Examen du vendredi 5 septembre 2008, de 14h à 16h.
Documents autorisés.

1. Décalage entier entre racines.

Soit P un polynôme à coefficients entiers sans racines multiples. On dira que P a la propriété $\mathscr{I}$ si deux des racines de P sont décalées d'un entier. En d'autres termes, si $r_1, \ldots, r_n$ désignent les racines complexes distinctes de P, P possède la propriété $\mathscr{I}$ s'il existe au moins un entier parmi les différences $r_i - r_j$ pour $i \neq j$.

(1) Soit
$$R(t) = \text{resultant}_x(P(x), P(x+t))$$
Montrer que R est à coefficients entiers. Montrer que la propriété $\mathscr{I}$ est équivalente à la propriété "R possède une racine entière non nulle". On va maintenant construire un algorithme déterminant les racines entières du polynôme R.

(2) Après division de R par une puissance de t, on peut supposer que R a un coefficient constant non nul. Après division de R par son contenu, on peut aussi supposer que le contenu de R est 1. En effectuant ensuite une factorisation square-free de R, on peut se ramener au cas où R et R' sont premiers entre eux. Soit a une racine de R.

  (a) Donner une majoration de $|a|$ en fonction du coefficient constant de R.

  (b) Soit p un nombre premier ne divisant pas le coefficient dominant de R et tel que R et R' soient premiers entre eux modulo p. On peut calculer a à partir d'une racine de R modulo p en la "remontant" modulo p^k pour k assez grand (algorithme p-adique). Pour quelle valeur de k peut-on reconstruire toutes les racines entières de R ?

  (c) Comparer l'algorithme ci-dessus avec les algorithmes suivants : la factorisation de R sur $\mathbb{Z}$, la recherche numérique des racines complexes de R, la recherche des racines entières de R parmi les diviseurs entiers du coefficient constant de R et leurs opposés.

(3) Une fois les racines entières de R connues, comment peut-on en déduire les facteurs de P dont les racines diffèrent de cet(ces) entier(s) ?

(4) Soit
$$P(x) = x^6 + 9x^5 + 29x^4 + 41x^3 + 37x^2 + 59x + 31$$
Montrer que P a la propriété $\mathscr{I}$. Calculer la ou les racines entières de R et donner la factorisation correspondante de P.

(5) Écrire un programme qui effectue cet algorithme sur un polynôme quelconque. On pourra utiliser la fonction `rationalroot` de Xcas pour déterminer les racines entières de R.

(6) Application : on cherche à calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{-9x^2 - 27x - 30}{P(x)} \tag{1}$$

Décomposer cette fraction en éléments simples (donner le détail des calculs en utilisant la factorisation précédente et l'identité de Bezout `abcuv` en Xcas).

(7) Calculer la somme précédente (1). On pourra remarquer que pour k entier strictement positif, $\frac{1}{f(x+k)} - \frac{1}{f(x)}$ s'exprime comme une somme de différences $\frac{1}{f(x+j+1)} - \frac{1}{f(x+j)}$.

(8) Écrire un programme effectuant ce calcul avec une fraction quelconque, lorsque cela est possible.