Examen du vendredi 12 janvier, durée 2h.
Documents autorisés.

1. Factorisation

Soit $P(X) = 10!X^3 + X + 120$. Déterminer les racines rationnelles de P s'il en existe (conseil : testez modulo quelques nombres premiers et choisissez celui pour lequel il y a le moins de racines). En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{Z}[X]$.

2. Résultant

On considère un polynome $f_t(x,y)$ à coefficients dépendant polynomialement du paramètre t et la courbe C_t d'équation $f_t(x,y) = 0$. On dit que C_t admet un point critique en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ si $(a,b) \in C_t$ et si les dérivées partielles de f_t par rapport à x et y s'annulent en (a,b).

On suppose que C_t admet un point critique, déterminer une équation polynomiale vérifiée par t.

Application : soit $f_t(x,y) = x^2 + y^3 + y + txy$, déterminer les valeurs de t pour lesquelles C_t admet au moins un point critique. Déterminer les points critiques correspondants (attention, on ne considère que les points réels).

3. Réduction modulaire

On se donne une matrice M à coefficients entiers que l'on souhaite réduire sous forme échelonnée par le pivot de Gauss (réduction complète, avec des 0 au-dessous et au-dessus de la diagonale partout ou cela est possible, comme renvoyée par l'instruction `rref`). On suppose que le nombre de lignes l de M est plus petit ou égal au nombre de colonnes c de M et que la sous-matrice M_1 obtenue par extraction des l premières colonnes a un déterminant d non nul. Par exemple (obtenu au lancement de Xcas par `M:=ranm(3,4)`)

$$M = \begin{pmatrix} 68 & -21 & 56 & 59 \\ 82 & -60 & -32 & 53 \\ -44 & 10 & -4 & 25 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 68 & -21 & 56 \\ 82 & -60 & -32 \\ -44 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) Soit N la matrice réduite échelonnée de M normalisée de telle sorte que le premier coefficient non nul de chaque ligne soit d. Montrer que les coefficients de N sont entiers (indication : comparer N et $(M_1)^{-1}M$). Donner une majoration sur la valeur absolue des coefficients de N.

(2) On va maintenant reconstruire N à partir de la réduction de M modulo des nombres premiers bien choisis.
Soit p_i un premier ne divisant pas d. Quel est le rang de M modulo p_i ? Soit N_i la matrice réduite de M modulo p_i où on normalise à d modulo p_i le premier coefficient non nul de chaque ligne de N_i. Montrer que N_i est égal à N modulo p_i.

(3) On effectue le calcul des réductions N_i de M modulo plusieurs premiers p_i ne divisant pas d. À quelle condition sur les p_i peut-on reconstruire N coefficient par coefficient à partir des coefficients correspondants des N_i ?

(4) Appliquer cette méthode à la matrice ci-dessus ou à une matrice aléatoire 3,4 (vérifiant la condition $d \neq 0$).

(5) Écrire un programme mettant en oeuvre cet algorithme.