituel.

► Certains élèves ont directement tenté de factoriser l'expression : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$.
Avec l'accompagnement du professeur , ils ont piloté XCAS comme suit et sont venus expliquer leur résultat à la classe via le vidéoprojecteur.



Les élèves sont d'abord surpris par la complexité de l'expression, les radicaux font peur mais le professeur rassure. D'autres radicaux ont déjà été rencontrés en factorisant : $x^2 - 3 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ …et puis on peut rappeler le nombre d'or et l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

Ensuite, la discussion a été particulièrement intéressante pour le passage de l'étape 3 à l'étape 4.
La propriété $A^2 \times B^2 = (A \times B)^2$ n'apparaissant pas de manière évidente **.**

Enfin apparaît le carré d'un entier mais est-ce bien le même : $n(n+3)+1$ **,** $\left(n+1\right)(n+2)+1$ **,** $n^2 + 3n + 1$ sont-elles bien trois écritures pour un même nombre ?
A-t-on bien , pour tout entier naturel n, $n(n+3)+1 = \left(n+1\right)(n+2)+1 = \left(n+1\right)(n+2)+1$ **.**
On le vérifie à la main et pas avec Xcas.

Le calcul formel permet à l'élève de passer aux commandes, il pilote et… il adore.

L'élève identifie les calculs à faire, il décide de la stratégie à suivre et il délègue la tâche calculatoire au logiciel.

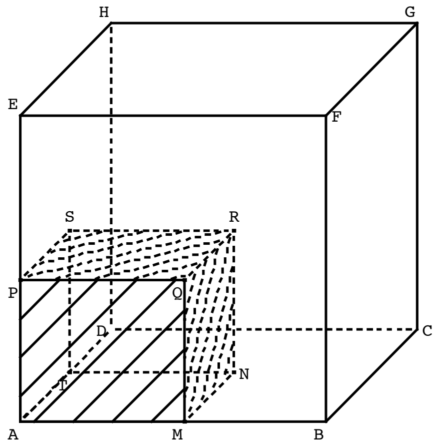
**Il confie au calculateur un calcul dont il maîtrise la nature
mais dont il ne maîtrise pas la difficulté.**

Activité 3

***Enoncé :* DES PAVES DANS UN CUBE (Seconde)**

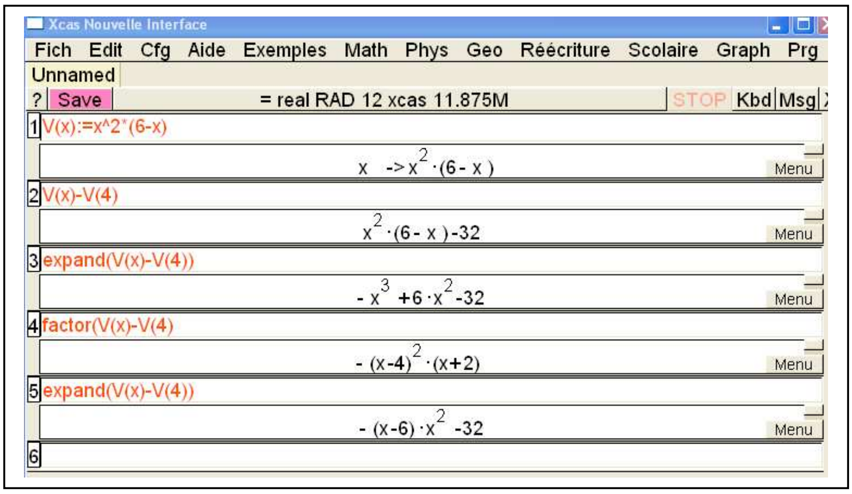
ABCDEFGH est un cube d'arête 6 cm.

On construit un point M appartenant au segment [AB] et le point P appartenant au segment [AE] tel que AM=EP. On construit alors le pavé droit AMNTPQRS de telle façon que AMNT soit un carré.



Etudier les variations du volume du pavé droit AMNTPQRS quand M varie sur le segment [AB].

En posant AM = x , l'expression du volume du pavé s'écrit $V(x) = x^2(6-x)$ et les élèves conjecturent un maximum en x = 4. Il s'agit alors de prouver cette conjecture en étudiant le signe de $V(x)-V(4)$ quand x appartient à l'intervalle [0 ;6] . Prouver cette conjecture revient à prouver que, pour tout nombre réel de l'intervalle [0 ; 6], :V(x) ≤ V(4) ou que : V(x) – V(4) ≤ 0 quand x appartient à l'intervalle [0 ; 6]. Or: V(x)–V(4) = x^2 (6–x)–32. Cette expression est une différence et son signe n'est pas facile à étudier. Les élèves souhaitent factoriser et décident de mobiliser Xcas. Ils obtiennent plusieurs nouvelles écritures de l'expression V(x)–V(4) .



Suit un travail de réflexion sur ces différentes écritures : quelle est l'écriture la plus adaptée à l'étude du signe de $V(x)-V(4)$? Discussions intéressantes…ils finissent par opter pour l'écriture : V(x)–V(4) = – (x + 2)(x – 4)^2.
Et la preuve se termine.

La stratégie de résolution du problème est entièrement restée à la charge de l'élève.

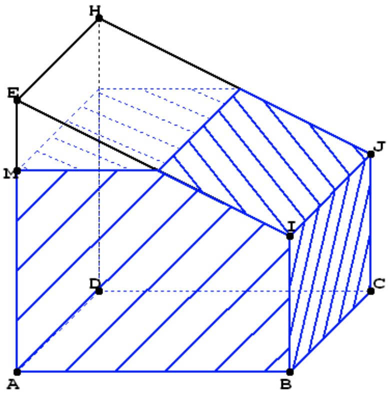
Le calcul formel a permis d'obtenir plusieurs écritures d'un polynôme du troisième degré.

L'élève analyse les différentes écritures obtenues et choisit l'écriture la mieux adaptée pour résoudre son problème.

Le calcul formel exécute une factorisation difficile à faire pour un élève de seconde : l'élève a identifié son besoin de calcul puis il confie au calculateur un calcul dont il maîtrise la nature mais dont il ne maîtrise pas la difficulté.

Activité 4

JAUGER UN RESERVOIR (Seconde)



Enoncé l'activité

Un réservoir peut être modélisé par le solide ci-dessus.
Les dimensions en centimètres sont: AB=40, BC=40, AE=40, BI=20, CJ=20.
Les faces ABCD et ADHE sont carrées, les faces IJHE et IJBC sont rectangulaires, les faces ABIE et DCJH sont des trapèzes rectangles.
La position du point M sur le segment [AE] est visible de l'extérieur du réservoir.
a)Quelle est la hauteur AM du liquide quand le réservoir est rempli aux trois quarts ?
b)Construire le long de [AE] une graduation qui indique le volume du réservoir de 4 litres en 4 litres.

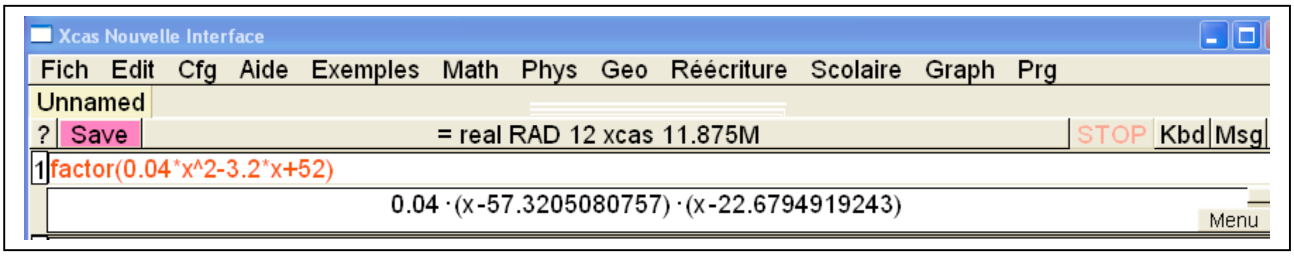
Présentation : *Avec Géospace, les élèves s'approprient la situation et avancent des conjectures. Le passage au tableur contraint à l'identification des variables , permet d'affiner les conjectures et de visualiser des accroissements de plus en plus petits du volume quand AM augmente.*

On pose $AM = x$. Le cas $x \le 20$ est facile : le volume en litres est $V(x) = 1.6x$
On travaille alors à exprimer V(x) en fonction de x, pour x>20 .
Après utilisation de Thalès et rappels sur le volume d'un prisme, plusieurs expressions viennent dont :

$$48000 - \frac{1}{2} \times (40 - x)(80 - 2x) \times 40 \text{ ou } 32000 + \frac{1}{2} \times (40 + 80 - 20x)(x - 20) \times 40 \text{ ou } -40x^2 + 3200x - 16000$$

d'où le volume exprimé en litres : $V(x) = -0.04x^2 + 3,2x - 16$.
Le tableur permet des approximations successives et la conjecture suivante : quand le réservoir est rempli aux trois quarts, AM est compris entre 22.6 et 22.7 cm.

Trouver la hauteur de liquide quand le réservoir est rempli aux trois quart revient à résoudre l'équation :
$V(x) = 36$ ou encore : $-0.04x^2 + 3,2x - 16 = 36$ soit : $0.04x^2 - 3,2x + 52 = 0$
L'équation est difficile à résoudre en seconde : les élèves pensent à une factorisation mais n'arrivent pas à factoriser : on fait appel à un logiciel de calcul formel comme Xcas .



Ce premier résultat est rassurant car on retrouve une solution voisine de 22.7 mais la factorisation n'est pas exacte (il suffit de raisonner sur les derniers chiffres du produit $57.3205080757 \times 22.6794919243$).

Je suggère l'instruction « forme canonique » déjà rencontrée :

```
1 factor(0.04*x^2-3.2*x+52)
        0.04·(x-57.3205080757)·(x-22.6794919243)
2 forme_canonique(0.04*x^2-3.2*x+52)
        0.04·(x-40.0)^2-12
```

Le problème revient à résoudre l'équation $0.04(x-40)^2 - 12 = 0$ ou $(x-40)^2 = 300$
Et, avec cette nouvelle écriture, l'élève de seconde peut terminer et conclure, après avoir éliminé la solution non valable, que la valeur exacte de la solution est : $40 - 10\sqrt{3}$.

Remarque1 : L'expression $0.04x^2 - 3,2x + 52$ peut aussi s'écrire $\frac{4x^2}{100} - \frac{32x}{10} + 52$.
Avec cette écriture Xcas fournit une factorisation plus exacte :

```
3 factor(4*x^2/100-32*x/10+52)
        (x+-√3·10 -40)·(x+√3·10-40)
        ---------------------------
                    25
```

Remarque2 : On aurait pu choisir d'utiliser l'instruction Solve, mais cette instruction ressemble davantage à une boîte noire car on maîtrise moins la nature de la tâche effectuée par le logiciel.

```
4 solve(0.04*x^2-3.2*x+52)
        [22.6794919243   57.3205080757 ]
5 solve(4*x^2/100-32*x/10+52)
        [√3·10+40   -√3·10 +40 ]
```

C'est avec cette dernière instruction qu'ils effectueront la tâche répétitive de construire une jauge de 4 litres en 4 litres.

Le calcul formel a permis d'obtenir plusieurs écritures d'un polynôme du second degré dont, en particulier l'écriture sous forme canonique.

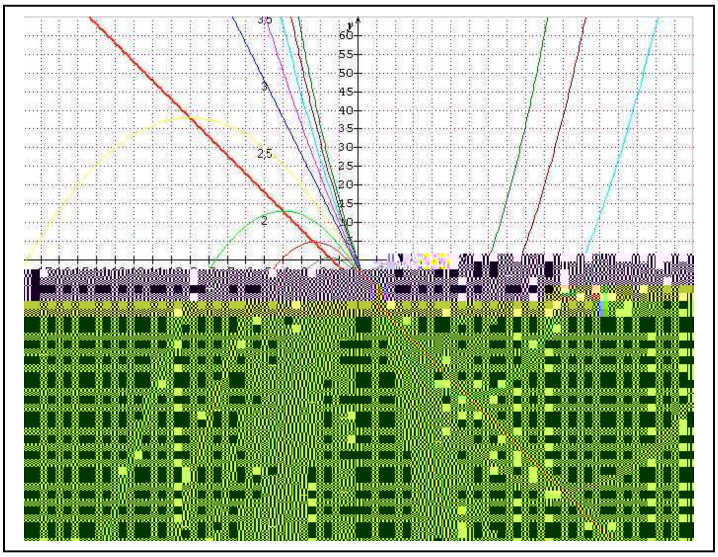
L'élève analyse les différentes écritures obtenues et choisit l'écriture la mieux adaptée pour résoudre son problème.

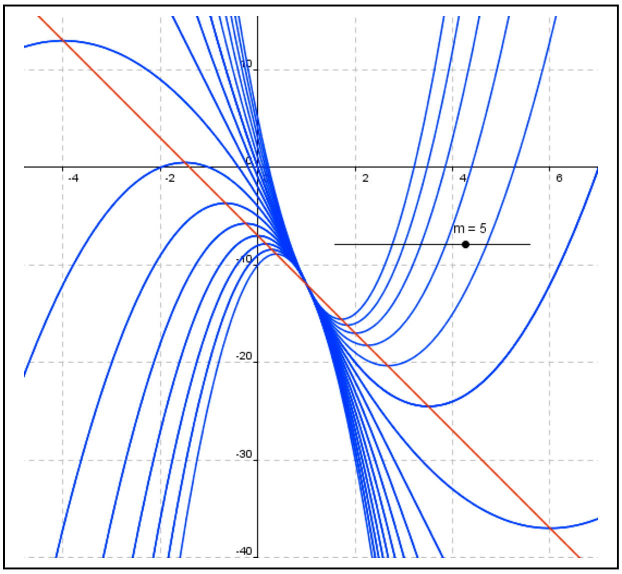
Dans un premier temps, la démarche choisie n'a pas été d'utiliser l'instruction solve (qui ressemble un peu à une boîte noire) mais plutôt d'utiliser une écriture algébrique pertinente.

Dans un deuxième temps, pour exécuter une tâche complètement répétitive, les élèves utiliseront l'instruction solve.

Activité 5

***UNE FAMILLE DE PARABOLES* (Classe de 1S)**





P est le polynôme défini par : $P(x) = (m-3)x^2 - 2(m+2)x + m - 5$ où m est un nombre réel.

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.Utiliser le grapheur Sinequanon pour représenter notre famille de courbes : bien réfléchir aux échelles et à l'intervalle dans lequel évolue m…

2.Lorsque (C) est une parabole, on appelle S_m le sommet de (C). Conjecturer, à l'aide du graphique obtenu précédemment, le lieu des points S_m lorsque m parcourt $\mathbb{R}$.

3.A la main et avec le calculateur formel …

a)Déterminer, à la main, en fonction de m, l'abscisse x_S de S :

b)En déduire, à l'aide du calculateur formel, l'ordonnée y_s de S en fonction de m.

c)Prouver que la conjecture faite à la question 2) est juste…

Présentation :

C'est un problème classique revisité par les TICE. L'intervention du calcul formel permet de s'affranchir des difficultés techniques pour mieux se concentrer sur la conduite du calcul et consolider le sens de l'équation d'une droite.

Déroulement :

La majorité des élèves conjecturent rapidement la nature du lieu , mais beaucoup éprouvent une certaine difficulté à en déterminer une équation. Ils y arrivent par lecture graphique sur l'écran mais ne pensent pas à calculer les coordonnées de sommets par le calcul. C'est pourtant ce qu'ils finissent par faire pour consolider leur conjecture.

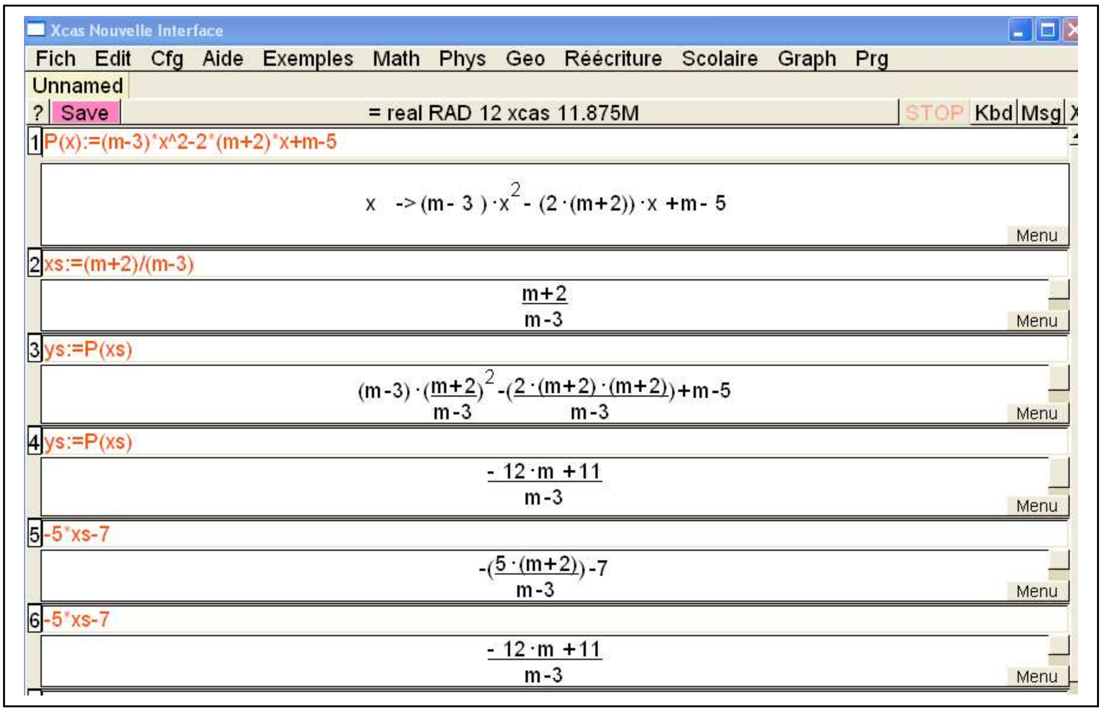
Quand m=2, S_2(4 ;–27) et ce point S_2 appartient bien à la droite d'équation $y = -5x - 7$

Quand m= 1, S_1(– 1.5 ; 0.5) et ce point S_1 appartient bien à la droite d'équation $y = -5x - 7$

On arrive donc à la conjecture : les sommets semblent se trouver sur la droite d'équation $y = -5x - 7$.(le problème de savoir si la droite est entièrement atteinte n'est pas abordé)

Il reste à établir une preuve : les élèves élaborent une stratégie de calcul « il nous faudrait les coordonnées de S et ensuite on remplacera dans l'équation de la droite pour voir si cela marche bien…Pour avoir l'abscisse de S on utilise $\frac{-b}{2a}$ mais le calcul est trop gros…Pour déterminer ys, il faut calculer f(xs), c'est impossible…

Et là le calcul formel intervient :



Les élèves ont élaboré une stratégie, ils ont identifié leurs besoins de calculs , ils ont décidé la nature du calcul à faire et ils délèguent au logiciel la réalisation technique de ces tâches .

Le logiciel de calcul formel n'est pas utilisé sous forme de boîte noire mais simplement comme un exécutant de taches techniques. L'élève, lui, est aux commandes et il en est fier.

Le logiciel de calcul formel permet de traiter des problèmes comportant des calculs compliqués (qui ne seront pas refaits à la main) : on valorisera alors les initiatives prises dans la conduite du calcul.

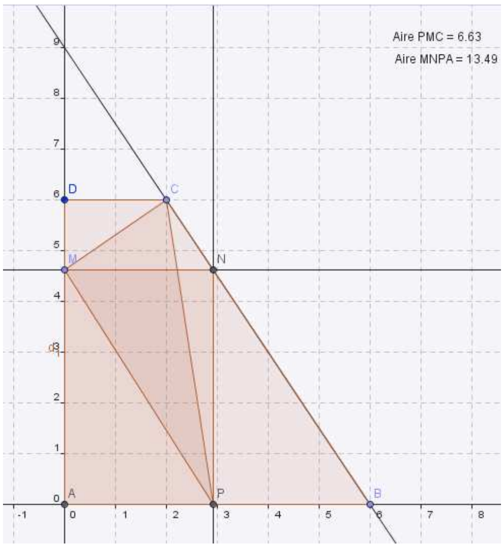
Le calcul formel apparaît ici comme une aide technique qui permet à l'élève de mieux comprendre le sens d'une notion mathématique (ici la notion d'équation de droite).

ACTIVITE 6

AIRES DANS UN TRAPEZE (classe de seconde)

Présentation : *Dans cette figure plane dynamique, on cherche à placer le point M pour avoir deux aires égales : un logiciel de calcul formel est bien apprécié pour transformer l'écriture d'une expression du second degré .*

Enoncé :



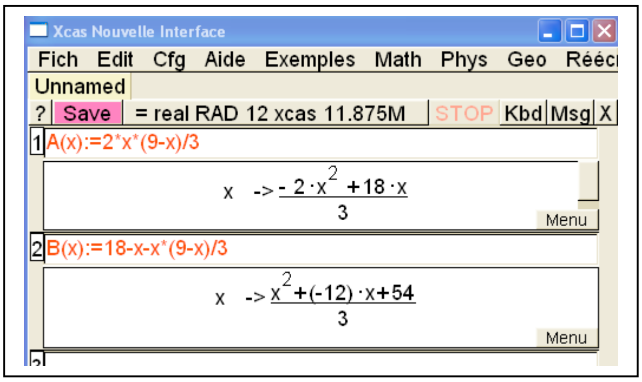
L'unité graphique est le cm.
ABCD est un trapèze rectangle de bases [*AB*] et [*CD*] tel que : $(AD) \perp (AB)$, *AB*=6, *AD*= 6 , *DC*=2.
M est un point mobile sur le côté [*AD*].
A partir de ce point *M*, on définit

- le rectangle *AMNP* avec $N \in [CB]$ et $P \in [AB]$
- le triangle *PMC*.

Où placer le point *M* pour que l'aire du triangle *AMNP* soit égale à l'aire du triangle *PMC* ?

Déroulement :
Les élèves construisent une figure dynamique avec Géogébra : ils construisent le point *M* mobile sur [*AD*] puis les triangle *AMNP* et *PMC* ? Géogébra permet d'avancer la conjecture « *x* voisin de 2.3 ». Remarquons que le recours à Géogébra ne conduit pas une conceptualisation du problème puisque les aires sont calculées directement.
Dans un deuxième temps, les élèves souhaitent utiliser un tableur ce qui va les contraindre à passer à l'algèbre : ils vont identifier les variables et mobiliser la notion de fonction. Le tableur ne permet pas de progresser beaucoup dans la conjecture. Il faudrait entreprendre un calcul « à la main » mais les expressions algébriques sont peu engageantes pour un élève de seconde. En effet : $Aire_{AMNP} = \dfrac{2x(9-x)}{3}$ et $Aire_{PMC} = 18 - x - \dfrac{x(9-x)}{3}$.

Le recours au calcul formel s'impose.
Certains souhaitent écrire l'expression $Aire_{PMC}$ sous forme d'un quotient de dénominateur 3 : le logiciel de calcul formel accompagne le calcul et rassure les élèves. Ils continuent en faisant un produit en croix à la main et obtiennent l'équation : $x^2 - 10x + 18 = 0$.

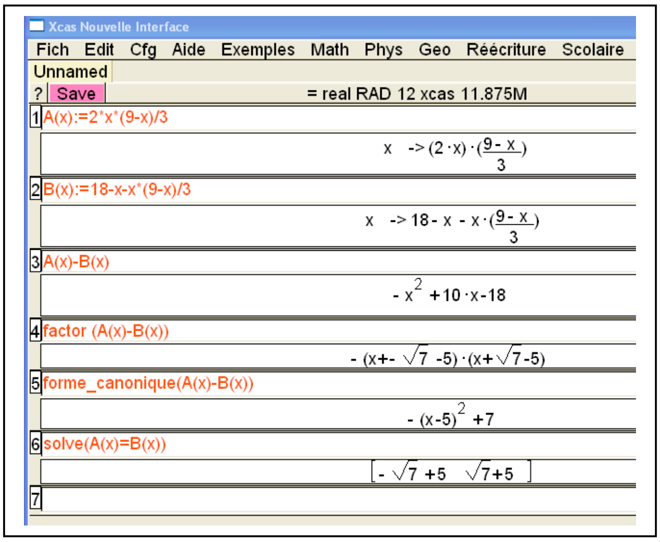


D'autres travaillent avec l'écriture $\dfrac{2x(9-x)}{3} = 18 - x - \dfrac{x(9-x)}{3}$, ils multiplient chaque membre par 3, ajoutent $x(9-x)$ dans chaque membre, puis ajoutent $3x$ dans chaque membre, ils développent et obtiennent l'équation : $x^2 - 10x + 18 = 0$.

Pour vérifier on peut demander à Xcas le calcul de la différence $18 - x - \dfrac{x(9-x)}{3} - \dfrac{2x(9-x)}{3}$.

Devant l'équation $x^2 - 10x + 18 = 0$, les élèves souhaitent factoriser mais n'y arrivent pas.
Ils vont donc confier cette tâche, un peu délicate pour un élève de seconde, au logiciel de calcul formel.
L'écriture $(x - \sqrt{7} - 5)(x + \sqrt{7} - 5) = 0$ permet d'obtenir deux solutions dont une seule appartient à [0 ;6].

On peut conclure que la valeur de x cherchée est $5 - \sqrt{7}$.



On peut aussi inciter les élèves à demander au logiciel une écriture canonique du polynôme $x^2 - 10x + 18$.
La suite du raisonnement est intéressante à détailler.

Remarque : la commande solve du logiciel de calcul formel n'est pas utilisée ici car c'est plutôt un fonctionnement en « boîte noire ». Il semble préférable de valoriser les initiatives prises par l'élève dans la conduite du calcul.

L'utilisation d'un logiciel de calcul formel met l'élève en confiance en lui permettant de vérifier les résultats d'un calcul un peu complexe.

Le plus souvent, on évite de mobiliser le calcul formel sur des commandes proches d'un fonctionnement en « boite noire » et on préfère valoriser les initiatives prises par l'élève dans la conduite du calcul.
Dans cet exemple, pour résoudre une équation de degré 2, on évite la commande « solve » et on valorise l'élève qui demande au logiciel de produire différentes écritures d'un polynôme du second degré afin de choisir l'écriture la plus adaptée.

ACTIVITE 7

Algorithmique au lycée (tous niveaux)

Présentation : *Un exemple d'une situation simple d'algorithme qui peut se gérer avec un logiciel de calcul formel.*

Enoncé :
On considère l'algorithme suivant.

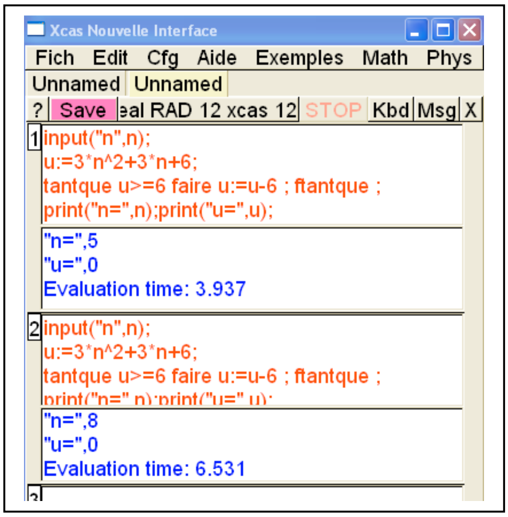
LIRE n (n entier naturel)
$3n^2+3n+6 \to u$
    Tant que $u \geq 6$
    $u-6 \to u$
    Fin tant que
ECRIRE u

a)Faire fonctionner cet algorithme pour plusieurs valeurs de n . Quelle conjecture pouvez-vous énoncer ?
b)Prouver le résultat conjecturé au a)

Déroulement :

Les élèves passent du langage naturel au langage Xcas , ils expérimentent, reconnaissent une division euclidienne par 6 puis ils formulent la conjecture :
pour tout entier n , $3n^2+3n+6$ est divisible par 6.

La preuve se fait en utilisant l'écriture $3(n(n+1)+2)$ et en distinguant le cas ou n est pair et le cas où n est impair.



Un logiciel de calcul formel permet aussi de travailler avec des algorithmes d'expérimenter et d'énoncer des conjectures.

ACTIVITE 8

Recherche de cycles dans un trinôme (Première S ou Terminale S)

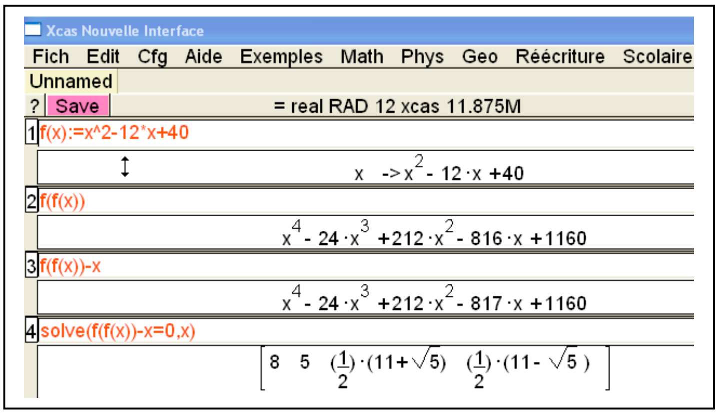
Présentation : Tableur, grapheur et calcul formel, tous ces outils sont mis en œuvre pour résoudre ce problème ouvert donné en terminale S.

Enoncé :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-12x+40$.

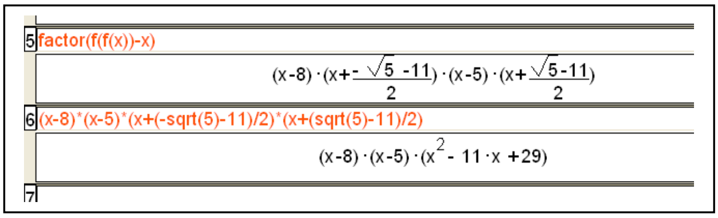
Rechercher les réels a et b vérifiant à la fois : $\begin{cases} f(a)=b \\ f(b)=a \end{cases}$

Déroulement :
Les élèves commencent par utiliser un tableur en ouvrant une première colonne avec des valeurs de x , une deuxième colonne avec des valeurs de $f(x)$, puis une troisième colonne avec les valeurs de $f(f(x)$ et l'idée vient de regarder s'il y a des valeurs de x telles que $f(f(x)= x$. Les élèves trouvent deux valeurs 5 et 8 et certains pensent avoir terminé…
Le débat s'installe…Existe-t-il d'autres solutions…Certains proposent de résoudre l'équation $f(f(x) = x$ par Xcas.

Et là , ils ne sont pas déçus .
Quatre solutions apparaissent :
les deux solutions attendues 8 et 5 et deux autres solutions étonnantes : $\frac{11+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{11-\sqrt{5}}{2}$.
Il faut essayer de comprendre…



Le problème revient à résoudre l'équation : $f(f(x)) = x$
On commence le calcul de $f(f(x)) - x$ et les élèves sont contents de pouvoir vérifier leur réponse avec Xcas.
On obtient un polynôme de degré 4 dont on peut obtenir une factorisation toujours par XCas.
Le polynôme $f(f(x)) - x$ étant factorisé, on obtient rapidement les quatre solutions.

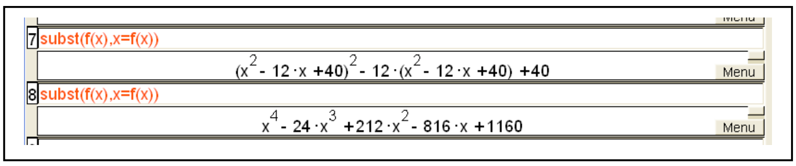


Le logiciel de calcul formel fonctionne dans un premier temps en boîte noire et il apporte une information : il y a quatre solutions au problème.

Dans un deuxième temps, il permet un accompagnement dans des calculs un peu complexes et aide à la factorisation d'un polynôme de degré 4.

Enfin, la commande de substitution contribue à aider à la compréhension d'un concept : la composition de fonctions.

Remarque : Utilisation de la fonction subst



ACTIVITE 9

A partir d'un complexe de module 1 (Terminale S)

Présentation : *Il s'agit d'une activité de synthèse sur les nombres complexes. Les élèves ont choisi de commencer à explorer cette situation en utilisant un logiciel de calcul formel.*

Enoncé

z est un nombre complexe de module 1 et distinct de 1.

Etudier le nombre complexe : $\dfrac{z+1}{z-1}$

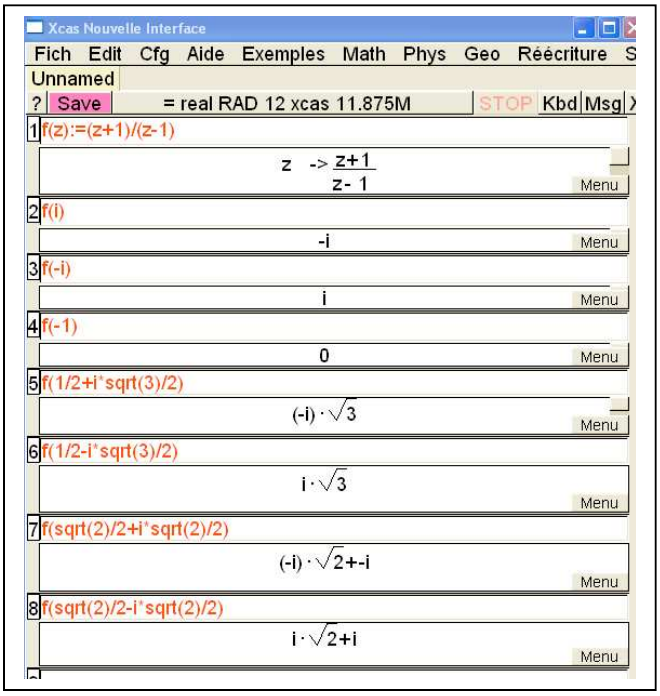
Déroulement :

► Les élèves font quelques essais en choisissant quelques nombres complexes de module 1 :

quand $z = i$, $\dfrac{z+1}{z-1} = -i$ quand $z = -i$, $\dfrac{z+1}{z-1} = i$ quand $z = -1$, $\dfrac{z+1}{z-1} = 0$

Les calculs se font d'abord à la main.

Ils ont ensuite quelques difficultés pour trouver d'autres complexes de module 1 : ils pensent à $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et le calcul devenant plus long, certains choisissent d'ouvrir Xcas.



Des conjectures sont avancées :

Pour tout complexe z de module 1 et distinct de 1 :

▪ On dirait que : $f(\mathrm{conj}(z)) = -f(z)$

▪ On dirait que : $f(\mathrm{conj}(z)) = \mathrm{conj}(f(z))$

▪ On dirait que $f(z)$ est imaginaire pur

remarque : on peut montrer que
ces trois conjectures sont équivalentes

► D'autres essais semblent nécessaires, il faut donc rechercher d'autres complexes de module 1.

Nouvelle idée : l'écriture exponentielle.

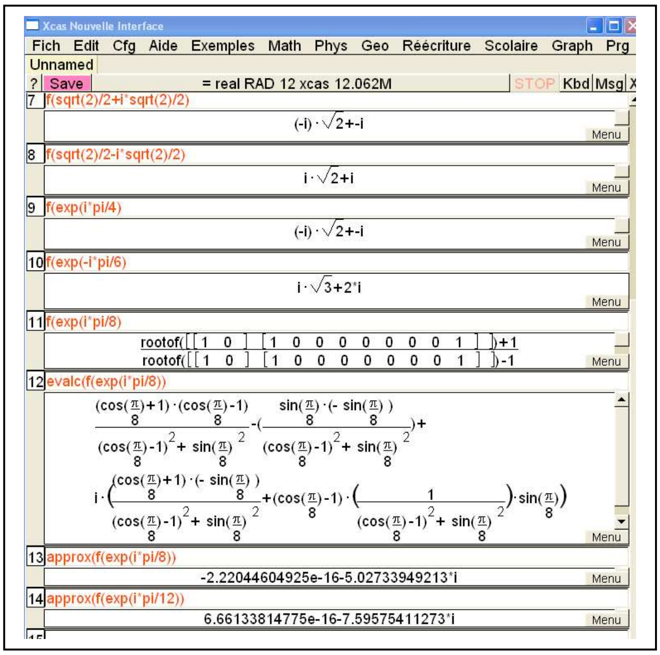
Ils obtiennent un résultat réconfortant pour $f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$,

étonnant pour $f\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$ mais les commandes

evalc ou approx permettent de continuer…

La partie réelle de $f\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$ semble bien nulle.

La conjecture « $f(z)$ est imaginaire pur » sort renforcée.

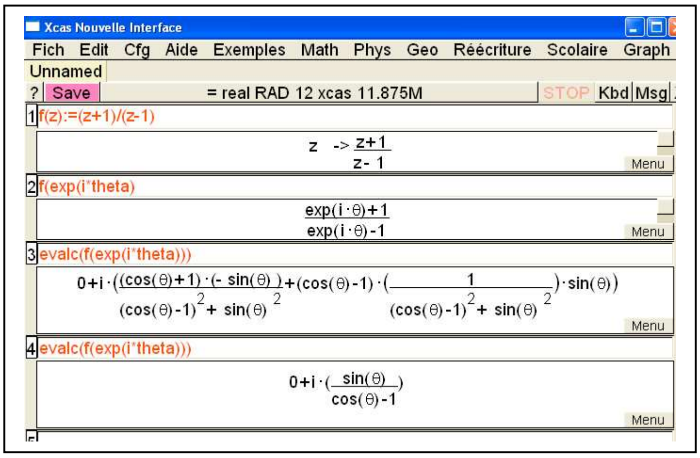


► L'idée de généraliser avec $e^{i\theta}$ apparaît enfin.

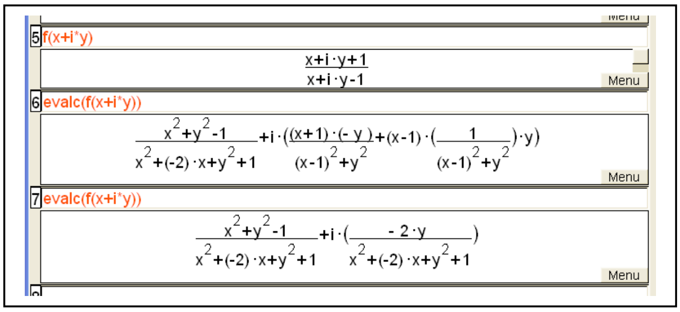
La partie réelle de $f\left(e^{i\theta}\right)$ semble nulle.

Les élèves effectue la preuve à la main en utilisant $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

Une première preuve est établie :
$f(z)$ est bien imaginaire pur.



► Certains ont pensé à la notation algébrique
mais oublient dans un premier temps que : $x^2+y^2=1$.



D'autres preuves plus géométriques sont avancées…..

Quand les calculs deviennent un peu longs, un logiciel de calcul formel permet d'expérimenter plus facilement : les résultats sont obtenus plus rapidement, les conjectures sont énoncées et testées plus facilement.

La mobilisation du calcul formel offre à l'élève la possibilité d'accompagner son calcul à la main.

Il peut aussi visualiser « l'allure » de l'expression (z+1)/(z–1) quand il choisit, pour le complexe z, une écriture algébrique, trigonométrique ou exponentielle.

Synthèse

Voici quelques idées fortes rencontrées au cours de différentes activités :

► Le calcul formel doit être utilisé avec discernement, uniquement dans des situations où il est pertinent. Il faut éviter l'utilisation systématique de cet outil mais plutôt valoriser l'élève qui prend l'initiative d'utiliser cet outil à bon escient(voir activité 2).

L'utilisation du calcul formel n'empêche pas une bonne pratique du calcul algébrique et la priorité est laissée à l'acquisition des automatismes de calcul algébrique.

► Quand les calculs sont un peu complexes, longs, répétitifs ou inhabituels, le calcul formel permet à l'élève de passer aux commandes. L'élève identifie les calculs à faire, il décide de la stratégie à suivre et il délègue la tâche calculatoire au logiciel. En fait, il confie au calculateur un calcul dont il maîtrise la nature mais dont il ne maîtrise pas la difficulté.(activité 2)

On valorisera alors les initiatives prises dans la conduite du calcul.(activité 5)

La stratégie de résolution du problème est entièrement restée à la charge de l'élève et l'intelligence du calcul relève complètement de l'élève(activité 3).

► En général, on évite de mobiliser le calcul formel sur des commandes proches d'un fonctionnement en « boite noire » et on préfère valoriser les initiatives prises par l'élève dans la conduite du calcul.

Par exemple, pour résoudre une équation de degré 2 (activités 4 et 6), on évite la commande « solve » et on valorise l'élève qui demande au logiciel de produire différentes écritures d'un polynôme du second degré afin de choisir l'écriture la plus adaptée.

De même pour l'activité 5, le logiciel de calcul formel n'est pas utilisé sous forme de boîte noire mais simplement comme un exécutant de taches techniques. L'élève, lui, est aux commandes et il en est fier.

Dans quelques cas le fonctionnement en boîte noire reste intéressant : par **exemple pour les tâches répétitives** (par exemple la jauge de l'activité 4), ou encore **pour débloquer un problème** (par exemple dans l'activité 8, le logiciel apporte une information : il y a quatre solutions au problème et la réflexion peut reprendre).

► Le calcul formel contraint à une réflexion sur la nature des objets mathématiques (quel calcul faire? quelle forme choisir pour une expression algébrique ?…).

Par exemple dans l'activité 3, le calcul formel a permis d'obtenir plusieurs écritures d'un polynôme du troisième degré. L'élève analyse les différentes écritures obtenues et choisit l'écriture la mieux adaptée pour résoudre son problème.

► La mobilisation du calcul formel permet de se dégager des tâches techniques pour mieux se concentrer sur la compréhension des concepts (exemple : équation d'une droite activité 5 ou composition des fonctions activité 8)

► Le calcul formel permet le calcul accompagné par ordinateur.

Il permet de donner confiance aux élèves qui entreprennent un calcul long ou délicat ou inhabituel.

La mobilisation du calcul formel offre aux élèves (ou à certains élèves) la possibilité d'accompagner des calculs un peu complexes(activité 8). L'utilisation d'un tel logiciel met l'élève en confiance en lui permettant de vérifier les résultats d'un calcul un peu lourd ou de mettre en place des éléments de contrôle (activité 6).

► La possibilité de mobiliser le calcul formel est au service d'une différenciation pédagogique.

On peut inciter tel élève de la classe à utiliser le logiciel alors qu'un autre ne l'utilisera pas.

On peut graduer la difficulté technique des exercices et différencier, suivant les élèves, le moment où le recours au calcul formel se fera.

► Quand les calculs deviennent un peu longs, un logiciel de calcul formel permet d'expérimenter plus facilement : les résultats sont obtenus plus rapidement, les conjectures sont énoncées et testées plus facilement (activité 9).

► Un logiciel de calcul formel permet aussi de travailler avec des algorithmes d'expérimenter et d'énoncer des conjectures (activité 7).

Voir tableau récapitulatif page suivante.

CALCUL FORMEL	Activité1	Activité2	Activité3	Activité4	Activité5	Activité6	Activité7	Activité8	Activité9
	Autour des identités	Curiosités arithmétiques	Pavés dans un cube	Jauger un réservoir	Famille de paraboles	Aires dans un trapèze	Algorithme	Cycle d'un trinôme	Complexes de module 1
Classe	seconde	seconde	seconde	seconde	1S	seconde	lycée	TS	TS
Pour traiter une expression algébrique	X	X			X	X			
Pour traiter une équationde degré>=2				X		X		X	
Pour traiter une Inéquation ou un problème de signe			X						
Pour traiter la composition de fonctions								X	
Pour traiter les nombres complexes									X
Associé à de l'Algorithmique							X		
Produit différentes écritures d'une même expression algébrique	X	X	X	X		X		X	X
Calcul accompagné		X	X	X		X		X	X
Aide à la compréhension des concepts	sens de = quantificateurs identité équation		notion de maximum		équation de droite		Divisibilité	composition de fonctions	écritures d'un complexe de module 1
Permet à l'élève de piloter un calcul					X			X	X
Aide aux élèves en difficulté	pour le b)	X		X		X			X
Permet une mise en confiance de l'élève	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Outil de différenciation pédagogique	X								X
Gestion d'un calcul compliqué					X				
Aide à l'élaboration d'une conjecture		X							X
Fonctionnement en boîte noire pour participer à une tâche plus complexe				X				X	
Utilisation non pertinente	pour le a)	pour le début							