Examen du 18 mai 2010, de 13h30 à 16h30.
Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables (netbooks) autorisés.
Ce sujet comporte 2 pages.

1. PROBLÉME 1 : CROISSANCES.

Taux de CO2 moyen dans l'atmosphère les 30 dernière années

```
1981: 340.1, 341.2, 342.8, 344.4, 345.9,
1986: 347.2, 349.0, 351.4, 352.9, 354.2,
1991: 355.5, 356.3, 357.0, 358.6, 360.6,
1996: 362.4, 363.5, 366.5, 368.1, 369.4,
2001: 371.1, 373.2, 375.8, 377.5, 379.8,
2006: 381.9, 383.7, 385.5, 387.4, 389.8
```

(1) On suppose que le taux de CO2 augmente de manière linéaire au cours du temps. Calculer la droite de régression linéaire sur ces données, la régression est-elle de bonne qualité ? Quelle est la raison de la suite arithmétique correspondante ? Quel taux de CO2 aurions-nous en 2050 selon ce modèle ?

(2) On suppose que le taux de CO2 augmente selon une exponentielle, donc le log du taux de CO2 de manière linéaire. Calculer la régression correspondante. Est-elle de bonne qualité ? Quelle est la raison de la suite géométrique correspondante ? Quel taux de CO2 aurions-nous en 2050 selon ce modèle ?

(3) L'un de ces deux modéles semble-t-il meilleur que l'autre ? Peut-on expliquer pourquoi ?

2. PROBLÈME 2 : INERTIE THERMIQUE DES OCÉANS ET DES CONTINENTS.

La température globale moyenne du globe (selon la reconstruction ESRL-PSD de la NOAA) augmente de 3.5 degrés entre les mois de janvier et juillet. On cherche à comprendre cette augmentation en faisant l'hypothèse qu'elle est due à une présence plus importante de continents dans l'hémisphère Nord que dans l'hémisphère Sud (en-dehors de la zone intertropicale peu influencée par les saisons), et au fait que les continents se réchauffent et refroidissent plus vite que l'océan (qui a une plus grande inertie thermique).

2.1. **Pourcentage.** Superficie approximative des continents en millions de km^2 :
- Nord : Amérique 24, Afrique 20, Asie 45, Europe 10
- Sud : Amérique 18, Afrique 10, Antarctique 13, Océanie 8

On assimilera la surface de la Terre à la surface d'une sphère de rayon R=6370 km. Calculer globalement et pour chaque hémisphére le pourcentage de continent et d'océan.

2.2. **Orbite circulaire.** On commence par supposer que l'énergie recue du Soleil est constante pendant l'année (orbite circulaire). On modélise le passage de l'hiver à l'été par une hausse moyenne de x degrés pour les continents et y degrés pour les océans (c'est bien sur une approximation assez grossière, certains continents se réchauffent plus que d'autres selon leur latitude, et c'est aussi vrai pour les océans). Calculer en fonction de x et y l'écart entre l'hiver et l'été pour chaque hémisphère. Quelle est la saison pour chaque hémisphére en janvier et en juillet ? Calculer en fonction de x et y l'écart entre janvier et juillet. Calculer x et x/y pour $y = 4$ et $y = 5$.

2.3. **Orbite elliptique.** L'énergie recue du Soleil est en réalité proportionnelle à l'inverse du carré de la distance Terre-Soleil. On suppose que l'orbite de la Terre est une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers, et que la Terre est le plus proche du Soleil en janvier et le plus éloigné en juillet. Calculer le rapport entre la distance Terre-Soleil en janvier et en juillet en fonction de l'excentricité de l'ellipse, puis le rapport entre l'énergie recue par la Terre en janvier et en juillet, puis la diminution $p\%$ en pourcentage de l'énergie recue entre janvier et juillet. On admettra que la température absolue diminue de $0.25p\%$ si l'énergie recue diminue de $p\%$ entre janvier et juillet et que la température absolue en janvier est environ 287 degrés (Kelvin). Quelle est la baisse de température à prévoir en raison de l'ellipticité de la trajectoire de la Terre entre janvier et juillet ? On doit donc augmenter d'autant l'écart de température à prendre en compte pour le calcul de x et y. Calculer les nouvelles valeurs de x et de x/y pour $y = 4$ et $y = 5$.

Discuter la vraissemblance du modéle en fonction des hypothèses faites (par exemple latitude des continents et des océans).

2.4. **Équation différentielle.** On suppose que la variation de température de l'océan ou des continents suit l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} = -aT + a\cos(t), \quad T(0) = \frac{a^2}{a^2+1}$$

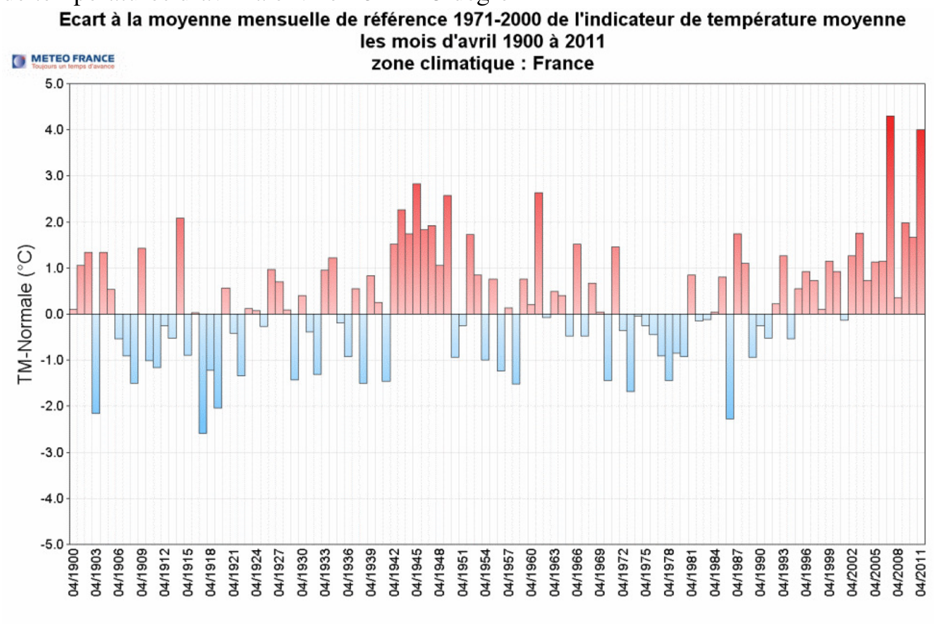
avec une constante $a > 0$ différente pour un océan ou pour un continent, où $\cos(t)$ représente l'influence de la saison. Déterminer la solution de cette équation et la mettre sous la forme

$$T(t) = A\cos(t - \phi)$$

Calculer l'amplitude A et le déphasage ϕ de $T(t)$ par rapport au signal $\cos(t)$ en fonction de a. Si le déphasage pour les continents est de 3 semaines, quel serait le déphasage pour les océans en fonction des valeurs de x/y calculées ci-dessus ?

3. Question d'actualité.

Sur le site de Meteo-France, on lit que la "température moyenne d'avril" 2011 pour la France se situe 4 degrés au-dessus de la "normale" (c'est-à-dire la moyenne des "températures moyennes d'avril" de la période de référence 1971-2000) et est le 2ème mois d'avril le plus chaud depuis 1900 (juste derrière 2007). On peut estimer l'écart-type des moyennes de températures d'avril à environ $\sigma = 1.3$ degré



Si on suppose que la "température moyenne d'avril de la France" suit une loi normale (ce qui n'a bien sur rien d'évident), combien de mois d'avril s'attend-on à trouver au-dessus ou en-dessous de la plage de normalité $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$ en 30 ans ? Combien au-dessus de 4 degrés (on pourra utiliser la valeur de `erfc(μ/sqrt(2.))` pour estimer la probabilité d'être en-dehors de l'intervalle $[m - \mu\sigma, m + \mu\sigma]$) ? Peut-on qualifier les mois d'avrils 2007 et 2011 "d'exceptionnellement chaud" ?