Examen du mercredi 9 janvier, de 13h30 à 15h30.
Documents autorisés.

1. Statistiques

Les tableaux ci-dessous donnent l'étendue moyenne de la banquise Arctique pendant l'été (en millions de kilomètres carrés d'après http ://arctic.atmos.uiuc.edu/SEAICE/)

$$\begin{pmatrix} 1980 & 9.119660 \\ 1981 & 8.935540 \\ 1982 & 9.215660 \\ 1983 & 9.386710 \\ 1984 & 8.873930 \\ 1985 & 8.729550 \\ 1986 & 9.117910 \\ 1987 & 9.240410 \\ 1988 & 9.190050 \\ 1989 & 9.156740 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1990 & 8.072640 \\ 1991 & 8.657890 \\ 1992 & 9.238740 \\ 1993 & 8.383870 \\ 1994 & 8.812590 \\ 1995 & 7.735010 \\ 1996 & 9.263750 \\ 1997 & 8.297560 \\ 1998 & 8.622290 \\ 1999 & 8.502410 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 & 8.426430 \\ 2001 & 8.607460 \\ 2002 & 8.093670 \\ 2003 & 8.251430 \\ 2004 & 8.113530 \\ 2005 & 7.729540 \\ 2006 & 7.775570 \\ 2007 & 5.556620 \end{pmatrix}$$

Faire une régression linéaire de l'étendue en fonction de la date. Donner l'allure du nuage de points et de la droite de régression linéaire. En utilisant ce modèle linéaire, à quelle date peut-on estimer que la banquise aura disparu ? Le modèle linéaire est-il de bonne qualité ?

2. Unités

Dans les pays anglo-saxons, les volumes de gaz naturel sont souvent exprimés en pied au cube (cubic feet), et l'énergie correspondante en Btu (British termal unit), un pied au cube de gaz correspondant à une énergie de 1.03e3 Btu. Calculer en kWh l'énergie correspondant à la consommation mondiale de gaz naturel en 2005, d'après BP Statistical Review 266e9 pied au cube par jour. Comparer à la consommation de pétrole annuelle de 2005 (3836.8Mtep), sachant qu'1 tep (tonne équivalent pétrole) correspond à 42GJ (gigajoules).

Comparer avec l'énergie solaire reçue par la Terre pendant 1 heure (on assimile la section de la Terre perpendiculaire à la direction Soleil-Terre à un disque de rayon 6370 kilomètres, l'énergie reçue pendant 1 seconde sur une surface de 1 mètre carré perpendiculaire au Soleil est de 1364J).

3. Complexes

Soit $z = x + iy$ un complexe et f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \frac{z-3}{z+i+1}$$

Déterminer l'ensemble des z tels que $f(z)$ est réel (donner une équation cartésienne de cet ensemble et le caractériser). Même question pour $f(z)$ imaginaire pur.

4. Résolution d'équation

Soit $f(x) = 2\sin(2x) + x - 2$. On souhaite résoudre l'équation $f(x) = 0$. Montrer que f n'admet pas de solution en-dehors de l'intervalle $[0,4]$. Faire le tableau de variations de f sur cet intervalle, en déduire le nombre de solutions de l'équation, puis déterminer à la calculatrice des valeurs approchées de ces solutions.

On considère maintenant la suite récurrente

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}, \quad u_0 \in [0,4]$$

(c'est la suite construite par la méthode de Newton appliquée à l'équation $f(x) = 0$). Pour chaque solution de l'équation $f(x) = 0$, déterminer une valeur de $u_0 \in [0,4]$ telle que la suite (u_n) semble converger vers u_0. Plus générallement, décrire ce que fait la suite (u_n) en fonction de la valeur de $u_0 \in [0,4]$, en particulier converge-t-elle toujours vers l'une des solutions de $f(x) = 0$?