Sujets du capes 2010 avec Xcas

Renee.Degraeve@wanadoo.fr

Décembre 2010

Table des matières

1 Thème : Étude de suites

1.1 L'exercice

Soit a un réel. On considère la suite $(un)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

1. Étudier les cas $a = 0$, $a = 1$ et $a = 2$.
   Dans toute la suite, on suppose que $a \in]0; 1[$.
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur [0 ; 1] par :
   $f(x) = x(2 - x)$.
3. Montrer que, pour tout entier n, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

1.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat présentera au Jury :
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;

Le candidat rédigera sur ses fiches :
sa réponse à la question 4) ;
un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Étude de suites".

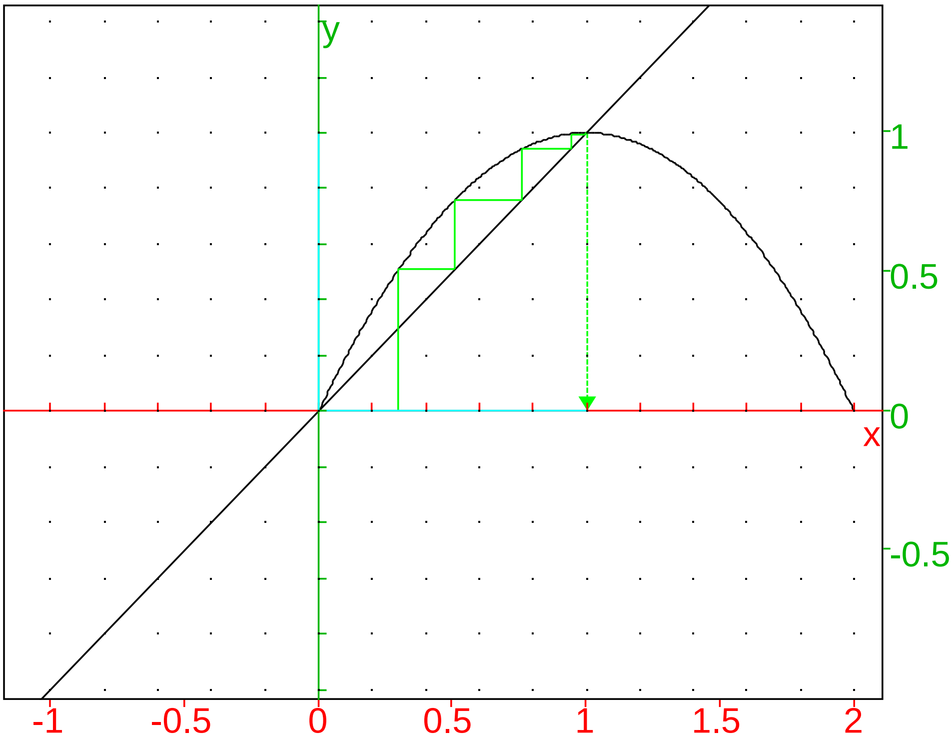
1.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. pour $a = 0$ $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 0$,
   pour $a = 1$ $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 1$,
   pour $a = 2$ $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 0$,

2. Pour étudier la fonction f, on tape :
   `f(x) :=(x*(2-x)`
   `f1 :=function_diff(f)`
   `normal(f1(x))` On obtient : `-2*x+2`
   Donc f admet un maximum en $x = 1$ qui vaut 1.
   Pour $x < 1$, f est croissante et pour $x > 1$, f est décroissante. $f(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 2$ donc pour $x \in [0; 2]$ on a $0 \leq f(x) \leq 1$.
   Pour faire le graphe de f sur [0 ;2], on tape : `plotfunc(f(x),x=0..2)`
   Pour pouvoir faire bouger a entre 0 et 1 et voir le graphe de $f(x) = x(2-x)$ pour $x \in [0; 2]$ et les 6 premiers termes de u_n , on tape dans un niveau de géométrie :
   `supposons(a=[0.3,0,1,0.1]);`

```
plotseq(x*(2-x),[a,0,2],6)
```

On obtient :



3. Puisque pour $x \in [0;2]$ on a $0 \leq f(x) \leq 1$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$: pour tout $n > 0$ et pour tout $a \in [0;2]$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$. Pour avoir le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, on tape :
   `factor(x*(2-x)-x)`
   On obtient : `-x*(x-1)`
   Puisque pour tout $n > 0$, $0 \leq u_n \leq 1$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
   si on suppose $a \in]0;1[$ pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$
   La suite u est donc croissante et majorée donc u est convergente.
   Sa limite l vérfie $l = l(2-l)$ et $l \geq a > 0$ donc $l = 1$

2 Thème : Probabilités

2.1 L'exercice

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue au hasard n tirages successifs ($n \geq 2$) d'une boule en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.

1. a) Calculer la probabilité de l'événement "toutes les boules tirées ont la même couleur".

   1 b) Calculer la probabilité de l'événement "on obtient exactement une boule blanche ".

   On considère les deux événements A et B suivants :
   A : "on obtient des boules des deux couleurs"
   B : "on obtient au plus une boule blanche"

2. Calculer les probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$ et $P(B)$.
3. Montrer que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si et seulement si l'entier n vérifie l'égalité $2^{n-1} = n + 1$.
4. En déduire qu'il existe une valeur unique de n pour laquelle A et B sont deux événements indépendants (on pourra considérer la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = 2^{n-1} - (n + 1)$ et montrer qu'elle est strictement croissante).

2.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat présentera au Jury :
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ; sa réponse à la question 1)

Le candidat rédigera sur ses fiches :
la réponse á la question 2) ; un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Probabilités".

2.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. a) "toutes les boules tirées ont la même couleur" La probabilité d'avoir n boules noires (resp blanches) est $1/2^n$ donc
   La probabilité d'avoir n boules de la même couleur" est $2/2^n = 1/2^{n-1}$

   1 b) "on obtient exactement une boule blanche " La boule blanche peut être tirée soit au 1ier, soit au 2ième,... soit au $n$ième coup. Donc la probabilité d'avoir exactement une boule blanche est $n/2^n$

2. Soient A : "on obtient des boules des deux couleurs"
   B : "on obtient au plus une boule blanche"

$A \cap B$ est l'événement "on obtient exactement une boule blanche " donc $P(A \cap B) = n/2^n$.
$nonA$ est l'événement "toutes les boules tirées ont la même couleur" donc $P(A) = 1 - 1/2^{n-1}$
B est l'événement "toutes les boules tirées sont noires" union "on obtient exactement une boule blanche " donc $P(B) = 1/2^n + n/2^n$

3. On a : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ¡=¿
   $n/2^n = (1 - 1/2^{n-1}) * (1/2^n + n/2^n)$ ¡=¿
   $n = (1 - 1/2^{n-1}) * (1 + n) = 1 + n - 1/2^{n-1}) * (1 + n)$ ¡=¿
   $1/2^{n-1}) * (1 + n) = 1$ ¡=¿
   $2^{n-1}) = (1 + n)$
4. Soit $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$ pour $n \geq 2$ $u_{n+1} - u_n = 2^n - (n+2) - 2^{n-1} + (n+1) = 2^{n-1} - 1$ puisque $n \geq 2$ on a $2^{n-1} - 1 \geq 2 - 1 = 1 > 0$ donc u est strictement croissante. pour $n = 2$ on a $u_2 = -1$, $u_3 = 0$ puis $u_n > 0$ pour $n > 4$ Donc il existe une valeur unique de n pour laquelle A et B sont deux événements indépendants et ette valeur est $n = 3$

3 Thème : Équations différentielles

3.1 L'exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

1. Soit C la courbe représentative de la fonction exponentielle $x- > e^x$.
   Pour tout point M d'abscisse t appartenant à C, on considère le point P de coordonnées $(t, 0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M à C avec l'axe des abscisses. Montrer que la distance PN est constante.
2. Dans la suite de l'exercice f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive, dérivable et dont la fonction dérivée est strictement positive. Pour tout point M d'abscisse t appartenant à la courbe représentative de f , on considère le point P de coordonnées $(t, 0)$ et le point N , point d'intersection de la tangente en M à la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.
   2.a) Calculer la distance PN en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.
   2.b) Déterminer une équation différentielle (E_k) vérifiée par les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, strictement positives, dérivables et dont la fonction dérivée est strictement positive, pour lesquelles la distance PN est une constante k.
   2.c) Déterminer les fonctions f solutions de (E_k).

3.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat présentera au Jury :
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;
sa réponse à la question 2).

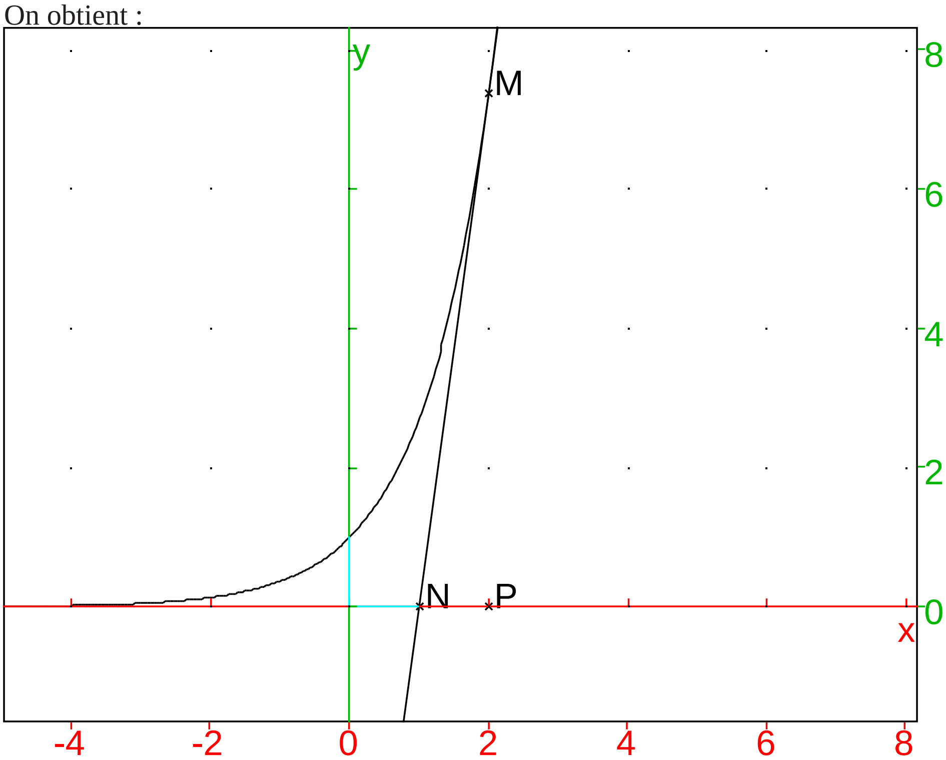
Le candidat rédigera sur ses fiches :
un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Équations différentielles".

3.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. La longueur PN est constante.
   On tape :

```
C:=plotfunc(exp(x));
assume(t=[2,-5,5,0.1]);
M:=point(t,exp(t));
P:=point(t);
T:=tangente(C,M);
N:=inter_unique(T,droite(y=0));
normal(longueur(P,N));
```

On obtient :



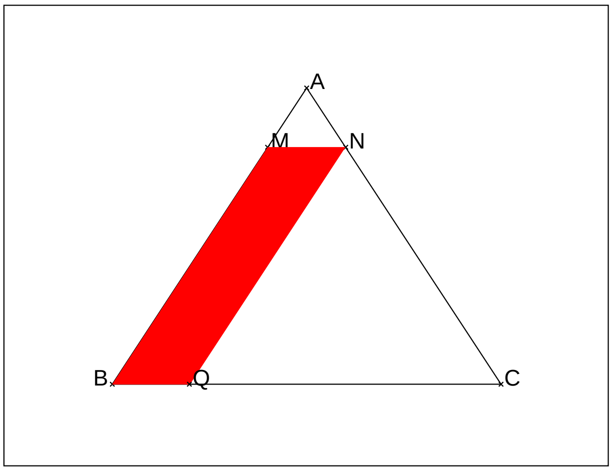
L'équation de T : `droite(y=(-t*exp(t)+exp(t)+exp(t)*x))`
Le point N est : `point(t-1)`
La longueur de PN : `1`
On a en effet si $f(t) = \exp(t)$:
T a pour pente $f'(t) = \exp(t)$ et passe par le point $M = (t; f(t)$ et son équation est donc : $y = f'(t) * (x - t) + f(t) = \exp(t) * (x - t + 1)$
N est donc le point $(t - 1; 0)$
La longueur de PN vaut donc $|t - (t - 1)| = 1$

2. On a :
T a pour équation : $y = f'(t) * (x - t) + f(t)$,
N est donc le point $(t - f(t)/f'(t); 0)$ (car $f'(t) \neq 0$)
La longueur de PN vaut donc $|t - (t - f(t)/f'(t))| = f(t)/f'(t)$ car $f(t)/f'(t) > 0$
L'équation E_k est donc : (E_k) $f(t)/f'(t) = k$ soit l'équation différentielle $ky' = y$
Pour résoudre cette équation on a :
si $k = 0$ alors $y(t) = 0$
Si $k \neq 0$ alors $y' = y/k$ donc $y(t) = c * \exp(t/k)$.
Avec `Xcas`, on tape :
`desolve(k*y'=y)` et on obtient `c_0*exp(x/k)`
ou on tape :
`desolve(k*diff(y,t)=y, [t,y])` et on obtient `c_0*exp(t/k)`

4 Thème : Calcul de grandeurs : longueurs, aires, volumes

4.1 L'exercice

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AC = 5$ et $BC = 6$. Un point M se déplace sur le segment $[AB]$ en restant différent des points A et B. Le point N est l'intersection de (AC) et de la parallèle à (BC) passant par M. On désigne par Q le point du segment $[BC]$ tel que le quadrilatère $MNQB$ soit un parallélogramme. On se propose de déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du parallélogramme $MNQB$ soit maximale. Pour cela on pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire du parallélogramme $MNQB$.



1. Montrer que $MN = \frac{6}{5}x$ et en déduire l'aire du triangle AMN.
2. Montrer que $QC = \frac{6}{5}(5 - x)$ et en déduire l'aire du triangle CNQ.
3. Montrer que $f(x) = \frac{12}{25}(-2x^2 + 10x)$.
4. Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est maximale.

4.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat présentera au jury :

Les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice ;

un énoncé à présenter en classe de Seconde pour résoudre la question 4) de l'exercice.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

sa réponse à la question 1). un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : "Calcul de grandeurs : longueurs, aires, volumes".

4.3 Solution de l'exercice sans `Xcas`

4.3.1 Réponses aux différentes questions

1. 0n calcule la hauteur h_A du triancle ABC. On a d'après Pythagore :
   $h_A^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ donc $h_A = 4$.
   Les triangles AMN et ABC sont semblables donc $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$
   Donc $MN = BC\frac{AM}{BA} = \frac{6x}{5}$.
   La hauteur h du triangle AMN issue de A a pour longueur :
   $h = \sqrt{x^2 - MN^2/4} = \sqrt{x^2 - \frac{9x^2}{25}} = \frac{4x}{5}$
   L'aire du triangle AMN est donc $4x/5 * 3x/5 = \frac{12x^2}{25}$
   On peut aussi dire que l'aire du triangle ABC vaut 4*6/2=12
   Les triangles AMN et ABC sont homothétiques de rapport $k = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{5}$
   Donc l'aire du triangle AMN est $k^2 * 12 = 12 * (\frac{x}{5})^2 = \frac{12x^2}{25}$
2. Les triangles NQC et ABC sont semblables de rapport $\frac{NQ}{AB} = \frac{QC}{BC} = \frac{5-x}{5}$
   Donc $QC = BC\frac{NQ}{BA} = \frac{6(5-x)}{5}$
   L'aire du triangle NQC est donc $12 * (\frac{(5-x)}{5})^2$
3. L'aire du parallélogramme $MNQB$ s'obtient en enlevant à l'aire de ABC l'aire des 2 triangles précédents : $f(x)$ vaut donc :
   $12 - \frac{12x^2}{25} - 12 * (\frac{(5-x)}{5})^2 = \frac{12}{25}(25 - x^2 - (x^2 + 25 - 10x)$
   On peut aussi dire que l'aire de $NMBQ$ est égale à :
   $MN(h_A - h) = \frac{6x}{5}(4 - \frac{4x}{5} = \frac{24x}{25}(5 - x)$
4. Donc : $f(x) = \frac{12}{25}(-2x^2 + 10x)$
   On a $f'(x) = \frac{12}{25}(-4x + 10)$ donc d'apres le signe de $f'(x)$, la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est maximale est $x = 5/2$ et M est alors le milieu de AC. Ce maximum vaut 6 soit la moitié de l'aire du triangle ABC.

4.3.2 Solution de l'exercice en analytique

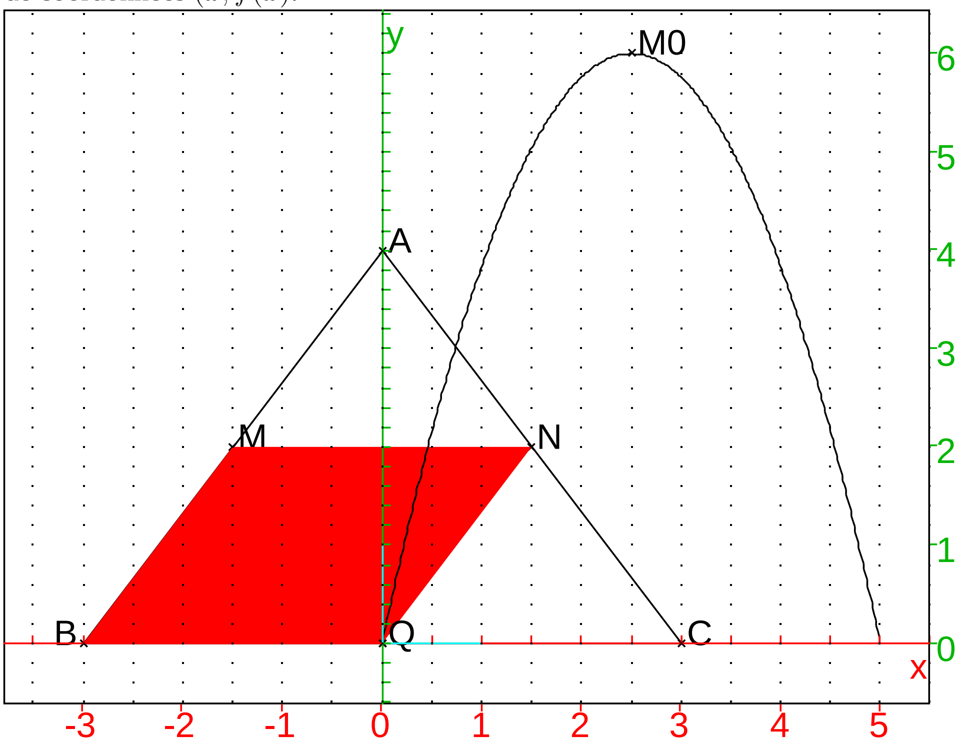
On pose $BM = x$. On choisit comme repère : OCA avec O le milieu de BC.
On a : $A = (0; 4), B = (-3; 0), C = (3; 0)$
Pour avoir l'aire du parallélogramme $MNQB$ il suffit de connaitre la longueur de MN et l'ordonnée de M.
Les triangles AMN et ABC sont semblables donc $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$
. Donc $MN = BC\frac{AM}{BA} = \frac{6x}{5}$.
La droite (A, B) a pour équation : $y = 4x/3 + 4$
M a pour abscisse $-3x/5$ donc pour ordonnèe $-4x/5+4$. L'aire du parallélogramme $MNQB$ est donc :
$4\frac{-x+5}{5}\frac{6x}{5} = \frac{12}{25}(-2x^2 + 10x$
Remarque Pour montrer que l'aire du parallélogramme $MNQB$ est maximale lorsque MN passe par les milieux de AB et de AC, il est plus judicieux de prendre comme paramètre l'ordonnée de M et d'utiliser un repère d'origine B et de prendre BC comme axe des x.

4.3.3 Réponses aux différentes questions avec Xcas

Avec Xcas on a la possibilité de définir paramètre formel x en mettant par exemple dans un niveau de géométrie : `assume(x=[1,0,5,0.1]);`
Cela permet de faire la figure avec $x = 1$, de faire apparaitre un curseur qui permet de changer cette valeur entre 0 et 5 avec un pas de 0.1 et surtout de faire faire à Xcas les calculs en fonction du paramètre formel x.
On ouvre un niveau de géométrie et on tape :

```
B:=point(-3,affichage=quadrant2);
C:=point(3);
A:=point(4*i);
triangle(A,B,C);
assume(x=[1,0,5,0.1]);
M:=point(4*i+x/5*(B-A));
N:=point(4*i+x/5*(C-A));
p:=parallelogramme(N,M,B,Q,affichage=1+rempli):;p;
legende(Q,"Q",quadrant2);
f:=unapply(aire(N,M,B,Q),x);
plotfunc(f(x),x=0..5,affichage=4+epaisseur_ligne_2);
M0:=point(x+i*f(x),affichage=4+epaisseur_point_2);
```

On obtient sur le même écran la figure, le graphe de $f(x)$ et sur ce graphe le point de coordonnées $(x; f(x))$.

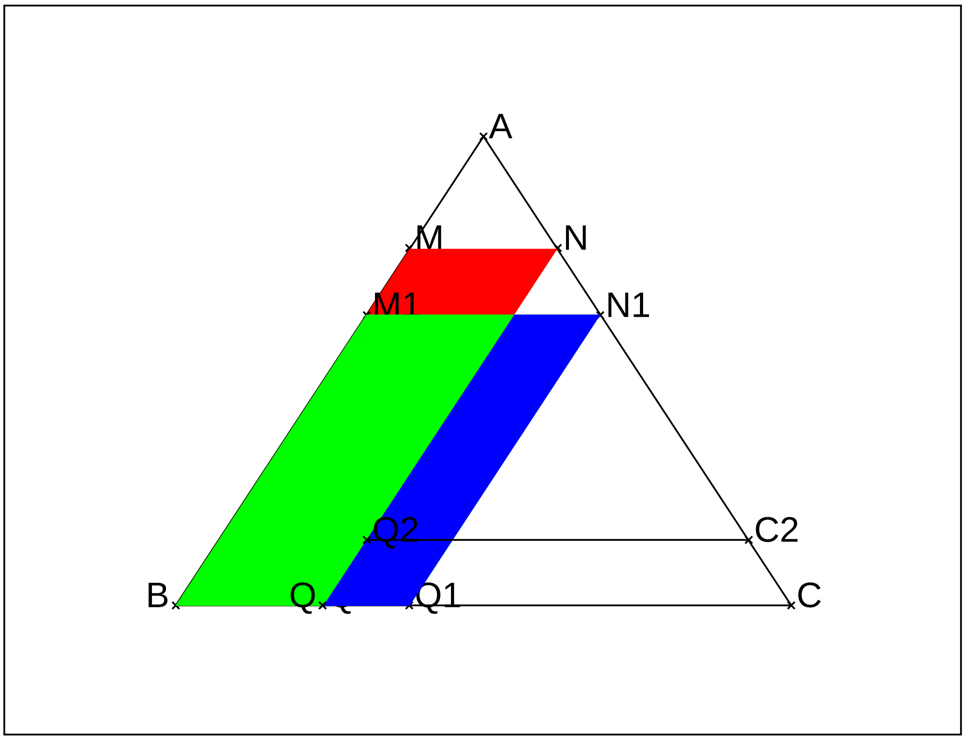


On peut ainsi voir évoluer la figure en fonction du paramètre x et observer : pour cela on fait bouger le curseur `x` pour voir le point M se déplacer sur AB et le point $M0$ d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$ (i.e. l'aire de $NMBQ$), se déplacer sur le graphe de f. Puis, on fait faire le calcul à `Xcas`.
On tape `normal(longueur(M,N),aire(A,M,N))`
On obtient `(6*x)/5,12/25*x^2`
On tape `normal(longueur(Q,C),aire(Q,C,N))`
On obtient `(-6*x+30)/5, 12/25*x^2-24/5*x+12`
On tape `f1 :=function_diff(f)`
On obtient `(' x')->-(24*2*' x')/25+24/5`
On tape `solve(f1(x)=0` et on obtient `5/2`
On tape `f(5/2)` et on obtient `6`

4.4 Solution géométrique de l'exercice avec `Xcas`

`Xcas` sert ici à faire la figure et faire évoluer les paramètres pour l'observation et le contrôle des conclusions.
Pour faire la figure on tape (Si O est le milieu de BC, alors $AO = 4$) : On donne à M une autre position $M1$ et on regarde comment les aires des parallélogrammes $MNQB$ et $M1N1Q1B$ évoluent.

```
B:=point(-3,affichage=quadrant2);
C:=point(3);
A:=point(4*i);
triangle(A,B,C);
assume(x=[1,0,5,0.1]);
M:=point(4*i+x/5*(B-A));
N:=point(4*i+x/5*(C-A));
p:=parallelogramme(N,M,B,Q,affichage=1+rempli):;
p;
supposons(x1=[3.8,0,5,0.1]);
M1:=point(4*(i)+x1/5*(B-A));
N1:=point(4*i+x1/5*(C-A));
parallelogramme(N1,M1,B,Q1,affichage=2+rempli);
legende(Q,"Q",quadrant2);
I:=inter_unique(droite(M1,N1),droite(N,Q));
parallelogramme(Q,Q1,N1,I,affichage=4+rempli);
Q2:=translation(N-N1,Q1);
C2:=translation(N-N1,C)
segment(Q2,C2);
segment(Q2,Q1);
segment(-1.5+2*i,1.5+2*i,affichage=3+ligne_tiret);
```



On remarque que :

1. Les triangles AMN et NQC sont semblables à ABC
2. Si M et $M1$ sont symétriques par rapport au milieu de AB alors les parallélogrammes $MNQB$ et $M1N1Q1B$ ont même aire. En effet les triangles AMN et $N1Q1C$ sont égaux ainsi que les triangles $AM1N1$ et NQC donc ont même aire. La fonction $f(x)$ ègale à l'aire du parallélogramme $MNQB$ est donc symétrique par rapport à la droite $x = AB/2$
3. On suppose alors $x < x_1 < AB/2$ donc $MN < M1N1 < BC/2$.
   l'aire de $MNQB$ est composée de l'aire rouge et de l'aire verte
   l'aire de $M1N1Q1B$ est composée de l'aire verte et de l'aire bleue
   On va comparer l'aire rouge et l'aire bleue :
   On fait effectuer au triangle $N1Q1C$, une translation de vecteur $\overrightarrow{N1N}$: $N1$ se transforme en N, $Q1$ se transforme en $Q2$, C se transforme en $C2$, Donc les triangles $N1Q1C$ et $NQ2C2$. De plus les triangles $NIN1$ et $Q2QQ1$ sont égaux et cela a pour conséquence que les parallélogrammes $QQ1N1I$ et $CC2Q2Q1$ ont même aire. Pour vérifier on peut taper :
   `aire(Q1,C,C2,Q2)==aire(Q,Q1,N1,I)` et obtenir `1`.
   On a : $Q1C = BC - BQ1 = BC - M1N1$ et $M1N1 < BC/2$ donc $Q1C > BC/2 > MN$.
   On en déduit que l'aire bleue est plus grande que l'aire rouge c'est à dire que lorsque x croit de 0 à $AB/2$ la fonction est croissante et que par symétrie lorsque x croit de $BC/2$ à BC la fonction décroit.

Le maximum est atteint pour $x = AB/2$ et vaut la moitié de l'aire de ABC. Cela est général et ne dépend pas de la forme du triangle ABC

4.5 L'exercice avec un triangle ABC rectangle en B ou quelconque

4.5.1 L'énoncé

- Soit un triangle ABC rectangle en B. Un point M se déplace sur le segment $[AB]$ en restant différent des points A et B. Le point N est l'intersection de (AC) et de la parallèle à (BC) passant par M. On désigne par Q le point du segment $[BC]$ tel que le quadrilatère $MNQB$ soit un rectangle. On se propose de déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du rectangle $MNQB$ soit maximale.
- Soit un triangle ABC quelconque. Un point M se déplace sur le segment $[AB]$ en restant différent des points A et B. Le point N est l'intersection de (AC) et de la parallèle à (BC) passant par M. On désigne par Q le point du segment $[BC]$ tel que le quadrilatère $MNQB$ soit un parallélogramme. On se propose de déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du parallélogramme $MNQB$ soit maximale.

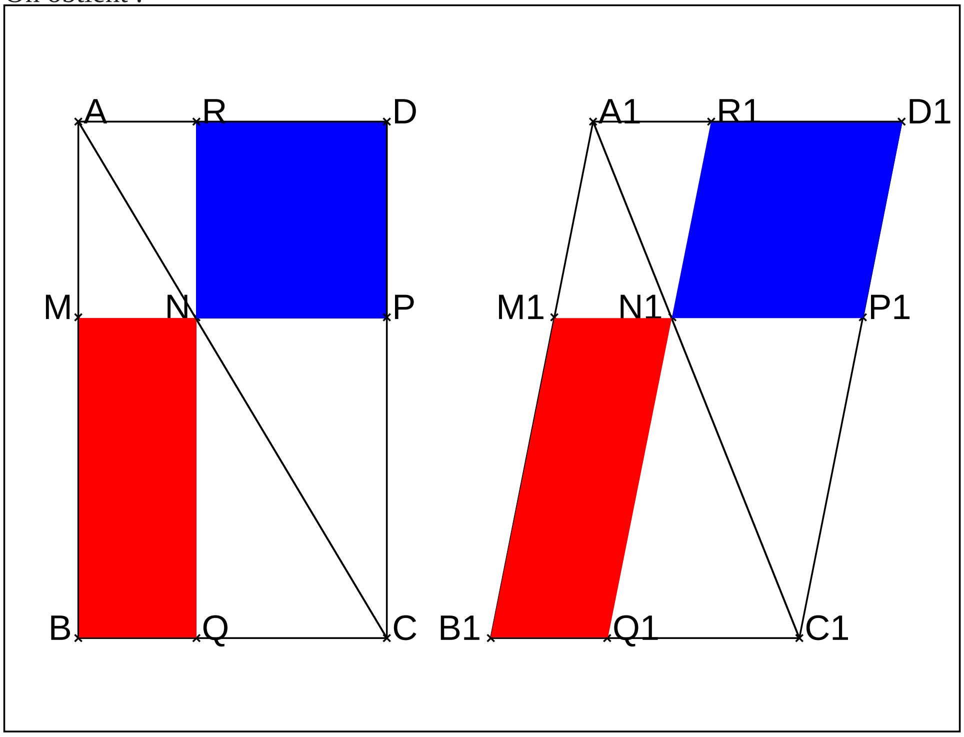
4.5.2 Un lemme

Soit un triangle ABC rectangle en B et un triangle $A1B1C1$ quelconque.
On définit le point D pour que $ABCD$ soit un rectangle et le point $D1$ pour que $A1B1C1D1$ soit un parallélogramme. On fait les 2 figures suivantes en posant $y_M = t$, pour cela on tape par exemple :

```
A:=point(-3,5);
B:=point(-3,'affichage'=quadrant2);
C:=point(0,'affichage'=quadrant2);
O:=milieu(A,C);
triangle(A,B,C);
supposons(t=[3.1,0,5,0.1]);
M:=point(-3+t*(i),'affichage'=quadrant2);
N:=point(-3*t/5+i*t,affichage=quadrant2);;
Q:=point(-3t/5);
quadrilatere(N,M,B,Q,affichage=1+ rempli);
quadrilatere(N,P,D,R,affichage=4+ rempli);
P:=point(i*t);
R:=point(-3t/5)+i*5);
D:=point(5i);
triangle(A,D,C);
A1:=point(2,5);
B1:=point(1,'affichage'=quadrant2);
C1:=point(4);
```

```
D1:=point(5+5i);
M1:=point(1+t/5+t*(i),'affichage'=quadrant2);
P1:=point(4+t/5+t*(i));
O1:=milieu(A1,C1);
triangle(A1,B1,C1);
N1:=point(4-2*t/5+t*(i),'affichage'=quadrant2);
Q1:=point(4-3t/5);
triangle(A1,D1,C1);
R1:=point(5-3t/5+5i);
quadrilatere(N1,M1,B1,Q1,affichage=1+ rempli);
quadrilatere(N1,P1,D1,R1,affichage=4+ rempli);
segment(-3+(5-t)*i, -3+3t/5+(5-t)*i);
segment(-3+3t/5, -3+3t/5+(5-t)*i);
segment(1+(5-t)/5+(5-t)*i, 1+(5+2t)/5+(5-t)*i);
segment(1+(3t)/5, 1+(5+2t)/5+(5-t)*i);
```

On obtient :



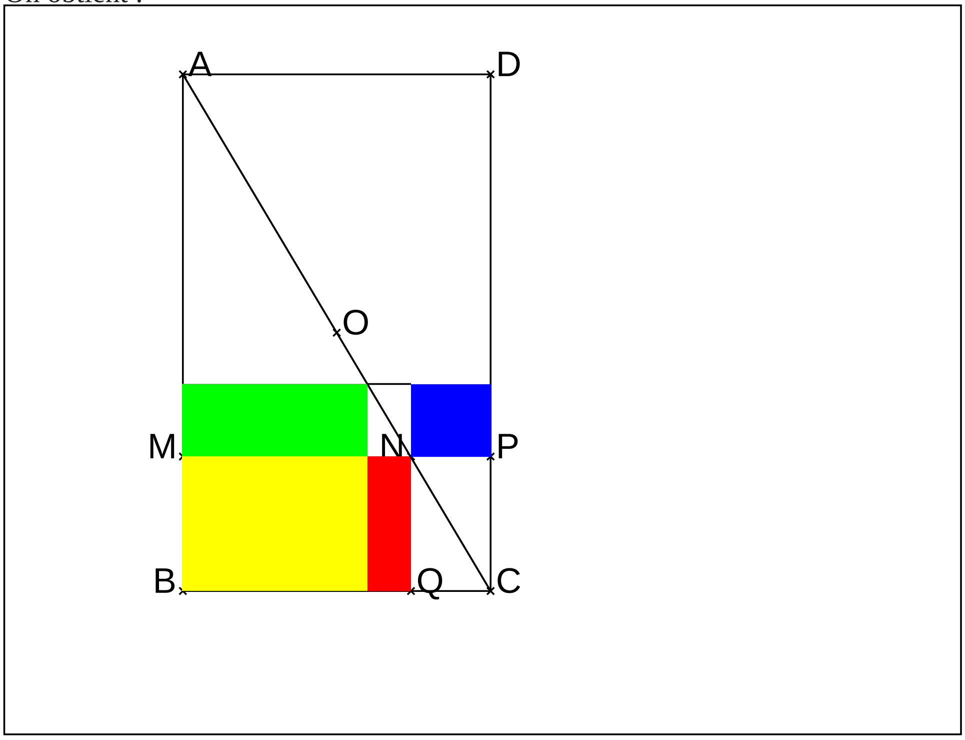
On peut faire bouger le paramètre t. On démontre facilement que les aires rouges sont égales entre elles et que chaque aire rouge et aussi égale à une aire bleue. Dans chacune des figures : l'aire rouge est l'aire qui correspond à la position de M d'ordonnée t et l'aire bleue est l'aire qui correspond à la position de M d'ordonnée $y_A - t$. Le graphe de l'aire $f(t)$ du quadrilatère $NMBQ$ (resp $N1M1B1Q1$) admet donc un axe de symétrie en $t = y_A/2$

4.5.3 Solution géométrique

On se ramène à un triangle rectangle en B de même aire et on met sur la même figure deux positions de M pour $t < b < y_A/2$, et on compare les aires corespondantes à ces 2 positions. Pour cela on tape :

```
A:=point(-3,5);
B:=point(-3,'affichage'=quadrant2);
C:=point(0);
O:=milieu(A,C);
triangle(A,B,C);
supposons(t=[1.3,0,2.5,0.1]);
M:=point(-3+t*(i),'affichage'=quadrant2);
N:=point(-3*t/5+i*t,affichage=quadrant2);;
Q:=point(-3t/5);
quadrilatere(N,M,B,Q,affichage=1+ rempli);
D:=point(5i);
triangle(A,D,C);
P:=point(i*t);
supposons(b=[2,t,2.5,0.1]);
quadrilatere(-3+b*i,-3*b/5+b*i,-3*b/5,-3,affichage=2+ rempli);
quadrilatere(-3+t*i,-3*b/5+t*i,-3*b/5,-3,affichage=3+ rempli);
quadrilatere(-3*t/5+i*b,b*i,P,N,affichage=4+ rempli);
segment(-3*b/5+b*i,-3*t/5+i*b);
```

On obtient :



Quand t augmente de 0 à $y_A/2$, l'aire du quadrilatère $NMBQ$ passe de : l'aire jaune+l'aire rouge à l'aire jaune+l'aire verte. D'après le lemme, on a : aire rouge =aire bleue. L'aire bleue est inférieure à l'aire verte car $t < y_A/2$. Donc le graphe de l'aire du quadrilatère $NMBQ$ (resp $N1M1B1Q1$) est croissante sur $0; y_A/2$

4.5.4 Solution en analytique avec un triangle ABC rectangle en B

On prend comme repère BCA. La droite (A, C) de pente $m < 0$ a comme équation : $y = mx + x_A$. Soit M de coordonnées $(0; t)$ un point de la droite AB. Les coordonnées du point N vérifie donc $y_N = t = m * x_N + x_A)$ et le rectangle $NMBQ$ a comme aire : $x_N * y_N = x_N * (m * x_N + x_A)$.
$x_N * (m * x_N + x_A)$ est un trinôme du 2nd degré en x_N qui a comme maximum $x_A/2$ atteint en $x_N = -x_A/(2m)$ (car $m < 0$). L'aire du rectangle $NMBQ$ est donc maximum pour $t = y_N = x_A/2$ i.e. lorsque M est le milieu de AB.

5 Thème : Arithmétique

5.1 L'exercice

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $a_n = 1! + 2! + ... + n!$
On donne la décomposition en facteurs premiers des dix premiers termes de la suite (a_n) :
$a_1 = 1$
$a_2 = 3$
$a_3 = 3^2$
$a_4 = 3 \times 11$
$a_5 = 3^2 \times 17$
$a_6 = 3^2 \times 97$
$a_7 = 3^4 \times 73$
$a_8 = 3^2 \times 11 \times 467$
$a_9 = 3^2 \times 131 \times 347$
$a_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787$

1. Montrer que a_n n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7.
2. Peut-on affirmer que a_n est divisible par 11 á partir d'un certain rang ?
3. Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, a_n est divisible par 3^2 mais pas par 3^3 ?

5.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :
sa réponse à la question 3) ;
un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « Arithmétique ».
Le candidat présentera au jury :
le contenu de ses fiches ;
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

5.3 Solution de l'exercice sans `Xcas`

On pose : $a_n = 1! + 2! + ... + n!$ pour $n \geq 1$
Pour avoir, avec `Xcas`, la décomposition en facteurs premiers de a_{10}, on tape :
`ifactor(sum(p !,p=1..10))` et
pour avoir la liste des décompositions en facteurs premiers de $a_1..a_{10}$, on tape :
`ifactor(sum(p !,p=1..n))$(n=1..10)` et on obtient :
`1,3,3^2,3*11,3^2*17,3^2*97,3^4*73,3^2*11*467, 3^2*131*347, 3^2*11*40787`

1. a_n n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7
   - a_n n'est jamais divisible par 2. En effet $\sum_{p=2}^{n} p!$ est un nombre pair puisque $p!$ est divisible par 2 lorsque $p \geq 2$.
     Donc $a_n = 1 + \sum_{p=2}^{n} p!$ est un nombre impair.
     Donc a_n n'est jamais divisible par 2.
   - a_n n'est jamais divisible par 5. En effet $p!$ est divisible par 5 lorsque $p \geq 5$.
     Donc $a_n - a_4 = \sum_{p=5}^{n} p!$ est divisible par 5.
     $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3^2 2$ et $a_4 = 3 \times 11$ ne sont pas divisble par 5 et donc a_n n'est pas divisible par 5 lorsque $n < 5$.
     $a_n = a_4 + \sum_{p=5}^{n} p!$: a_4 n'est pas divisible par 5 et $\sum_{p=5}^{n} p!$ est divisible par 5 donc a_n n'est pas divisible par 5 lorsque $n \geq 5$.
     Donc a_n n'est jamais divisible par 5.
   - a_n n'est jamais divisible par 7. En effet si $p \geq 7$, $p!$ est divisible par 7.
     Donc $a_n - a_6 = \sum_{p=7}^{n} p!$ est divisible par 7.
     $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3^2$, $a_4 = 3 \times 11$, $a_5 = 3^2 \times 17$ et $a_6 = 3^2 \times 97$ ne sont pas divisible par 7 lorsque $n < 7$ et $a_n = a_6 + \sum_{p=7}^{n} p!$ a_6 n'est pas divisible par 7 et $\sum_{p=7}^{n} p!$ est divisible par 7 donc a_n n'est pas divisible par 7 lorsque $n \geq 7$.
     Donc a_n n'est jamais divisible par 7.
2. a_n est divisible par 11 à partir d'un certain rang
   On a $a_n = a_{10} + \sum_{p=11}^{n} p!$.
   $a_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787$ est divisible par 11 et lorsque $p \geq 11$, $p!$ est divisible par 11 donc si $n \geq 10$, a_n est divisible par 11. Donc a_n est divisible par 11 lorsque $n \geq 10$.
3. a_n est divisible par 3^2 à partir d'un certain rang
   $8! = 2^7 * 3^2 * 5 * 7$ (avec `Xcas`, on tape `ifactor(8!)`) donc pour $p \geq 8$ $p!$ est divisible par 3^2.
   On a $a_n = a_8 + \sum_{p=9}^{n} p!$.
   $a_8 = 3^2 \times 11 \times 40787$ est divisible par 3^2 et lorsque $p \geq 8$,$p!$ est divisible par 3^2. Donc a_n est divisible par 3^2 lorsque $n \geq 8$.
4. a_n est n'est pas divisible par 33 à partir d'un certain rang
   $9! = 2^7 * 3^4 * 5 * 7$ (avec `Xcas`, on tape `ifactor(8!)`) donc pour $p \geq 9$ $p!$ est divisible par 3^4.
   pour $n \leq 8$, a_n n'est pas divisible par 3^3 car :
   $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3^2$, $a_4 = 3 \times 11$, $a_5 = 3^2 \times 17$
   $a_6 = 3^2 \times 97$, $a_7 = 3^4 \times 73$, $a_8 = 3^2 \times 11 \times 467$
   On a $a_n = a_8 + \sum_{p=9}^{n} p!$ pour $n \geq 9$.
   a_8 n'est pas divisible par 3^3 alors que $\sum_{p=9}^{n} p!$ est divisible par 3^3 donc a_n n'est pas divisible par 3^3 lorsque $n \geq 9$.
   Donc a_n n'est jamais divisible par 3^3.

6 Thème : Nombres complexes

6.1 L'exercice

Pour chaque question, une seule des 4 propositions est exacte. Cochez pour chacune d'elle la bonne réponse sans justification.

1. Soit $z \in\ C$ vérifiant $\overline{z} + |z| = 6 + 2i$. L'écriture algébrique de z est :

   ☐ $\dfrac{8}{3} - 2i$ ☐ $-\dfrac{8}{3} - 2i$ ☐ $\dfrac{8}{3} + 2i$ ☐ $-\dfrac{8}{3} + 2i$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x+iy$ vérifiant $|z - 1| = |z + i|$ est la droite d'équation :

   ☐ $y = x - 1$ ☐ $y = -x$ ☐ $y = -x + 1$ ☐ $y = x$

3. Soit n un entier naturel. Le nombre $(1 + i\sqrt{3})^n$ est réel, si et seulement si, n s'écrit sous la forme :

   ☐ $3k + 1$ ☐ $3k + 2$ ☐ $3k$ ☐ $6k$

4. Soit l'équation (E) : $z = \dfrac{6 - z}{3 - z}$ $(z \in \mathbb{C})$. Une solution de (E) est :

   ☐ $-2 - \sqrt{2}i$ ☐ $2 + \sqrt{2}i$ ☐ $\sqrt{3} + i$ ☐ $\sqrt{3} + 2i$

5. Dans le plan complexe, A et B étant les points d'affixes respectives $zA = -2$ et $zB = 2i$, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant la relation $\arg \dfrac{z + 2}{z - 2i} = \dfrac{\pi}{2}$ est inclus dans :

   ☐ La droite d'équation $y = -x$ ☐ La droite d'équation $y = x$

   ☐ Le cercle $\left\{ \begin{array}{ll} \text{de centre} & I(1 + i) \\ \text{de rayon} & R = \sqrt{2} \end{array} \right.$ ☐ Le cercle de diamètre $[AB]$

6.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

une justification des réponses aux questions 3) et 5) du QCM ;

un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Nombres complexes".

Le candidat présentera au jury :

le contenu de ses fiches ;

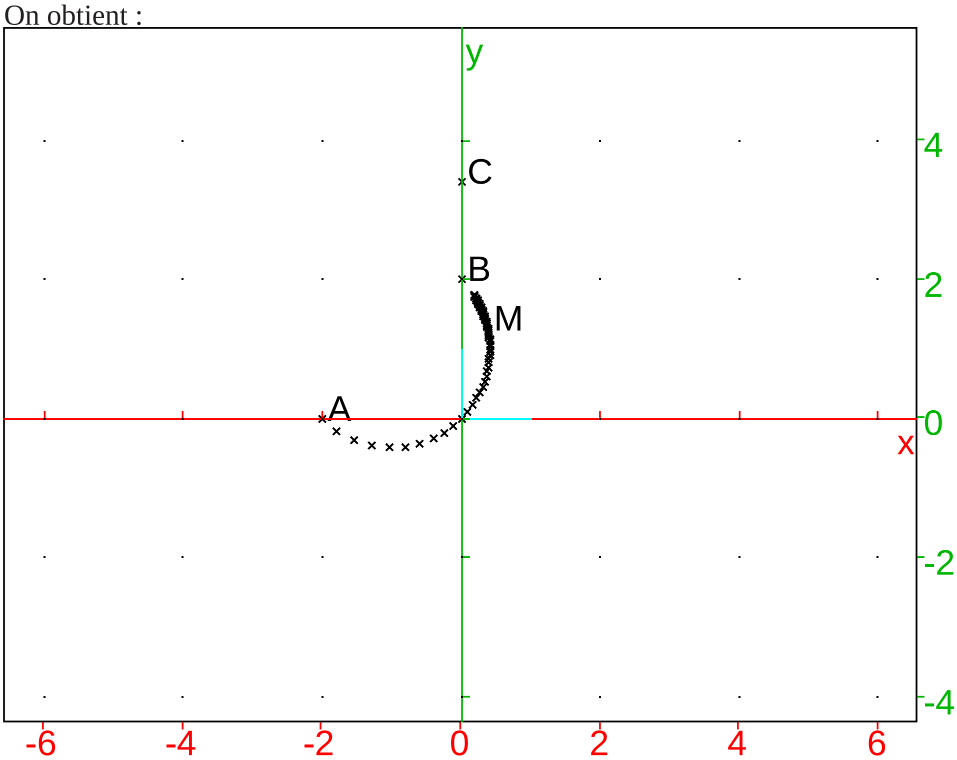
pour chaque item de ce QCM, les mréthodes et les savoirs mis en jeu pour trouver la réponse exacte.

6.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

On configure le CAS en cochant `Complex` et `Varianles_complexe` (menu `Cfg->Configuration du CAS`).

1. $\overline{z}+|z|=6+2i$
   Avec `Xcas`, on tape :
   `solve(abs(z)^2=(6+2*i-conj(z))^2,z)`
   On obtient : `[8/3-2*i]`
2. $|z-1|=|z+i|$
   Avec `Xcas`, on tape :
   `csolve(abs(z-1)^2=abs(z+i)^2,z)`
   On obtient : `[' x'+(i)*(-' x')]`
   ou on tape :
   `csolve(abs(a-1+i*b)^2-abs(a+i+i*b)^2,a)`
   On obtient : `[-b]`
   donc la droite a pour équation $y=-x$
3. $(1+i\sqrt{3})^n$ est réel, si et seulement si, n s'écrit ...
   Avec `Xcas`, on tape :
   `abs(1+i*sqrt(3)),arg(1+i*sqrt(3))`
   On obtient : `2, pi/3)`
   `solve(n*pi/3=k*pi,n)`
   On obtient : `[3*k]`
4. $z=\dfrac{6-z}{3-z}$
   Avec `Xcas`, on tape :
   `solve(z =(6-z)/(3-z),z)`
   On obtient : `[sqrt(2)*(i)+2,-sqrt(2)*(i)+2]`
5. $zA=-2$, $zB=2i$, $\arg\dfrac{z+2}{z-2i}=\dfrac{\pi}{2}$
   $\arg\frac{z+2}{z-2i}$ est l'angle $\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}$ Donc on cherche M tel que :
   $\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}=\frac{\pi}{2}$ Le lieu de M est le demi-cercle de diamètre AB contenant le point d'affixe 0. Donc M se trouve sur le cercle de diamètre AB.
   Avec `Xcas`, on tape :
   On définit les points A et B d'affixe -2 et $2i$:
   `A :=point(-2);B :=point(2i);` On définit la fonction f par :
   `f(z) :=(z+2)/(z-2i)`
   On cherche la fonction réciproque de f :
   `normal(csolve(f(z)=Z,z))`
   On obtient :
   `[((2*i)*Z+2)/(Z-1)]`
   On définit g la fonction réciproque de f par :
   `g(Z) :=((2*i)*Z+2)/(Z-1)`
   g n'est pas définit pour $Z=1$.

On définit les points C qui ont comme argument $\pi/2$ et pour cela on définit un paramètre formel $c > 0$ qui sera l'ordonnée de C :
```
supposons(c=[3.9,0,10,0.1])
C :=point(i*c)
```
On définit les points M qui sont les images des points C par g :
```
M :=point(g(i*c))
```
On demande d'avoir la trace des positions de M quand on fait varier c :
```
trace(M)
```
On obtient :



On vérifie que la trace correspond à :
```
arc(A,B,pi)
```
On tape pour avoir l'affixe de M :
```
normal(affixe(M))
```
On obtient :
```
((2*i)*c-2*i)/(c+i)
```
On tace alors le lieu de M :
```
plotparam(((2*i)*c-2*i)/(c+i),c=0..100)
```
et on obtient l'arc de cerccle AB passant par O.

7 Thème : Recherche de lieux géométriques

7.1 L'exercice

On dira qu'un triangle ABC non aplati possède la propriété P si ses deux médianes issues de A et de B sont perpendiculaires.

1. Soit un triangle ABC ayant pour côtés $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{3}$.
   Vérifier que le triangle ABC est rectangle et possède la propriété P.
2. Les deux points A et B étant fixés, on cherche à déterminer l'ensemble Γ des points C tels que le triangle ABC possède la propriété P. Trouver le lieu des points G, isobarycentre des trois points A, B, C, lorsque C décrit Γ.
   En déduire l'ensemble Γ.
3. Soit ABC un triangle possédant la propriété P . On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
   Montrer que l'on a la relation $a^2 + b^2 = 5c^2$.

7.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :
sa réponse à la question 2) et un énoncé plus détaillé de cette question à proposer à des élèves de première S ;
un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Recherche de lieux géométriques".

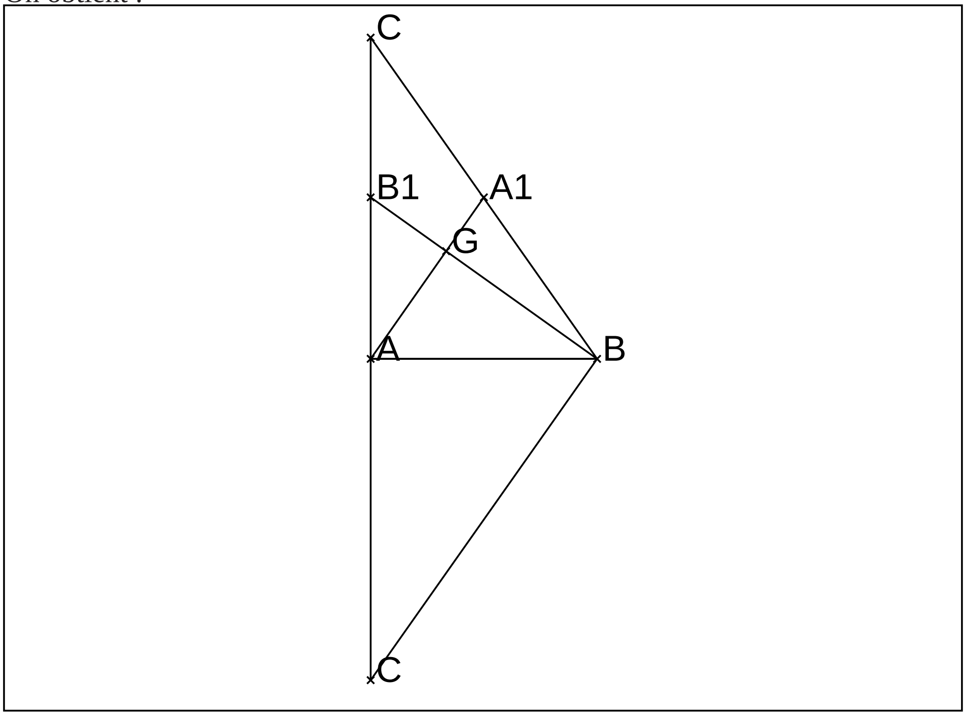
Le candidat présentera au jury :
le contenu de ses fiches ;
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

7.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. Un triangle ABC a pour côtés $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{3}$.
   On fait la figure avec `Xcas`. Dans un niveau de géométrie, on tape :

   ```
   A:=point(0);
   B:=point(1);
   C:=inter(cercle(A,sqrt(2)),cercle(B,sqrt(3)));
   triangle(A,B,C[0]);
   triangle(A,B,C[1]);
   A1:=milieu(B,C[1]);
   B1:=milieu(A,C[1])
   segment(A,A1);
   segment(B,B1);
   G:=inter_unique(segment(A,A1),segment(B,B1));
   ```

On obtient :

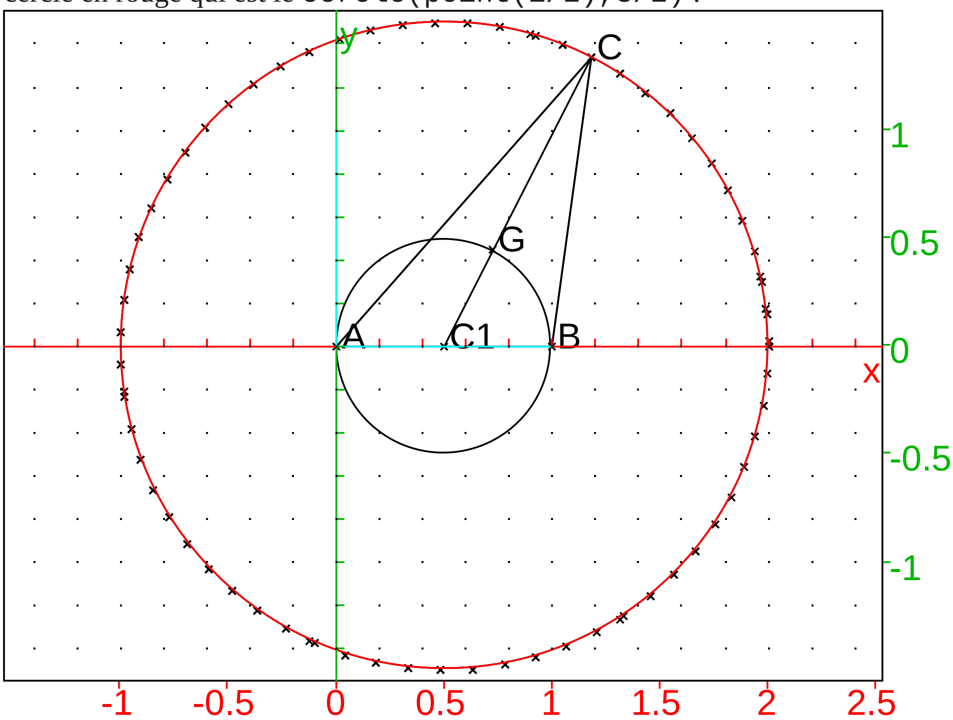


On a $BC^2 = 3$ et $AC^2 + AB^2 = 2 + 1 = 3$ donc $BC^2 = AC^2 + AB^2$ et d'après Pythagore le triangle ABC est rectangle en A.
Soient $A1$ (resp $B1$) le milieu de BC (resp AC). On a :
$AA1 = BC/2 = \sqrt{3}/2$ et
$BB1^2 = AB^2 + (AC/2)^2 = 1 + 1/2 = 3/2$ donc
$BB1 = \sqrt{3}/\sqrt{2}$
Le centre de gravité G est donc tel que :
$AG = \sqrt{3}/3$ et $BG = 2/3 * \sqrt{3}/\sqrt{2} = \sqrt{6}/3$ donc
$AG^2 + BG^2 = 1/3 + 2/3 = 1 = AB^2$
Donc d'après Pythagore le triangle GAB est rectangle en G. Le triangle ABC a donc la propriété P.

2. Si le triangle ABC a la propriété P c'est que le triangle GAB est rectangle en G. Donc G se trouve sur le cercle de diamètre AB.
Soit $C1$ le milieu de AB.
On sait que :
Si dans un triangle ABC, avec $C1$ milieu de AB, on a un point G du segment $[CC1]$ qui vérifie $C1C = 3C1G$ alors G est le centre de gravité du triangle ABC.
C se déduit de G par l'homothétie de centre $C1$ et de rapport 3.
On fait la figure avec `Xcas`. Dans un niveau de géométrie, on tape :

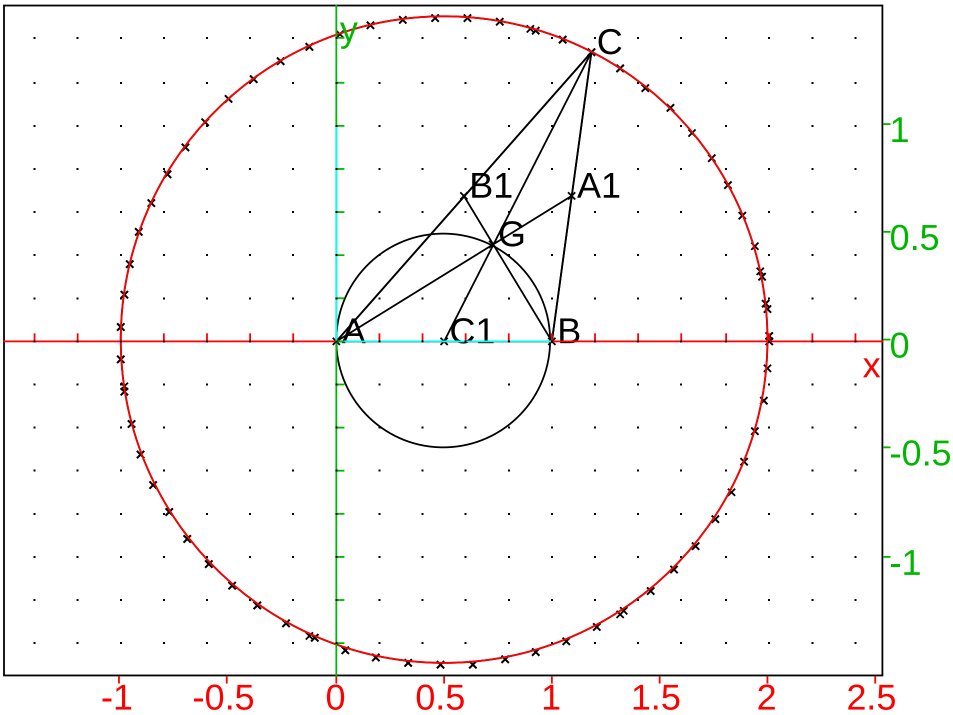
```
A:=point(0);
B:=point(1);
c:=cercle(A,B):;c;
triangle(A,B,C);
assume(a=[1,-5,5,0.1])
G:=element(c,a);
C1:=milieu(A,B);
C:=homothetie(C1,3,G);
triangle(A,B,C);
trace(C);
segment(C1,C);
c3:=homothetie(C1,3,c):;
affichage(c3,1)
```

En faisant bouger le curseur `a`, on obtient la trace de `C` qui coïncide avec le cercle en rouge qui est le `cercle(point(1/2),3/2)` :



3. Soit ABC ayant la propriété P. On a alors la relation $a^2 + b^2 = 5c^2$.
   On complète la figure ci-dessus :

```
B1:=milieu(A,C);
A1:=milieu(B,C);
segment(A1,A);
segment(B1,B);
```



Les triangles : ABG, $A1BG$, $AB1G$ sont rectangles en G donc :
$c^2 = BG^2 + AG^2$, $a^2/4 = A1G^2 + BG^2$ et $b^2/4 = AG^2 + B1G^2$
On a G est le centre de gravité donc $AG = 2A1G$ et $BG = 2B1G$ donc
$a^2/4 = A1G^2 + 4B1G^2$, $b^2/4 = B1G^2 + 4A1G^2$ et
$(a^2 + b^2)/4 = 5(A1G^2 + B1G^2)$
$c^2 = 4B1G^2 + 4A1G^2$ donc $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Remarque

`A1` est le transformé de `G` par l'homothétie h_1 de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.
`C` est le transformé de `A1` par l'homothétie h_2 de centre B et de rapport 2.
Donc `C` est le transformé de `G` par l'homothétie $h = h_2 \circ h_1$. h a comme rapport $2 \times \frac{3}{2} = 3$ et comme centre I vérifiant : $J = h_1(I) = h_2^{-1}(I)$ c'est à dire :
$\overline{AJ} = \frac{3}{2}\overline{AI}$, $\overline{BJ} = \frac{1}{2}\overline{BI} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{AI})$ et $\overline{AJ} - \overline{BJ} = \overline{AB}$ donc
$3\overline{AI} = \frac{3}{2}\overline{AB}$ c'est à dire I est le milieu C_1 de AB.

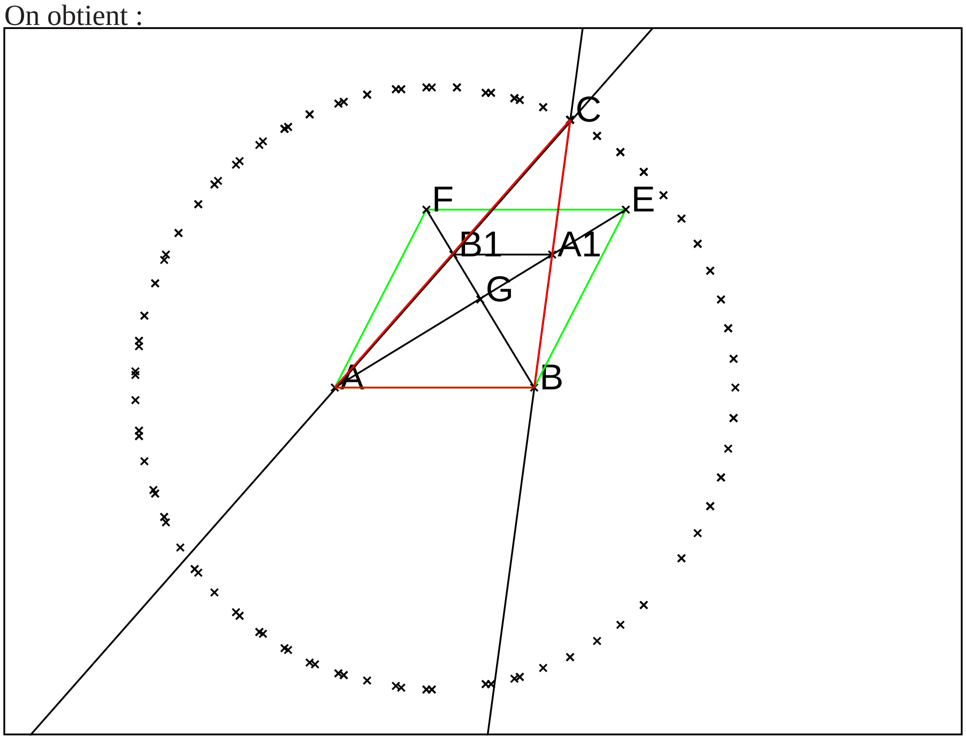
Le même problème posé différemment

Soit un losange $ABEF$ de centre G. Soient $A1$ le milieu de GF, $B1$ le milieu de GE et C l'intersection de $(AA1)$ et $(BB1)$.
Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC et que lorsqu'on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a $a^2 + b^2 = 5c^2$.
Il suffit de remarquer que les triangles GAB est l'image de $GA1B1$ dans l'homothétie de centre G et de rapport 2 ($GA = 2GA1$ et $GB = 2GB1$) Donc $AB = 2A1B1$ et $AB//A1B1$ et d'après le "théorème des milieux" on en déduit

que $A1$ est le milieu de BC et $B1$ est le milieu de AC. Si d_1 et d_2 sont les longueurs des demi-diagonales du losange $ABEF$, on a :
$d_1^2 + d_2^2 = c^2$, $d_1^2 + d_2^2/4 = a^2/4$ et $d_1^2/4 + d_2^2 = b^2/4$ donc $a^2 + b^2 = 5c^2$.
On a aussi :
$A1$ est le transformé de G dans l'homothétie de centre A et de rapport 3/2.
C est le transformé de $A1$ dans l'homothétie de centre B et de rapport 2.
On fait la figure avec Xcas. Dans un niveau de géométrie, on tape :

```
A:=point(0);
B:=point(1);
assume(b=[1,-5,5,0.1]);
losange(A,B,b,E,F,affichage=2);
G:=milieu(A,E);
A1:=milieu(G,E);
B1:=milieu(G,F);
segment(A,E);
segment(B,F);
segment(A1,B1)
d1,d2:=droite(A,B1),droite(B,A1):;
d1;d2;
triangle(A,B,C,affichage=1);
C:=inter_unique(d1,d2);
trace(C);
```

On obtient :



8 Thème : Intégration

8.1 L'exercice

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$$

1. On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$

   1.a) Démontrer que, pour tout réel t positif on a : $t + 2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.

   1.b) En déduire que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

   $$F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$$

   1.c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

   $$\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$$

   1.d) En déduire que, pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

   $$u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$$

   Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

8.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

sa réponse à la question 2) ;
un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Intégration".

Le candidat présentera au jury :

le contenu de ses fiches ;
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

8.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. On tape :
   `f(x) :=sqrt(x)*exp(1-x)`
   `F(x) :=int(f(t),t,1,x)`
   1.a) Pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x} \geq 0$ et pour tout $x \geq 1$, on a $\sqrt{x} \geq 1$ donc $F(x) \geq \int_1^x e^{1-t}dt \geq 1$.
   Pour tout réel t positif on a :
   $t + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{t} = (\sqrt{2} - \sqrt{t})^2 \geq 0$.
   1.b) Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a d'après 1.a) : $\sqrt{t} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(t + 2)$ donc
   $$F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t + 2)e^{1-t}dt$$
   1.c) Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on intègre $\int_1^x (t + 2)e^{1-t}dt$ par parties et on pose :
   $u = t + 2$ et $dv = e^{1-t}dt$ donc $du = dt$ et $v = -e^{1-t}$ on a donc
   $\displaystyle\int_1^x (t + 2)e^{1-t}dt = [-(t + 2) * e^{1-t}]_{t=1}^{t=x} + \int_1^x e^{1-t}dt$ donc
   $\displaystyle\int_1^x (t + 2)e^{1-t}dt = [-(t + 3) * e^{1-t}]_{t=1}^{t=x} = 4 - (x + 3)e^{1-x}$
   Avec `Xcas`, on tape (le deuxième argument est u) :
   `A :=integrer_par_parties_u((t + 2)*exp(1-t),t + 2,t,1,x)`
   On obtient : `[-x*exp(-x+1)-2*exp(-x+1)+3,exp(-t+1)]`
   On tape (`integrer_par_parties_u` a comme synonyme `ibpu` et le deuxième argument est ici 0 pour terminer l'intégration) :
   `normal(ibpu(A,0,t,1,x))`
   On obtient : `-x*exp(-(x-1))-3*exp(-(x-1))+4`
   On peut aussi taper `int((t + 2)*exp(1-t),t,1,x)` pour obtenir directement le résultat.
   1.d) Pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $(x + 2)e^{1-x} \geq 0$ et $(x + 3)e^{1-x} \geq 0$ donc
   $0 \leq \displaystyle\int_1^x (t + 2)e^{1-t}dt = [-(t + 3) * e^{1-t}]_{t=1}^{t=x} = 4 - (x + 3)e^{1-x} \geq 4$ donc
   $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.
2. Pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x} \geq 0$ donc pour tout $n > 0$, on a $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt \geq 0$ et
   pour tout $n \geq 2$, on a $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j = \int_1^n f(t)dt = F(n)$ donc
   S_n est croissante.
   On sait d'après 1. que pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $1 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$ donc S_n est croissante et majorée donc convergente et on a pour tout $n \geq 2$:
   $1 \leq F(n) = S_n \leq \sqrt{2}$
   Remarques On va essayer de trouver un meilleur minorant.
   – Pour trouver un minorant on peut calculer des valeurs approchées de l'intégrale.
     On cherche les points d'inflexions du graphe de f :

le zéro de $f''(x)$ est $a = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_{x=1}^{a} f(x)dx$ peut être minorée par la méthode des trapèzes et les intégrales $\displaystyle\int_{x=a}^{3/2} f(x)dx$ et $u_n = \displaystyle\int_{x=n}^{n+1} f(x)dx$ peuvent être minorées par la méthode du point milieu.
On tape : `a :=(1+sqrt(2))/2`
`areaplot(f(x),x=1..a,trapeze)`
On obtient : `1.96`
Ou on tape : `(f(1)+f(a))/2.*(a-1)`
On obtient : `0.196042763728`
On tape : `areaplot(f(x),x=a..3/2,point_milieu)`
On obtient : `0.239`
Ou on tape : `f((a+3/2)/2.)*(3/2-a)`
On obtient : `0.239276873725`
Il reste à minorer $\displaystyle\int_{3/2}^{+\infty} f(x)dx$ par les aires des rectangles au "point-milieu" : ils ont comme dimension $1 \times f(n)$ et donc la somme de leurs aires est $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{n}\frac{e}{e^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+2}\frac{1}{e^{n+1}}$.
Commme $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{2}$, on minore à nouveau cette somme par $\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{e^n}$
c'est à dire par $\dfrac{\sqrt{2}.}{e}\dfrac{e}{e-1}) = \dfrac{\sqrt{2}.}{e-1}$.
On tape :
`sqrt(2.)/(e-1)`
On obtient : `0.82303935184`
On a donc comme minnoration de la limite :
`(f(1)+f(a))/2.*(a-1)+f((a+3/2)/2.)*(3/2-a)+ sqrt(2.)/(e-1)`
On obtient : `1.25835898929`
d'où un encadrement de la limite l :

$$1.25835898929 \leq l \leq 1.41421356237$$

– On peut avoir une meilleure valeur approchée de cette limite, si on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
En effet en faisant le changement de variable $x = t^2$, $dx = 2tdt$ donc
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = e\int_0^{+\infty} \sqrt(x)\exp(-x)dx = 2e\int_0^{+\infty} t^2\exp(-t^2)dt$
On intégre par partie cette dernière intégrale ($u = t, dv = 2t\exp(-t^2)dt$) :
$\displaystyle 2e\int_0^{+\infty} t^2\exp(t^2)dt = e\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt$

Soit on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,
soit on fait le calcul en encadrant :
$\displaystyle\int\int_C \exp(x^2+y^2)dxdy$ ($C=[0,b]\times[0,b]$) avec
$\displaystyle\int\int_{D_1} \exp(x^2+y^2)dxdy$ ($D_1 = x^2+y^2 < b, x>0, y>0$) et
$\displaystyle\int\int_{D_2} \exp(x^2+y^2)dxdy$ ($D_1 = x^2+y^2 < b\sqrt{2}, x>0, y>0$).
On a donc :

$$l = \frac{e\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^1 f(t)dt$$

Pour avoir une minoration de l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ on utilise

– la méthode des trapèzes :
  On tape :
  `areaplot(f(x),x=0..1,20,trapeze)`
  On obtient : `1.02`
– le développement de taylor à l'odre 5 de $\exp(-x)$ au voisinage de 0.
  On tape :
  `g :=truncate(taylor(f(x)))`
  `int(g,x=0..1.)`
  On obtient : `1.02963209244`
  donc comme on a une série alternée on a $1.02963209244 \leq \int_{x=0}^1 f(x)dx$

Pour avoir une majoration de l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ on utilise

– la méthode du point milieu :
  On tape :
  `areaplot(f(x),x=0..1/2,10,point_milieu)`
  On obtient : `0.481`
  On tape :
  `areaplot(f(x),x=1/2..1,10,point_milieu)`
  On obtient : `0.551`
  donc une majoration de $\int_0^1 f(t)dt$ est 0.481+0.551=1.032

– le développement de taylor à l'odre 6 de $\exp(-x)$ au voisinage de 0.
  On tape :
  `h :=truncate(taylor(f(x),x=0,6),6)`
  `int(h,x=0..1.)`
  On obtient : `1.03013547797`
  donc comme on a une série alternée on a $\int_{x=0}^1 f(x)dx \leq 1.03013547797$

On a donc :
$\dfrac{e\sqrt{\pi}}{2} - 1.032 < l < \dfrac{e\sqrt{\pi}}{2} - 1.02$ donc avec les calculs approchés de l'intégrale on a

$$1.37701454735 < l < 1.38901454735$$

et

$$1.37887906938 < l < 1.37938245491$$

avec le développement de Taylor à l'ordre 5 et 6.
Avec `Xcas`, on tape :

```
l :=int(f(x),x=1..inf)
```

On obtient :

```
-(sqrt(pi))/2*erf(1)*exp(1)+1+(sqrt(pi))/2*exp(1)
```

où `erf(1)` renvoie la valeur approchée de :

$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (\exp(-t^2)dt)$

On tape :

```
evalf(l)
```

On obtient : `1.37893607807`

9 Thème : Fonctions, équations

9.1 L'exercice

On considère l'équation $(E) : \sin(x) - \frac{x}{2} = 0, x \in \mathbb{R}$

1. Montrer que si x est solution de cette équation alors x appartient à l'intervalle [-2, 2]
2. Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).
3. Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution en précisant la méthode utilisée.

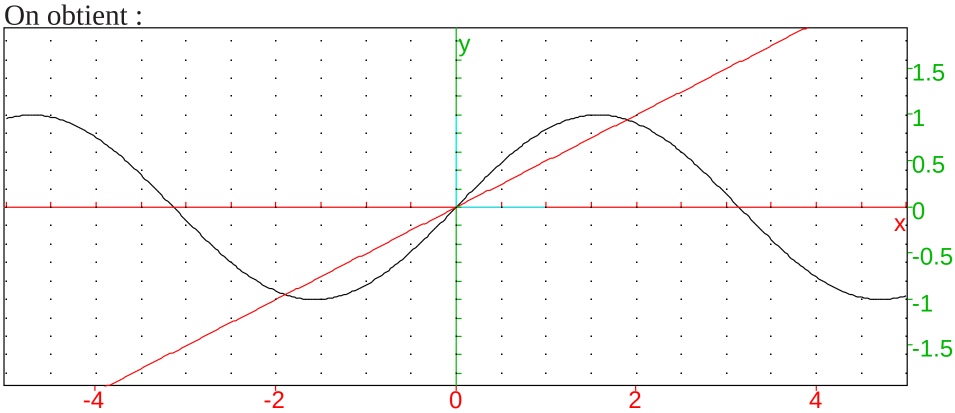
9.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :
sa réponse à la question 2) ;
un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Fonctions, équations". **Le candidat présentera au jury :**
le contenu de ses fiches ;
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

9.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. On sait que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc si on a $x = 2\sin(x)$ alors $-2 \leq x \leq 2$
   On tape :

2. Pour connaitre le nombre de solutions de $(E) : \sin(x) - \frac{x}{2} = 0, x \in \mathbb{R}$, on trace les deux graphes de $y = \sin(x)$ et de $y = x/2$.
   On tape : `plotfunc([sin(x),x/2])`
   On obtient :
   

   On voit alors que (E) a 3 solutions : pour le montrer cherchons le tableau de

variation de la fonction impaire $g(x) = x/2 - \sin(x)$.
On tape :
```
g(x) :=x/2-sin(x)
solve(diff(g(x)),x)
```
On obtient : `[pi/3,(-pi)/3]`
On tape :
```
solve(diff(g(x))>0,x)
```
On obtient : `[x<((-pi)/3),x>(pi/3)]`
On tape :
```
g(0)
```
On obtient : `0`
On tape :
```
limit(g(x),x,inf)
```
On obtient : `+(infinity)`
On tape :
```
normal(g(pi/3))
```
On obtient : `1/6*pi+(-(sqrt(3)))/2`
On tape :
```
g(2.)
```
On obtient : `0.0907025731743`
On tape :
```
g(1.8)
```
On obtient : `-0.0738476308782`
On cherche les points d'inflexion, on tape :
```
solve(diff(diff(g(x))),x)
```
On obtient : `[0,pi]`
On tape :
```
solve(diff(diff(g(x)))>0,x)
```
On obtient : `[((x>0) && (x<pi))]`
La fonction g est donc convexe sur [pi/3,pi] et on a $g(\pi/3) > 0$ On cherche avec `Xcas` les zéros de $g(x)$ par la méthode de Newton on tape :
```
fsolve(g(x),x,3,newton_solver)
```
On obtient : `1.89549426703`
ou bien
On peut procéder par dichotomie :
On tape :
```
g(1.9)
```
On obtient : `0.00369991231258`
On tape :
```
g(1.89)
```
On obtient : `-0.00448561486462`
On tape :
```
g(1.895),g(1.896)
```
On obtient : `-0.000404700060102,0.00041432788413`

donc $x_0 \simeq 1.895$ par défaut à 10^{-3} près.
ou bien
On peut faire un programme de la méthode de Newton pour trouver la valeur par défaut à 10^{-3} près. L'intersection $(b;0)$ de l'axe des x avec la tangente au graphe de g au point $(a;g(a)$ vérifie : $0 = g'(a)(b-a)+g(a)$ i.e. $b = a - g(a)/g'(a)$ La suite qui converge vers x_0 est donc :
$u_{n+1} = u_n - g(u_n)/g'(u_n)$ avec $u_0 = a$ et $a \in [\pi/3, \pi]$ avec $g(a) > 0$, par exemple $a = \pi$ ou $a = 3$...
On calcule les différents termes de cette suite que l'on met dans la variable a et on s'arrete quand $g(a) * g(a - eps) \leq 0$ avec ici $eps = 0.001$.

```
solnew(g,a,eps):={
local h;
h:=function_diff(g)
tantque g(a)*g(a-eps)>0 faire
a:=a-g(a)/h(a);
ftantque;
retourne a-eps,a
}:;
```

On tape :
`solnew(g,3.,0.001)`
On obtient un encadrement de la limite à $eps = 0.001$ prés :
`1.89465262755,1.89565262755`

10 Thème : Probabilités

10.1 L'exercice

Dans un lycée qui ne reçoit pas d'interne, la répartition des élèves se fait de la façon suivante :

Niveau	Seconde	Première	Terminale	Total
Externes	50		85	195
Demi-pensionnaires	285	220		
Total			280	

Rappel de notation : $P_B(A)$ est la probabilité de A sachant que B est réalisé.

1. Compléter le tableau ci-dessus.
2. On rencontre un élève du lycée au hasard. On note E l'événement "l'élève rencontré est externe", T "l'élève rencontré est en terminale" et S l'événement "l'élève rencontré est en seconde ". En supposant que tous les élèves ont la même probabilité d'être rencontrés, calculer les probabilités suivantes : 2.a) $P(E \cap S)$. 2.b) $P(\overline{E} \cap T)$ où $\overline{E}$ est l'événement contraire de E.
3. 3.a) Les événements E et T sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse. 3.b) Citer deux événements incompatibles.
4. Calculer les probabilités conditionnelles suivantes : $P_S(E)$ et $P_E(T)$.

10.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

sa réponse aux questions 2) et 3) ;
un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Probabilités"

Le candidat présentera au jury :

le contenu de ses fiches ;
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

10.3 Solution de l'exercice sans `Xcas`

1. On compléte le tableau :

Niveau	Seconde	Première	Terminale	Total
Externes	50	60	85	195
Demi-pensionnaires	285	220	195	700
Total	335	280	280	895

2. 2.a) Calcul de $P(E \cap S)$.
   Il y a un total de 895 élèves.
   Il y 50 élèves qui sont externes et en Seconde".
   Donc $P(E \cap S) = 50/895 = 10/179$
   2.b) Calcul de $P(\overline{E} \cap T)$
   Il y 195 élèves qui sont Demi-pensionnaires et en Terminale".
   Donc $P(\overline{E} \cap T) = 195/895 = 39/179$
3. 3.a) Les événements E et T sont indépendants si on a :
   $P(E \cap T) = P(E) \times P(T)$.
   $P(E \cap T) = 85/895 = 17/179$
   $P(E) = 195/895 = 195/895 = 39/179$
   $P(T) = 280/895 = 195/895 = 56/179$
   donc E et T ne sont pas indépendants.
   3.b) S "l'élève rencontré est en seconde "et T "l'élève rencontré est en Terminale " sont incompatibles.
4. Calcul de $P_S(\overline{E})$
   On sait que :
   $P_S(\overline{E}) \times P(S) = P(\overline{E} \cap S)$
   On a :
   $P(S) = 335/895 = 67/179$
   $P(\overline{E} \cap S) = 285/895 = 57/179$
   Donc $P_S(\overline{E}) = 57/67$
   On peut aussi dire il y a 335 élèves en seconde et parmi ces élèves il y a 285 Demi-pensionnaires donc
   $P_S(\overline{E}) = 285/335 = 57/67$

   Calcul de $P_E(T)$
   On sait que :
   $P_E(T) \times P(E) = P(E \cap T)$
   On a :
   $P(E) = 195/895 = 39/179$
   $P(E \cap T) = 85/895 = 17/179$
   Donc $P_E(T) = 17/39$
   On peut aussi dire il y a 195 élèves en externes et parmi ces élèves il y a 85 en terminale donc
   $P_E(T) = 85/195 = 17/39$

11 Thème : Arithmétique

11.1 L'exercice

1. Déterminer deux entiers relatifs u et v tel que $7u - 13v = 1$ puis déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.
2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $f(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26. On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau suivant :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $f(n)$.
La lettre est alors codée par la lettre associée à $f(n)$. On sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.
2.a) Montrer que les entiers a et b sont tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 5\quad a+b & \equiv & 10 & \pmod{26} \\ 19\quad a+b & \equiv & 14 & \pmod{26} \end{array}\right.$$

2.b) En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.
2.c) Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec
$0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 5\quad a+b & \equiv & 10 & \pmod{26} \\ 19\quad a+b & \equiv & 14 & \pmod{26} \end{array}\right.$$

2.d) On suppose que $a = 17$ et $b = 3$. Coder le message "GAUSS".

11.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :
sa réponse à la question 1) et à la question 2.c) ;
au moins deux méthodes différentes permettant de dḿontrer que pour tous réels strictement positifs a et b on a : $(\frac{a+b}{2})^2 \geq ab$
un exercice se rapportant au thème "Arithmétique ".

Le candidat présentera au jury :
le contenu de ses fiches ;
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

11.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. On cherche deux entiers relatifs u et v tel que $7u - 13v = 1$ Avec `Xcas`, on tape :
   `iabcuv(7,-13,1)`
   On obtient : `[2,1]`
   En effet 2*7-1*13=1
   Ou bien on tape :
   `iegcd(7,-13)`
   On obtient : `[2,1,1]`
   On cherche tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.
   Avec `Xcas`, on tape :
   `iabcuv(14,-26,4)`
   On obtient une solution : `[4,2]`
   En effet 4*14-2*26=4
   Pour avoir toutes les solution on remarque que :
   $14(a - 4) - 26(k - 2) = 0$ ou encore $7(a - 4) = 13(k - 2)$
   Puisque 7 et 13 sont premiers entre eux, on en déduit que :
   pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $a - 4 = n * 13$ et que $k - 2 = n * 7$
   Les solutions sont donc $a = 4 + 13n,\ k = 2 + 7n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$
   Remarque : si on tape :
   `iegcd(14,-26)`
   On obtient : `[2,1,2]`
   car le pgcd de 14 et 26 est 2.

2. 2.a) Avec `Xcas`, on tape pour définir f :
   `f(n,a,b) :=irem(a*n+b,26)`
   On obtient :
   Pour définir le codage on utilise la commande `ord` (`ord("A")`=65) et pour le décodagela commande `char` (`char(65)`="A").
   On tape :
   `code(S) :=ord(S)-65`
   `decode(L) :=char(L+65)`
   On tape :

   ```
   codage(S,a,b):={
   local n,m;
   n:=code(S);
   m:=irem(a*n+b,26);
   return decode(m);
   }:;
   ```

   On sait que `codage("F")="K"` et `codage("T")="O"`.
   On a :
   `code("F")=5` et `code("K")=10` et
   `code("T")=19` et `code("O")=14` donc on doit avoir :

`irem(5*a+b,26)=10` et `irem(19*a+b,26)=14`
Donc il existe deux entiers relatifs m et p tels que :
$5a+b=26*m+10$ et $19a+b=26*p+14$ ou encore

$$\left\{\begin{array}{rcll} 5 & a+b & \equiv & 10 \pmod{26} \\ 19 & a+b & \equiv & 14 \pmod{26} \end{array}\right.$$

2.b) En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a-26k=4$.
D'après 2.c) il existe deux entiers relatifs m et p tels que :
$5a+b=26*m+10$ et $19a+b=26*p+14$.
Donc par soustraction (si $k=p-m$) : $(19-5)a=14a=26*k+4$
ou encore $14a-26k=4$
2.c) On cherche donc tous les couples d'entiers (a,b), tels que : $0\leq a\leq 25$, $0\leq b\leq 25$, $14a-26k=4$, $5a+b=26*m+10$
D'après 1) on a $14a-26k=4$, $a=4+13n,\ k=2+7n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$
On veut $0\leq a\leq 25$ donc $n=1$, $a=17$ et $k=9$.
$5a+b=85+b=26*m+10$ donc $b=26*m-75\equiv 3 \pmod{26}$.
Donc $a=17$ et $b=3$
Avec `Xcas`, on tape : `codage("F",17,3),codage("T",17,3)`
On obtient : `("K","O")`
2.d) On code le message "GAUSS".
Avec `Xcas`, on tape :

```
codages(S,a,b):={
local j,n,m,l,R;
l:=size(S);
R:="";
pour j de 0 jusque l-1 faire
n:=code(S[j]);
m:=irem(a*n+b,26);
R:=R+decode(m);
fpour;
return R;
}:;
```

On tape :
`codages("GAUSS",17,3)`
On obtient : `"BDFXX"`
On vérifie et on tape :
`codage("G",17,3),codage("A",17,3),codage("U",17,3),codage("S",17,3)`
On obtient : `"B","D","F","X"`
Remarque Au lieu de la commande `ord`, on peut utiliser la commande `asc` qui renvoie une liste (`asc("A")=[65]`).

12 Thème : Utilisation des variations d'une fonction

12.1 L'exercice

1. Pour tout réel $x > 0$, on pose : $f(x) = x - 1 - \ln(x)$.
   Étudier les variations de la fonction f et en déduire que pour tout réel $x > 0$, on a :
   $$\ln(x) \geq x - 1$$
2. Soient a, b et c des réels strictement positifs : on pose $m = \dfrac{a+b+c}{3}$. En appliquant l'inégalité précédente aux réels, $\dfrac{a}{m}$, $\dfrac{b}{m}$ et $\dfrac{c}{m}$, montrer que :
   $$(\frac{a+b+c}{3})^3 \geq abc$$

12.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

sa réponse à la question 2) ;

au moins deux méthodes différentes permettant de dḿontrer que pour tous réels strictement positifs a et b on a :

$$(\frac{a+b}{2})^2 \geq ab$$

un exercice se rapportant au thème "Utilisation des variations d'une fonction".

Le candidat présentera au jury :

le contenu de ses fiches ;

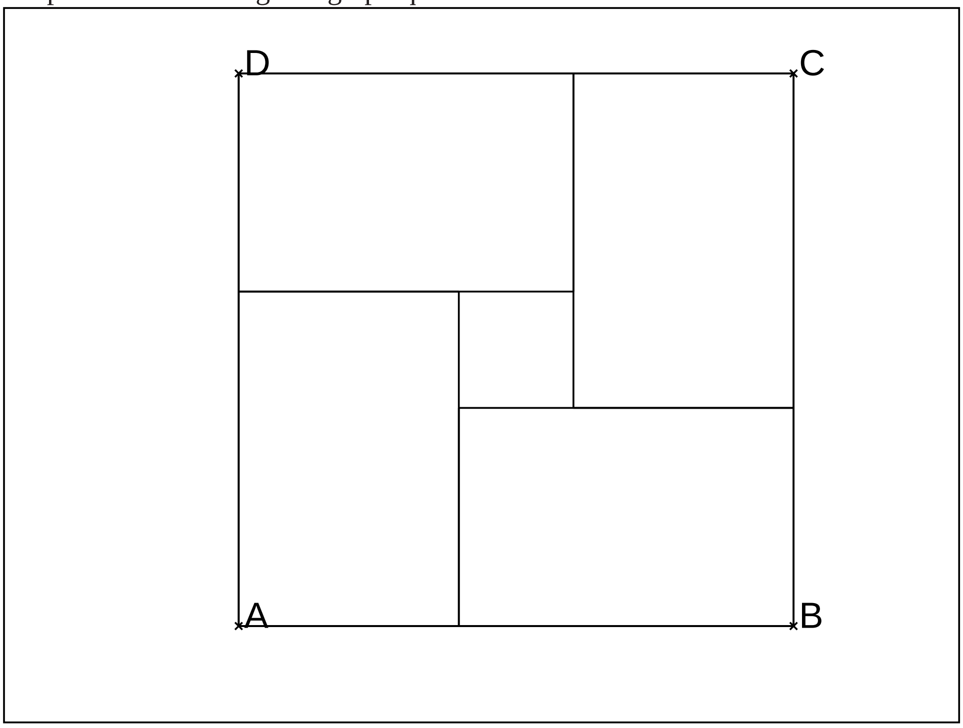
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

12.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. On tape :
   ```
   assume(x>0)
   f(x) :=x-1-ln(x)
   solve(diff(f(x))>0,x)
   ```
   On obtient : `[x>1]`
   f est donc décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$. Le minimum de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$ est donc $f(1)$.
   On tape : `f(1)`
   On obtient : `0`
   donc $f(x) \geq 0$ c'est à dire $\ln(x) \geq x - 1$

2. On a si $m = \dfrac{a+b+c}{3}$:
   $\ln(a/m) = \ln(a) - \ln(m) \leq a/m - 1$ (idem pour b/m et c/m) donc
   $\ln(a) + \ln(b) + \ln(c) - 3\ln(m) \leq (a+b+c)/m - 3$ ou encore
   $\ln(abc/m^3) \leq (a+b+c)/m - 3 = 0$
   On a donc montrer que $abc/m^3 \leq 1$ ou encore
   $abc \leq m^3 = (\dfrac{a+b+c}{3})^3$

3. Montrer que $(\dfrac{a+b}{2})^2 \geq ab$:
   On tape :
   `factor((a+b)^2-4a*b)`
   On obtient : `(a-b)^2`
   donc $(\dfrac{a+b}{2})^2 \geq ab$
   On peut voir cette inégalité graphiquement :

   dans le dessin on voit que l'on peut mettre 4 rectangles de côtés $a \times b$ dans le carré $ABCD$ d'aire $(a+b)^2$ et qu'il reste un carré d'aire $(a-b)^2$ et donc on a $(a+b)^2 \geq 4ab$.
   Autre démonstration proche de l'exercice :
   On pose $m = \dfrac{a+b}{2}$ et on a $\ln(a/m) = \ln(a) - \ln(m) \leq a/m - 1$ donc
   $\ln(ab/m^2) = \ln(a) + \ln(b) - 2\ln(m) \leq (a+b)/m - 2 = 0$ donc
   $ab \leq m^2 = (\dfrac{a+b}{2})^2$

13 Thème : Géométrie dans l'espace

13.1 L'exercice

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes. Pour chaque question, une seule des trois propositions a), b) ou c) est exacte. On demande d'indiquer laquelle, sans justification. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ est :
   a) l'ensemble vide b) un plan c) une sphère
2. On considère les points $E(0; 1; -2)$ et $F(2; 1; 0)$. Les coordonnées du barycentre G du système de points pondérés $\{(E; 1), (F; 3)\}$ sont :
   a) $G(6; 4; -2)$ b) $G(1.5; 1; -0.5)$ c) $G(0.5; 1; 1.5)$
3. Soit d la droite de représentation paramétrique :
   $x = 2 - t; y = 3t; z = -3,\ t \in R$.
   On considère les points $A(2; 3; -3)$, $B(2; 0; -3)$ et $C(0; 6; 0)$. On a :
   a) $d = (AB)$ b) $d = (BC)$ c) $d \neq (AB)$ et $d \neq (BC)$ et $d \neq (CA)$
4. La droite de représentation paramétrique :
   $x = -4t;\ y = 1 + 3t;\ z = 2 + 2t,\ t \in R$, et le plan d'équation :
   $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :
   a) orthogonaux b) parallèles c) ni orthogonaux ni parallèles.
5. L'ensemble des points tels que $x-y+2z-1 = 0$ et $-2x+4y-4z+1 = 0$ est :
   a) l'ensemble vide b) une droite c) un plan

13.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :
sa réponse aux questions 3) et 4) du QCM ; un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Géométrie dans l'espace".

Le candidat présentera au jury :
le contenu de ses fiches ;
pour chaque item de ce QCM, les méthodes et les savoirs mis en jeu pour trouver la réponse exacte.

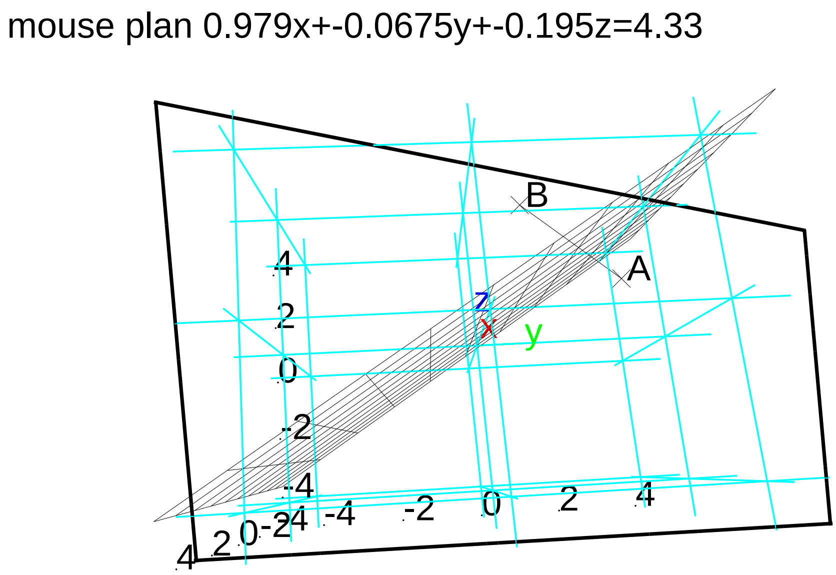
13.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ est le plan médiateur du segment AB (réponse b)).
   On peut faire la figure avec `Xcas`, on ouvre un niveau 3D (`Alt+h`), on se

met en mode (`Mode->point`), on clique sur 2 points A et B et on tape :

```
segment(A,B)
mediatrice(A,B)
```

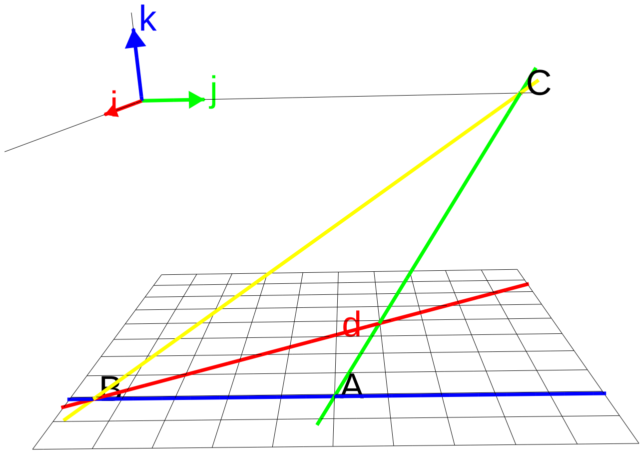
On obtient :



2. Soient$E(0;1;-2)$ et $F(2;1;0)$. Le barycentre G du système de points pondérés $\{(E;1),(F;3)\}$ vérifie : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OE}+3\overrightarrow{OF})$.
   Donc G a pour coordonnées $(3/2;1;-1/2)$ (réponse b)).
   On peut faire la figure avec `Xcas`, on ouvre un niveau 3D (`Alt+h`) et on tape :
   ```
   E :=point([0,1,-2])
   F :=point([2,1,0])
   G :=barycentre([E,1],[F,3])
   coordonnees(G)
   ```
   On obtient :
   `[3/2,1,-1/2]`
3. Soient d la droite $x=2-t; y=3t; z=-3,\ t\in R$ et les points $A(2;3;-3)$, $B(2;0;-3)$ et $C(0;6;0)$.
   Si $A\in d$ alors $t=0$ ce qui n'est pas vrai car $y_A\neq 0$ (mais $B\in d$ pour $t=0$), donc $d\neq AB$ et $d\neq CA$
   $C\notin d$ car $z_C=0\neq -3$ donc $d\neq AB$ et $d\neq CB$ (réponse c)).
   On peut faire la figure avec `Xcas`, on ouvre un niveau 3D (`Alt+h`), et on tape :
   ```
   d :=plotparam([2-t,3t,-3],t,affichage=1+epaisseur_ligne_3));
   ```

```
legende(point(1,3,-3),"d",rouge)
A :=point([2,3,-3])
B :=point([2,0,-3])
C :=point([0,6,0])
droite(A,B,affichage=4+epaisseur_ligne_3)
droite(A,C,affichage=2+epaisseur_ligne_3)
droite(C,B,affichage=3+epaisseur_ligne_3)
plan(z=-3)
demi_droite([0,0,0],[1,0,0])
demi_droite([0,0,0],[0,1,0])
demi_droite([0,0,0],[0,0,1])
legende(point(1,0,0),"i",rouge)
Ox_3d_unit_vector(affichage=1+epaisseur_ligne_3)
legende(point(0,1,0),"j",vert)
Oy_3d_unit_vector(affichage=2+epaisseur_ligne_3)
legende(point(0,0,1),"k",bleu)
Oz_3d_unit_vector(affichage=4+epaisseur_ligne_3)
```

On obtient :



4. Soient la droite d $x = -4t;\ y = 1 + 3t;\ z = 2 + 2t,\ t \in R$, et le plan P $x - 2y + 5z - 1 = 0$.
d est parallèle au vecteur $v = [-4, 3, 2]$ et le vecteur $n = [1, -2, 5]$ est normal à P.
On a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} = -4 * 1 + 3 * (-2) + 2 * 5 = 0$ donc $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$.
Donc d et P sont parallèles (réponse b)).

On peut faire la figure avec Xcas, on ouvre un niveau 3D (Alt+h), et on tape :

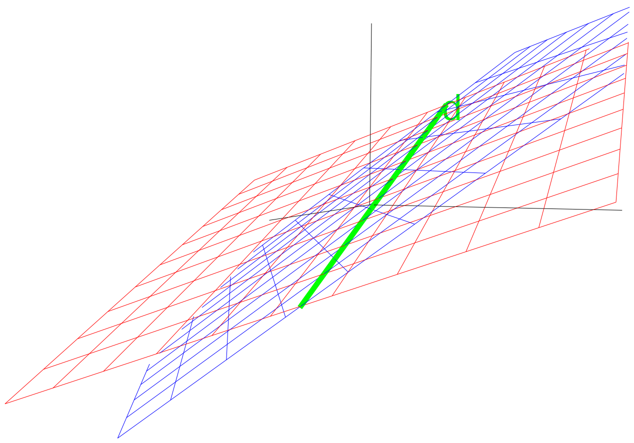
```
d :=droite([0,1,2],[-4,4,4])
P :=plan(x-2y+5z-1=0)
est_parallele(d,P)
```

On obtient : 1

5. Les points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ sont sur l'intersection des plans P d'équation $x - y + 2z - 1 = 0$ et Q d'équation $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$.
   Ces deux plans ne sont ni confondus ni parallèles puisque les vecteurs normaux à ces plans : $n_P = [1, -1, 2]$ et $n_Q = [-2, 4, -4]$ ne sont pas colinéaires (cross([1,-1,2],[-2,4,-4])=[-4,0,2] !=[0,0,0])donc ces points sont sur une droite (réponse b)).
   On peut faire la figure avec Xcas, on ouvre un niveau 3D (Alt+h), et on tape :

```
P :=plan(x-y+2z-1=0) :;affichage(P,1);
Q :=plan(-2x+4y-4z+1=0) :;affichage(Q,4);
d :=inter(P,Q,affichage=2+epaisseur_ligne_4);
demi_droite([0,0,0],[1,0,0]);
demi_droite([0,0,0],[0,1,0]);
demi_droite([0,0,0],[0,0,1]);
```

   On obtient :



14 Thème : Divers types de raisonnement

14.1 L'exercice

Les propositions suivantes sont indépendantes. Pour chacune d'elles, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. Toute suite numérique non majorée tend vers $+\infty$.
2. La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.
3. Il existe un nombre réel a et un nombre réel b, tels que $e^{2a}+e^{2b} < 2\sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$.
4. Il existe une fonction f continue en un point x_0 et non dérivable en x_0.

14.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :
sa réponse aux questions 2) et 3) ;
un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Divers types de raisonnement" dans des domaines variés (arithmétique, géométrie, dénombrement, analyse, ...).

Le candidat présentera au jury :
le contenu de ses fiches ;
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

14.3 Solution de l'exercice sans `Xcas`

1. C'est faux, par exemple $(-1)^n * n$ ou $n * sin(n)$ ou $(u_{2n} = n, u_{2n+1} = 1)$
2. Si la suite u est convergente et la suite v est divergente alors la suite $w = u + v$ est divergente est une proposition vraie. On fait une démonstration par l'absurde : Si la suite w est convergente et la suite u est convergente alors la suite $v = w - u$ est convergente car on sait (ou on montre) que la somme algébrique de 2 suites convergentes est convergente.
3. On fait une démonstration par l'absurde : Si il existe a et b tels que :
   $e^{2a} + e^{2b} < 2\sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$, alors on pose $A = e^a$ et $B = e^b$.
   Puisque $A > 0$ et $B > 0$ on a $\sqrt{A^2) \times B^2} = A \times B$ et l'inégalité s'écrit :
   $A^2 + B^2 - 2A \times B = (A - B)^2 < 0$ ce qui est faux.
   Donc il n'existe pas a et b vérifiant une telle inégalité.
   Ou bien on fait une démonstration directe : Puisque $\sqrt{e^{2a} \times e^{2b}} = e^a \times e^b$, on a $e^{2a} + e^{2b} < 2\sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$ est èquivalent à : $e^{2a} + e^{2b} - 2\sqrt{e^{2a} \times e^{2b}} = (e^a - e^b)^2 < 0$ et ceci est faux quelque soit a et b.
4. Il existe une fonction f continue en un point x_0 et non dérivable en x_0. C'est vrai par exemple $f(x) = |x|$ est continue en $x_0 = 0$, mais n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

15 Thème : Étude de configurations

15.1 L'exercice

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la courbe (C) d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x \in]0, +\infty[$. Soit a un réel strictement positif.

1. La droite (D_a), tangente à (C) au point A d'abscisse a, coupe l'axe des abscisses en P_a et l'axe des ordonnées en Q_a. Déterminer les coordonnées de P_a et Q_a et montrer que l'aire du triangle OP_aQ_a est indépendante du réel a.
2. On considère un réel $k > \frac{2}{a}$. On note (Δ_k) la droite parallèle à (D_a) et passant par le point de coordonnées $(0, k)$. Montrer que lorsque k varie dans l'intervalle $]\frac{2}{a}, \infty+[$, la droite (Δ_k) coupe la courbe (C) en deux points B_k et C_k et que le milieu I_k de $[B_k, C_k]$ est aligné avec O et A.

15.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :
sa réponse à la question 2)
un exercice se rapportant au thème "Étude de configurations".

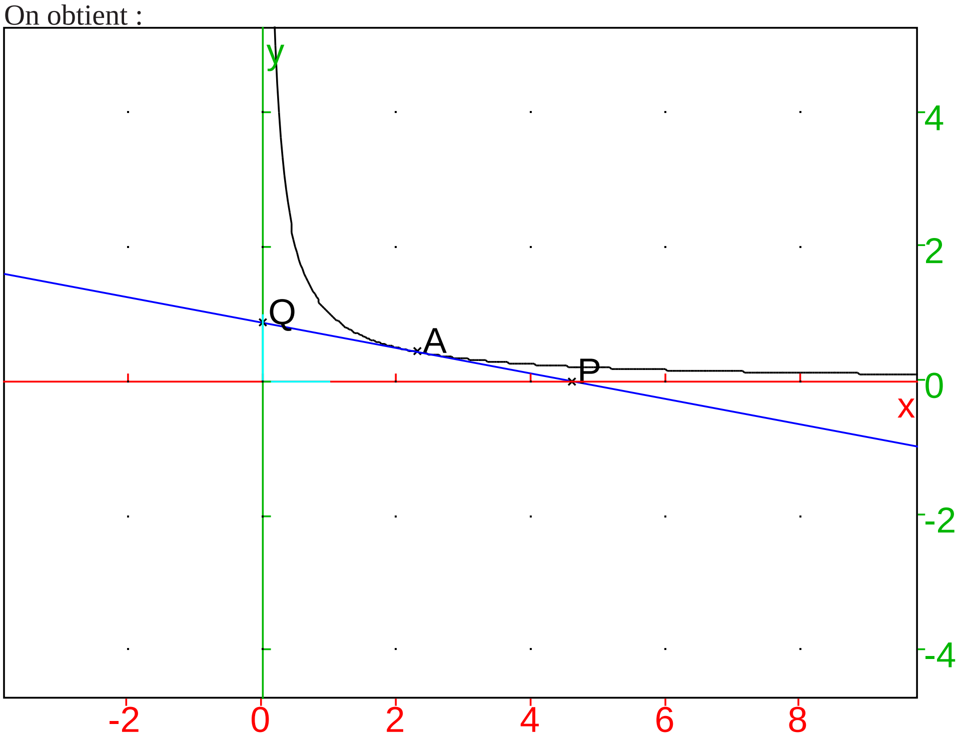
Le candidat présentera au jury :
le contenu de ses fiches ;
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

15.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. On tape :

```
supposons(a=[2.3,0,10,0.1]);
C:=plotfunc(1/x,x=0 .. 10);
A:=point(a,1/a);
D:=tangente(C,A):;affichage(D,4);
P:=inter_unique(D,droite(y=0));
Q:=inter_unique(D,droite(x=0));
```

On obtient :



On tape :

```
normal(equation(D))
```

On obtient : `y=((2*a-x)/(a^2))`

On tape :

```
coordonnees(P)
```

On obtient : `[2*a,0]`

On tape :

```
coordonnees(Q)
```

On obtient : `[0,1/a*2]`

On tape :

```
area(triangle(0,P,Q)
```

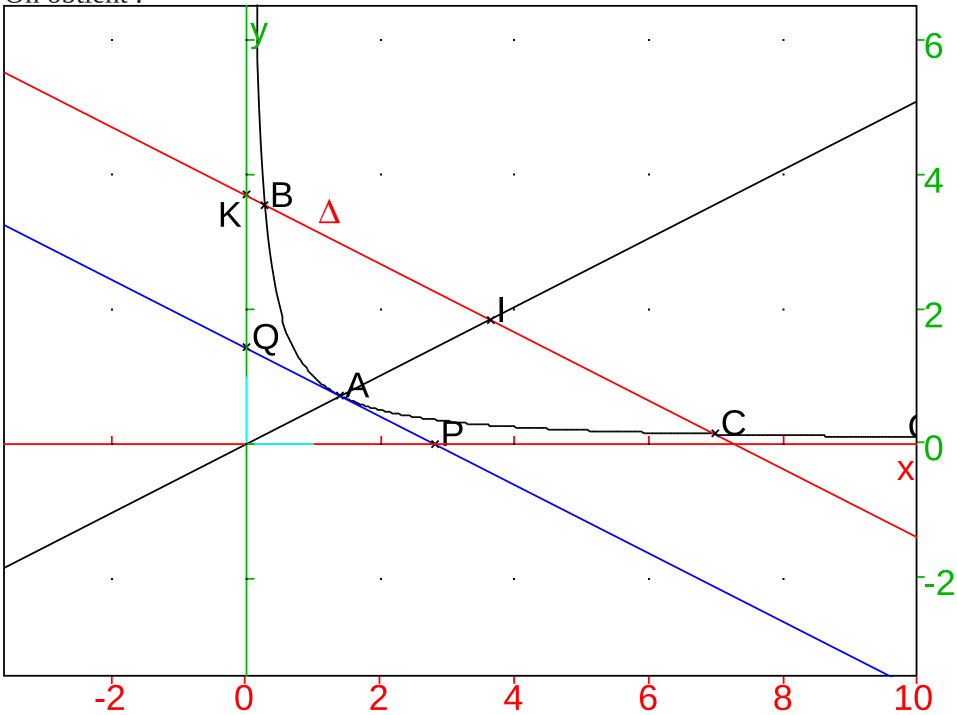
On obtient : `2`

2. On tape pour continuer la figure :

```
supposons(a=[1.4,0,10,0.1]);
C:=plotfunc(1/x,x=0 .. 10);
A:=point(a,1/a);
D:=tangente(C,A):;affichage(D,4);
P:=inter_unique(D,droite(y=0));
Q:=inter_unique(D,droite(x=0));
supposons(k=[3.7,2/a,10,0.1]);
K:=point(0,k,affichage=quadrant3);
```

```
Δ :=parallele(K,D,affichage=1);
[B,C] :=inter(C,Δ);
I :=milieu(B,C);
droite(A,I);
```

On obtient :



On tape :

```
est_aligne(0,A,I)
```

On obtient : `1`

16 Thème : Propriétés des fonctions

16.1 L'exercice

Les questions sont indépendantes. Dans chacun des cas suivants, proposer unefonction f qui vérifie les propriétés données. On donnera l'expression de $f(x)$.

1. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ae^{2x} + be^x + c$$

   La limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ et l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 0 et $\ln(2)$.

2. f est une fonction définie sur $]0, +\infty[$, $f(2) = 4$ et, pour tout x et tout y strictement positifs on a :

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

3. f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de f sur [-2, 2] est 0.
4. f est une fonction paire, non constante, définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x + 1) = f(x)$$

16.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

sa réponse aux questions 2) et 4) ;

un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Propriétés des fonctions".

Le candidat présentera au jury :

le contenu de ses fiches ;

les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

16.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$ La limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ donc $a > 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 0 et $\ln(2)$ donc si on pose $X = e^x$, l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ admet deux solutions, $e^0 = 1$ et $e^{\ln(2)} = 2$ donc :
   $aX^2 + bX + c = a(X - 1)(X - 2) = a(X^2 - 3X + 2)$.
   La fonction $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ répond à la question.
   Avec `Xcas`, on vérifie :

On tape :
```
f(x) :=exp(2x) -3*exp(x)+ 2
limit(f(x),x=inf)
```
On obtient : `+(infinity)`
On tape :
```
solve(f(x))
```
On obtient : `[0,ln(2)]`

2. f est définie sur $]0, +\infty[$, $f(2) = 4$ et, pour tout x et tout y strictement positifs on a : $f(xy) = f(x) + f(y)$
On sait que si $k = cste$, $g(x) = k * \ln(x)$ vérifie $g(x + y) = g(x) + g(y)$.
La relation $f(2) = 4$ va nous permettre de déterminer k $g(2) = 4 = k*\ln(2)$ donc $k = 4/\ln(2)$.
On choisit de prendre $f(x) = 4 * \ln(x)/\ln(2)$
Avec `Xcas`, on vérifie :
On tape :
```
f(x) :=4*ln(x)/ln(2)
f(2)
```
On obtient : `4`
On tape :
```
lnexpand(f(x*y))
```
On obtient : `(4*(ln(y)+ln(x)))/(ln(2))`

3. f est un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de f sur [-2, 2] est 0. Donc $f(x)$ est une fonction impaire, le polynôme sera constitué de monômes de degré impair. On choisit par exemple : $f(x) = x^3$
Avec `Xcas`, on vérifie :
On tape :
```
f(x) :=x^3
int(f(x),x=-2..2)
```
On obtient : `0`

4. f est une fonction paire, non constante, définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :$f(x + 1) = f(x)$.
f est périodique de période 1 et f est paire. La fonction $f(x) = \cos(2*\pi*x)$ répond à la question car elle est paire, non constante, définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :$f(x + 1) = f(x)$.
Avec `Xcas`, on vérifie :
On tape :
```
f(x) :=cos(2*pi*x)
f(-x)
```
On obtient : `cos(2*pi*x)`
On tape :
```
normal(trigexpand(expand(f(x+1))-f(x)))
```
On obtient : `0`

17 Thème : Probabilités

17.1 L'exercice

On place dans une urne 100 billets de loterie dont seulement 2 sont gagnants.

1. Un joueur achète deux billets, qu'il tire simultanément dans l'urne.
   1.a) Quelle est la probabilité de ne pas gagner ?
   1.b) En déduire la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant.
2. Soit n un entier $(n \geq 2)$. Un joueur achète n billets, qu'il tire simultanément dans l'urne.
   Soit A_n l'événement : "Avoir 1 ou 2 billet(s) gagnant(s) en ayant n billets".
   2.a) Décrire avec une phrase l'événement $\overline{A_n}$, événement contraire de A_n.
   2.b) Montrer que la probabilité de l'événement $\overline{A_n}$ est :

$$p(\overline{A_n}) = \frac{(100-n)(99-n)}{100 \times 99}$$

   2.c) Quel est le nombre minimum n_0 de billets à acheter pour que la probabilité d'avoir au moins 1 billet gagnant soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

17.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :
sa réponse à la question 2.b) ;
un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Probabilités". **Le candidat présentera au jury :**
le contenu de ses fiches ;
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

17.3 Solution de l'exercice sans `Xcas`

1. 1.a) la probabilité de ne pas gagner
   On ne gagne pas si on a choisit les 2 billets parmi les 98 billets non gagnants. On a donc `comb(98,2)` possibilités. Le nombre total de choix est `comb(100,2)`. la probabilité de ne pas gagner est donc :
   `comb(98,2)/comb(100,2)`.
   On tape :
   `comb(98,2)/comb(100,2)`
   On obtient : `4753/4950`
   1.b) "Avoir au moins un billet gagnant" est l'événement contraire à "Avoir aucun un billet gagnant", la probabilité de gagner est donc :
   `1-comb(98,2)/comb(100,2)`.

Avec `Xcas`, on tape :
`1-comb(98,2)/comb(100,2)`
On obtient : `197/4950`
C'est aussi $2/100*98/99+98/100*2/99+2/100*1/99$

2. 2.a) L'événement $\overline{A_n}$ est :
   "Avoir aucun billet gagnant en ayant n billets".
   2.b) On ne gagne pas si on a choisit les n billets parmi les 98 billets non gagnants. On a donc `comb(98,n)`=$\frac{98!}{n!(98-n)!}$ possibilités. Le nombre total de choix est `comb(100,n)`=$\frac{100!}{n!(100-n)!}$. la probabilité de ne pas gagner est donc $\frac{98!n!(100-n)!}{n!(98-n)!100!}=\frac{(100-n)(99-n)}{100\times 99}$.
   Donc :
   $$p(\overline{A_n})=\frac{(100-n)(99-n)}{100\times 99}$$
   2.c) Si la probabilité d'avoir au moins 1 billet gagnant est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, c'est que la probabilité d'avoir 0 billet gagnant est inférieure strictement à $\frac{1}{2}$.
   On cherche n tel que :
   $\frac{(100-n)(99-n)}{100*99}<\frac{1}{2}$ ou encore $2(100-n)(99-n)-9900<0$.
   On tape :
   `solve((100-n)*(99-n)/9900-1/2<0,n)` ou
   `solve(2*(100-n)*(99-n)-9900<0,n)`
   On obtient :
   `[((n>(1/2*(199-sqrt(19801)))) && (n<(1/2*(199+sqrt(19801)))))]`
   On tape :
   `evalf(1/2*(199-sqrt(19801)))`
   On obtient :
   `29.1419869524`
   Donc $n_0=30$.
   On vérifie et on tape :
   `(100-29)*(99-29)/9900.,(100-30)*(99-30)/9900.`
   On obtient :
   `0.50202020202,0.487878787879`

18 Thème : Équations différentielles

18.1 L'exercice

On se propose d'étudier les fonctions f dérivables sur $[0, +\infty[$ vérifiant la condition :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } x \in [0, +\infty[, \ f(x)f'(x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$$

1. On se propose de démontrer qu'une fonction vérifiant la condition (1) est strictement positive sur $[0, +\infty[$.
   1.a) Montrer que si la fonction f vérifie (1) alors f ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$.
   1.b) On suppose que la fonction f vérifie la condition (1) et qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) < 0$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, a]$.
   1.c) Conclure.
2. Existence et unicité de la fonction :
   2.a) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Déterminer une primitive de la fonction uu' sur cet intervalle.
   2.b) En déduire que si f est telle que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x)f'(x) = 1$ alors il existe une constante C telle que pour tout $x \in [0, +\infty[$,

   $$(f(x))^2 = 2x + C$$

   2.c) On rappelle que $f(0) = 1$. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour x réel positif.

18.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :
sa réponse aux questions 1.b) et 2.b) ;
un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Équations différentielles". **Le candidat présentera au jury :**
le contenu de ses fiches ;
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

18.3 Solution de l'exercice sans `Xcas`

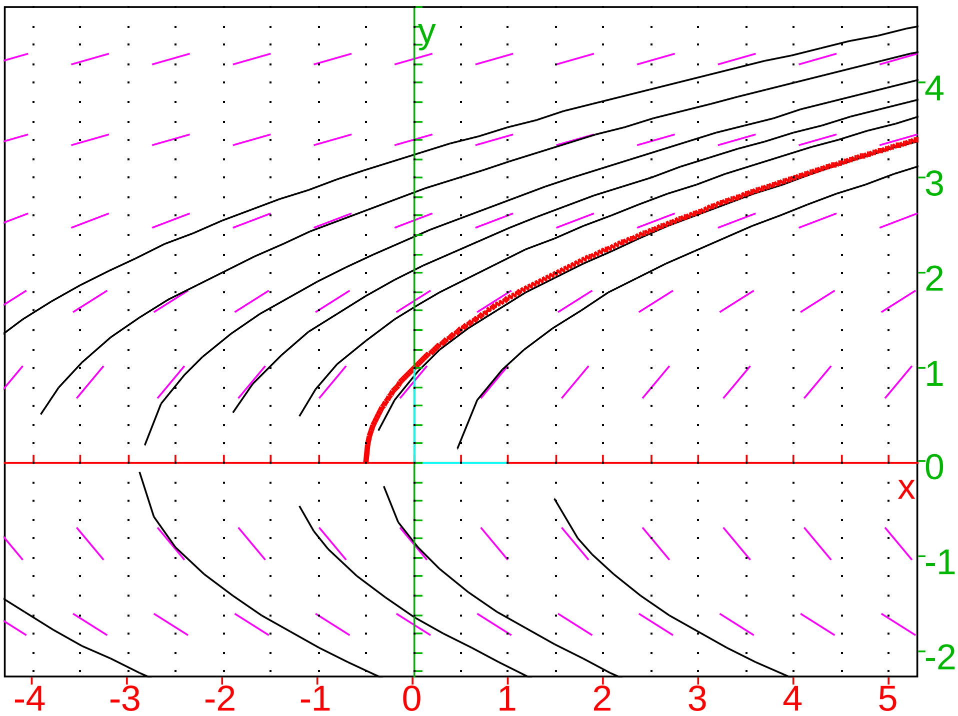
1. 1.a) On sait que pour tout $x \in [0, +\infty[, \ f(x)f'(x) = 1$ donc pour tout $x \in [0, +\infty[, \ f(x) \neq 0$
   1.b) Si il existe $a > 0$ telle que $f(a) < 0$ alors puisque $f(0) = 1 > 0$ et que f est dérivable, d'après le théorème des valeurs itermédiaires il existe

$b \in]0; a[$ tel que $f(b) = 0$
1.c) Comme f ne s'annule pas, on en déduit qu'il n'est pas possible qu'un tel a existe donc pour tout $x \in [0, +\infty[, \ f(x) > 0$.

2. 2.a) Une primitive de la fonction uu' sur un intervalle I est $\frac{1}{2}u^2$
2.b) On sait que sur un intervalle les primitives d'une fonction sont égales à une constante près. Une primitive de 1 sur $[0, +\infty[$ est x et une primitive de $f(x)f'(x)$ est $\frac{1}{2}f(x)^2$ donc il existe une constante C tel que :
pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $\dfrac{1}{2}f(x)^2 = x + C$
2.c) Puisque $f(0) = 1$ on en déduit que $C = \dfrac{1}{2}$ c'est à dire que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $f(x)^2 = 2x + 1$.
Puisque d'après 1) on sait que $f(x) > 0$ sur $[0, +\infty[$ on en déduit que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $f(x) = \sqrt{2x + 1}$
Remarque
Pourquoi se limite-t-on à $[0, +\infty[$?
On a montré ici, que sur un intervalle I, on a :
$f(x) > 0$ et $f(x)^2 = 2(x + C)$ avec $C = cste$ donc
f est définie sur $] - C; +\infty[$.
Si $f(0) = 1$, alors $C = \dfrac{1}{2}$ donc
$f(x) = \sqrt{2x + 1}$ sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

18.4 Solution de l'exercice avec `Xcas`

Avec `Xcas`, on tape :
`desolve((y*y'=1) and (y(0)=1),y)`
On obtient :
`[sqrt(2*x+1)]`
On ouvre un niveau de géométrie 2-d et on tape :
`plotfunc(sqrt(2x+1),x=-0.5..7,affichage=1+epaisseur_ligne_3`
On peut alors avoir le champ des tangentes avec le menu :
`Graphe->Slopefield Ode (2-d)` on tape `1/y` comme valeur de `dy/dt`, puis on clique sur les points donnant les différentes conditions initiales et on termine en changeant de mode.
On obtient :


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

19 Thème : Arithmétique

19.1 L'exercice : L'âge du capitaine

Le capitaine a fait naufrage. Tout ce que l'on a retrouvé sur lui est sa carte de sécurité sociale. On parvient à déchiffrer son numéro INSEE, sauf le deuxième chiffre a et le troisième chiffre b qui sont illisibles : 1ab1271153044 clé 67
Les deux chiffres a et b qui manquent sont, dans cet ordre, les deux derniers chiffres de l'année de naissance du capitaine. On se propose d'utiliser la clé du numéro INSEE pour retrouver cette année de naissance.

1. La clé K d'un numéro INSEE est calculée de la manière suivante : $K = 97 - R$ où R est le reste de la division euclidienne par 97 de l'entier N constitué par les 13 premiers chiffres du numéro INSEE. 1.a) Démontrer que la clé K d'un numéro INSEE est telle que $N + K \equiv 0 \pmod{97}$. 1.b) Déduire que, pour le numéro INSEE du capitaine, on a : $N \equiv 30 \pmod{97}$.
2. On écrit $1ab1271153044 = 1ab \times 10^{10} + A$, où $A = 1271153044$. 2.a) Calculer le reste de la division euclidienne de A par 97. 2.b) Justifier la congruence suivante : $10^2 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 97)$. 2.c) En déduire que l'on a : $10^{10} \equiv 49 \pmod{97}$.
3. 3.a) Déduire des résultats établis aux questions 1) et 2) que l'on a :

   $$1ab \times 49 \equiv 73 \pmod{97}$$

   3.b) Vérifier que l'on a : $49 \times 2 \equiv 1 \pmod{97}$. 3.c) Déterminer l'année de naissance du capitaine.

19.2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :
sa réponse à la questions 3) ;
un ou plusieurs exercices se rapportant au thème Arithmétique"".

Le candidat présentera au jury :
le contenu de ses fiches ;
les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

19.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

Tout d'abord une remarque : on peut avoir 2 solutions pour les valeurs de a et de b étant donné que l'on travaille dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$.
Par exemple 1991271153044 $\%97 =$ 1021271153044 $\%97 = 8\ \%97$.
On suppose donc que $10a + b < 97$ ou $10a + b > 3$....

1. On a :
INSEE =1ab1271153044 clé 67 donc $N = 1ab1271153044$ et $K = 67$
$K = 97 - R = 67$ et
$N = 97 * Q + R$ (avec $Q \in \mathbb{N}$,$R \in \mathbb{N}$ et $R < 97$)
1.a) On a $N + K = 97 * Q + R + 97 - R = 97 * (Q + 1)$ donc
$N + K \equiv 0 \pmod{97}$
1.b) Puisque :
$K = 67$, $K \equiv -30 \pmod{97}$ et
$N + K \equiv 0 \pmod{97}$
on a $N \equiv 30 \pmod{97}$

2. $1ab1271153044 = 1ab \times 10^{10} + A$, où $A = 1271153044$
2.a) Avec `Xcas`, on tape : `irem(1271153044,97)`
On obtient : `54`
Ou on tape : `1271153044 % 97`
On obtient : `-43 % 97`
donc $A \equiv 54 (\mathrm{mod}\ 97)$
2.b) $10^2 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 97)$ car $10^2 = 100 = 97 + 3$
2.c) $10^{10} \equiv 49 \pmod{97}$ car
$10^{10} = 100^5 \equiv 3^5 = 243 \equiv 49 \pmod{97}$ (puisque 243=97*2+49)

3. 3.a) Montrons que : $1ab \times 49 \equiv 73 \pmod{97}$.
On a :
$N \equiv 30 \pmod{97}$
$N = 1ab1271153044 = 1ab \times 10^{10} + 1271153044 = 1ab \times 10^{10} + A$
$10^{10} \equiv 49 \pmod{97}$ et
$A \equiv 54 (\mathrm{mod}\ 97)$
donc
$N \equiv 1ab \times 49 + 54 = 30 \pmod{97}$
Donc $1ab \times 49 \equiv 30 - 54 = -24 \pmod{97}$
$-24 \equiv 73 \pmod{97}$ donc
$1ab \times 49 \equiv 73 \pmod{97}$
3.b) On a : $49 \times 2 \equiv 1 \pmod{97}$.
En effet 49*2=98=97+1.
Avec `Xcas`, on tape :
`inv(49 % 97)`
On obtient : `2 % 97`
3.c) Puisque :
$1ab \times 49 \equiv 73 \pmod{97}$ On a : $1ab \times 49 \times 2 \equiv 73 \times 2 = 146 \pmod{97}$
$49 \times 2 \equiv 1 \pmod{97}$.
Donc $1ab \equiv 146 \pmod{97}$
Les deux derniers chiffres de l'année de naissance du capitain sont donc 46.

Avec `Xcas`, on pose $10 * a + b = C$ et on a
$N - 30 = 1ab1271153014 = (100 + C) * 10^{10} + 1271153014 \equiv 0 \pmod{97}$

On tape :

```
solve((100+C)*10^10+1271153014 %97,C)
```

On obtient : `[46]`

Remarque

J'aurai préférai que le texte dise par exemple, que l'année de naissance du capitaine est dans l'intervalle [1900 ;1997[. On cherche les deux chiffres a et b qui manquent c'est à dire on cherche un nombre entier $C < 97$ sachant que (cf question 1.a) ;
$N - 30 = 1ab1271153014 = (100 + C)10^{10} + 1271153014 \equiv 0 \pmod{97}$
Puis, je trouve préférable de travailler avec le nombre C et non avec l'écriture en base 10 du nombre 100+C=100+10a+b.
On continue ensuite de la même façon, on a :
$100 \,\%97 = 3 \,\%97$,
$10^{10} \,\%97 = 243 = 49 \,\%97$,
$10^{12} \,\%97 = 3 * 49 = 50 \,\%97$
on a
$(100 + C) * 10^{10} + 1271153014 \equiv 49 * C + 1271153064 \equiv 0 \pmod{97}$
$1271153064 \,\%97 = -23 \,\%97$ donc
$49 * C \,\%97 = 23 \,\%97$
on cherche l'inverse de 49 dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$, on a
$49 * 2 \,\%97 = 98 \,\%97 = 1 \,\%97$ donc l'inverse de 49 dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$ est $2 \,\%97$.
Donc en multipliant membre à membre $49 * C \,\%97 = 23 \,\%97$ par $2 \,\%97$, on a :
$C \,\%97 = 46 \,\%97$
Puisque $0 \leq C < 97$ on en déduit que $C = 46$ et donc que $a = 4$ et $b = 6$