Examen du vendredi 11 janvier, de 9h à 11h.
Documents autorisés.

1. Exercice : résultant

On se propose de déterminer l'équation cartésienne d'une courbe du plan donnée par des équations paramétriques qui sont des fractions trigonométriques

$$x(t) = \frac{A(\cos(t), \sin(t))}{B(\cos(t), \sin(t))}, \quad y(t) = \frac{C(\cos(t), \sin(t))}{D(\cos(t), \sin(t))}$$

Par exemple

$$x(t) = \cos(3t) = 4\cos(t)^3 - 3\cos(t), \quad y(t) = \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

(1) On pose $u = \cos(t)$, $v = \sin(t)$, on a donc les relations $u^2 + v^2 = 1$, $xB(u,v) - A(u,v) = 0$, $yD(u,v) - C(u,v) = 0$, en déduire une méthode pour calculer l'équation cartésienne de la courbe, l'appliquer à l'exemple.

(2) On pose $T = \tan(t/2)$, on exprime $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de T, puis on élimine T. Appliquer à l'exemple.

(3) Écrire une fonction `eq_cartesienne(A,B,C,D)` réalisant le calcul par la méthode de votre choix, avec en arguments les quatre expressions A, B, C, D dépendant de deux paramètres u et v.

(4) Laquelle de ces 2 méthodes vous parait le plus efficace ?

2. Système linéaire

On cherche à résoudre de manière efficace un système linéaire à coefficients entiers de la forme $Ax = b$, avec A une matrice $n \times n$ à coefficients entiers, b un vecteur colonne de taille n à coefficients entiers. On suppose de plus que $\det(A) = \pm 1$ (on prend par exemple A de coefficient $a_{ij} = \begin{pmatrix} i+j-1 \\ i \end{pmatrix}$), de sorte que la solution x est unique et à coefficients entiers. On va la déterminer par une méthode modulaire.

(1) Montrer que le système $Ax = b \pmod p$ admet une solution unique pour tout nombre premier p.

(2) On résoud le système pour plusieurs nombres premiers $p_1, ..., p_n$. Comment en déduit-on une solution de $Ax = b \pmod{\prod_i p_i}$?

(3) En utilisant les formules de Cramer et une majoration d'un déterminant, donner une majoration de la valeur absolue des composantes de x. Donner une condition sur les p_i qui permet d'en déduire la solution du système dans les entiers.

(4) Donner les détails des calculs par cette méthode de la première composante de x pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix}, \quad b = [83, -27, -43, 35]$$

en prenant des premiers p_i de l'ordre de 40000.

(5) Écrire une fonction qui implémente l'algorithme ci-dessus.