Module Calculatrices-L3

Bernard.Parisse@ujf-grenoble.fr

21 mars 2008

Résumé

Ce cours/TD donné en 2005/6 à l'Université de Grenoble a pour but de présenter les possibilités des meilleures calculatrices des différents constructeurs (Casio, HP, TI) en parallèle, en insistant sur les possibilités communes. On espère d'une part faciliter le travail de futurs enseignants dont les élèves auront probablement des modèles de calculatrices différents et d'autre part les préparer à s'adapter aux évolutions inévitables de la technologie pendant leur carrière en distinguant mieux les concepts de leur traduction sur tel ou tel modèle. Certaines parties ne sont pour l'instant présentées que pour TI et HP (aucun étudiant présent n'avait de Casio Classpad)

Table des matières

1 Modèles de calculatrices graphiques

Un bref survol des capacités des meilleurs modèles graphiques des constructeurs, par ordre alphabétique, avec entre parenthèses la gamme de prix.

– Casio :
  Le Classpad 300 est à mi-chemin entre un PDA et une calculatrice (environ 190 euros, présent au capes) : calcul formel, géométrie (point fort pour ce modèle, on dispose d'un stylet), tableur, 3-d, un peu de programmation (pas de possibilités de fonctions complexes), pas d'unités/constantes physiques.
  La Graph 100 (prix ?) fait aussi du calcul formel mais est moins performante, n'a pas de module de géométrie, ni tableur, ni de 3-d, et la programmation est rudimentaire. Les autres modèles Casio ne font ni calcul formel, ni géométrie.
  Pour tester la Classpad 300, il existe un émulateur en version limitée à 30 jours sur `classpad.net` pour Windows (fonctionne sous Linux avec Wine, cliquer sur H-Key pour pouvoir utiliser le bouton droit de la souris).
– HP :
  Deux familles principales, celle des 49 avec les 49G (occasion), 49G+ (environ 190 euros) et 48GII (prix ?) ; et la famille des 40 avec la 40G (occasion) et la 40GS (disponibilité rentrée 06). Les 2 familles font du calcul formel, la programmation est plus restreinte sur la famille des 40. La 3-d et les unités et constantes physiques sur les 49G, 49G+ et 48GII. La géométrie est disponible sur la 49G en téléchargeant une ROM depuis `www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse`, elle dispose aussi d'un tableur (expérimental). Les 49G et à fortiori les 40G sont parfois lentes.
  Pour les tester, il existe des émulateurs et des ROMs sur `www.hpcalc.org`
– TI :
  Le haut de gamme, parfois nommé TI9x, regroupe les Voyage 200 (capes, 240 euros environ), TI92 (occasion) et TI89 (180 euros environ) et la TI-NSpire CAS (210 euros environ) : calcul formel, géométrie (à charger gratuitement pour les TI89), 3-d (attention pas sur la NSpire pour le moment), programmation, unités et constantes physiques. Il existe une application flash tableur incluse sur les V200 et gratuite sur les TI89.
  Le milieu de gamme regroupe les TI83+ et 84 (100 à 120 environ), elles disposent d'un module de géométrie gratuit mais pas de calcul formel, ni de 3-d. Le tableur est payant. Les autres modèles de TI ne font ni géométrie ni calcul formel.
  Il existe un émulateur pour toutes les TI, pour Linux, chercher tiemu, pour Windows, chercher sur `www.ticalc.org`, on peut ensuite télécharger les mises à jour du système de la calculatrice à émuler sur le site de TI `www.ti.com`.

2 Prise en main

– Les touches sur les TI/HP : chaque touche peut avoir 6 fonctions selon qu'elle est "shiftée" ou en mode alphabétique (repérez les 2 shift droit et gauche sur HP ou shift et 2nd sur TI et la touche alpha). On peut bloquer le mode alpha sur les TI9x et 49 en tapant 2 fois sur la touche alpha et débloquer en tapant une fois sur alpha. Exemple : pour éteindre taper shift-ON. Les TI V200 et nspire CAS ont un clavier alphabétique séparé. Sur les nspire CAS, il y a seulement un modificateur de touche, la touche ctrl.
– Les calculs se font dans l'application main ou l'historique selon les modèles. Sur les Classpad et V200, il faut sélectionner Main depuis le menu principal. Sur la nspire CAS, touche maison puis 1. calculer ou Ctrl-fleche droite/gauche s'il existe deja une page de calcul.
  On tape le calcul directement sur le Classpad, ou dans une ligne séparée appelée ligne de commande sur les TI et HP. Taper ENTER (ou EXE sur Casio) pour exécuter la ligne de commande. Les paires de question/réponse s'affichent dans l'historique. On peut modifier sur place un calcul sur les Casio, ou recopier un niveau de l'historique puis le modifier sur les TI/HP avec les flèches haut et bas.
– Pour interrompre un calcul, appuyer sur ON sur les HP (si cela ne fonctionne pas, taper ensuite ON-F3, ou enfoncer le bouton reset à l'arrière), sur ON sur les TI, cliquer sur ESC en bas à droite sur les Casio.
– Les menus s'actionnent au stylet sur le Classpad, ou avec les touches F1-F6 sur les TI/HP ou la touche menu, les touches de direction tab et entree sur le nspire CAS.
  Le menu apparait en bas sur les HP (bandeau). On peut changer le menu par des touches du clavier (par exemple TOOL qui est le menu courant de l'application, ALGB le menu algèbre, etc.). Utiliser NXT et PREV (49) pour passer à la page suivante/précédente du menu.
– Aide : on dispose d'un catalogue (touche CAT ou dessin d'un livre sur le nspire CAS) qui décrit brièvement le type des arguments de chaque commande. Les HP et la nspire CAS disposent d'une aide en ligne pour les commandes du CAS (TOOL NXT HELP) décrivant brièvement la commande, avec un ou des exemples et chez HP des liens vers les commandes proches.
– Modes : les calculs sont affectés par le mode courant (réel/complexe, exact/approx, radian/degré, etc.). Ces modes apparaissent en bas sur les Classpad/TI et en haut sur les HP, dans une ligne appelée ligne d'état (R/C, =/ , RAD/DEG). Pour les changer, utiliser la touche MODE sur les TI/HP ou le menu Settings du Classpad (choisir basic) ou touche Home puis 8.Info systemes et réglage du classeur sur la nspire CAS.
  Attention, le mode dit décimal des Classpad ne signifie pas que les calculs intermédiaires sont effectués en mode approximatif, il peut être nécessaire d'utiliser `approx()` pour forcer l'exécution d'un calcul intermédiaire en mode approx.

Exercice :

1. Calculer $\sin(3)$ en mode radian et en mode degrés.
2. Calculer 10 ! en mode exact
3. Passez en mode approché et refaites le même calcul
4. Développer puis factoriser le polynôme $(x+3)^7 \times (x-5)^6$. Utiliser les menus pour trouver la fonction expand ou factor, essayez aussi de les saisir au clavier.

3 Représentation exacte et approchée des nombres.

On distingue :

– Les entiers courts :
  Ce sont des entiers de taille fixe (32 ou 64 bits par exemple) compris entre $]-2^{31}, 2^{31}]$, utiliser le préfixe # sur les HP49. Utiles pour programmer et faire des calculs modulaires (pour $n < \sqrt{2^{31}}$ (ou $n < \sqrt{2^{63}}$).
– Les entiers longs (en précision arbitraire) :
  La limite est beaucoup plus grande, mais les opérations arithmétiques sont plus longues.
– Les nombres flottants
  Ils se composent d'une mantisse et d'un exposant séparés par le signe `E`. Sur les calculatrices, ils sont codés en base 10 (on parle alors de BCD, binaire codé décimal). La base 10 est utilisée sur beaucoup de calculatrices car elle permet de représenter les nombres décimaux sans erreurs.
  Notation scientifique : on tape la mantisse, puis e (touche EE), puis l'exposant. Le séparateur décimal est le point par défaut.
  Erreurs d'arrondi et de représentation. La mantisse étant de taille finie, à chaque calcul ou dès qu' on représente un rationnel qui n'est pas de la forme un entier divisé par la base à une puissance petite, on fait une erreur relative sur le nombre représenté. Par exemple, si on est en base 10 avec une mantisse de 15 digits, l'erreur relative d'arrondi est de 10^{-15}. Lorsqu'on effectue une multiplication, les erreurs relatives s'additionnent (et il faut ajouter une erreur relative d'arrondi). Pour les additions et soustractions ce sont les erreurs absolues qui s'additionnent, donc si les mantisses se compensent presque, l'erreur relative peut augmenter considérablement, par exemple $(1.0 + 10^{-15}) - 1.0$ devient nul.
  N.B. : sur les HP49, il existe une librairie pour calculer avec des nombres flottants longs (le nombre de chiffres significatifs est alors fixé par l'utilisateur). Les erreurs d'arrondis sont plus faibles mais le temps de calcul est plus long.

Spécifications pour les entiers et les flottants selon les modèles :
– Classpad : les entiers ne peuvent pas dépasser 611 chiffres.
  Les flottants utilisent le BCD avec 15 décimales.
– HP : entier en précision arbitraire, 5 quartets (taille) puis nombre en base 10, la limite sur les nombres utilisables est donc la mémoire (200K environ) et le temps nécessaire aux calculs. Le temps d'affichage d'un entier long est proportionnel à la taille de l'entier en raison du choix du format BCD de stockage des entiers.
  Flottants : 2 formats (interne plus précis, externe accessible depuis l'interface), le mode est aussi le BCD.
– TI : Les entiers en précision arbitraire sont codés par un "tag" de signe, un octet pour la longueur, puis la valeur absolue de l'entier (en base 2). Ils sont donc limités par le champ longueur à 255 octets, le plus grand entier représentable est $(256^{255} - 1)$ soit 614 chiffres. L'affichage d'un entier nécessite une conversion de la base 2 à la base 16, il est donc proportionnel en temps au carré du nombre de chiffres, et devient sensible lorsqu'on approche de la limite des 600 chiffres. Sur les TI nspire CAS, la taille autorisée est plus longue, en affichage on atteint 992 chiffres, en interne c'est probablement plus.
  Les flottants utilisent le format BCD avec 14 décimales.

Exercices (Calcul exact et approché sur les entiers et réels)

1. Y-a-t-il une limite sur la plus grande factorielle calculable exactement et approximativement sur votre calculatrice ?
2. Trouver n le plus petit possible tel que $(1.0 + 10^{-n}) - 1.0$ renvoie 0.0
3. Calculer les premières valeurs de u_n en mode exact et approché avec :
   $$u_{n+1} = 2(u_n - 1/3) = 2u_n - 2/3, \quad u_0 = 2/3$$
   Comparer les résultats, en mode approché obtient-on la même suite selon la formule de récurrence entrée ?

4. Calculer en mode approché en croissant ou en décroissant

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

pour quelques valeurs de n, obtient-on le même résultat ?

5. Déterminer la valeur et le signe de la fraction rationnelle

$$F(x, y) = \frac{1335}{4} y^6 + x^2(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2) + \frac{11}{2} y^8 + \frac{x}{2y}$$

en $x = 77617$ et $y = 33096$ en faisant deux calculs, l'un en mode approché et l'autre en mode exact. Que pensez-vous de ces résultats ?

4 L'application main/historique

Il s'agit en fait d'un mini-logiciel de calcul formel. En général les noms des commandes du Casio Classpad sont les mêmes que sur TI, et certains noms de commande sont identiques sur TI et HP mais ces derniers sont saisis en majuscules.

4.1 Objets, évaluation

Les principaux types d'objets manipulables par ce logiciel sont : les entiers en précision arbitraire (limités à 600 chiffres sur les TI/Casio), les flottants (14 ou 15 chiffres significatifs), les complexes (de partie réelle et imaginaire des flottants ou des entiers), les fractions, les symboles (ou noms de variables), les expressions, les vecteurs, les matrices, les chaines de caractères, les listes (d'objets quelconques). Il existe d'autres types selon les machines, par exemple les objets-unités (pour la physique), les objets graphiques, les programmes et fonctions etc.

Pour certains types, on peut parfois s'aider d'un mode d'édition convivial, par exemple l'éditeur d'équation sur les HP, ou les éditeurs de matrice chez HP/TI (attention chez TI, sélectionnez au début le mode Matrix de de APPS Data/Matrix). Il existe toujours une syntaxe en mode ligne de commande, le type de l'objet étant souvent défini par des délimiteurs en début et fin de saisie :

– entiers et réels n'ont pas de délimiteurs. Un réel entier se distingue par le séparateur décimal `.` et éventuellement le séparateur `E` entre mantisse et exposant.
– les complexes s'écrivent en notation algébrique $x + i * y$ (avec le i spécial du clavier sur TI, sur HP/Casio, on utilise le i normal), ou sous forme d'un couple de réels (x, y) (on obtient alors un complexe approché).
– les noms de variables n'ont pas délimiteurs. Les noms de variables peuvent avoir plusieurs lettres, de plus ils sont sensibles à la différence majuscule/minuscule sur HP. Une variable peut être affectée (touche `STO`), dans ce cas sa valeur d'affectation sera utilisée lors de l'évaluation d'une expression. Une variable non affectée est dite symbolique. On peut purger une variable avec la commande `PURGE` (HP) ou `DelVar` (TI/Casio). Une variable peut être locale à l'intérieur d'un programme, dans ce cas sa valeur dans le programme est indépendante de sa valeur en dehors.
– les expressions n'ont pas de délimiteurs, la syntaxe est la syntaxe algébrique, il faut indiquer toutes les opérations (y compris `*`, sauf sur les TI/Casio après un entier/réel et avant un symbole), et les règles de priorité s'appliquent (par exemple `1/2*3` vaut $3/2$). Attention, sur TI, le signe moins unaire est différent du signe moins binaire.
– les listes utilisent les délimiteurs `{ }`, les éléments sont séparés par des virgules (ou des espaces en mode RPN sur HP). Attention, les listes sur TI ne peuvent contenir de listes que si ces listes sont toutes de même longueur.

– les vecteurs utilisent les délimiteurs `[]`, les éléments sont séparés par des virgules (ou des espaces en mode RPN sur HP).
– les matrices utilisent les délimiteurs `[]`, puis on donne les vecteurs lignes de la matrice, sans séparateur sur les TI, et séparées par des virgules sur les HP en mode algébrique.
– Les programmes sur HP peuvent être entrés en ligne de commande avec le délimiteur `<< >>`. Sur TI, il faut utiliser l'éditeur de programmes. Nous reviendrons sur les programmes ultérieurement.
– Les chaines utilisent le délimiteur `"`.

L'accès à un élément d'une variable contenant un vecteur ou une liste se fait avec la notation indiciée, les indices variant de 1 à la taille du vecteur ou de la liste (en mode RPN sur HP, il faut utiliser l'instructionn `GET`). Pour les matrices, on donne 2 indices sur TI et Casio, sur HP on passe un indice obtenu en multipliant le nombre de colonnes par le numéro de ligne moins un et en ajoutant le numéro de colonne.

En résumé :

Types	Exemple	Instructions relatives
Entier	1	
Réel	1.2	
Complexe exact	1+2*i	
Complexe approché	1.2+2.3*i	
Variable	x	`STO>`, `PURGE` ou `DelVar`
Expression	1+2*sin(x)	`OBJ->` ou `part`
Liste	{ 1, 2}	L[1]
Vecteur	[1, 2]	v[1]
Matrice	[[1,2],[3,4]]	M[2,1]
	TI : [[1,2] [3,4]]	HP : M[3]
Chaine	`""`	

Il existe des instructions permettant de convertir des types en autres types :

Objets : conversion, décomposition	HP	TI	Casio
Matrice vers liste	`AXL`	`mat->list`	`matToList`
Liste vers matrice	`AXL`	`list->mat`	`listToMat`
Rendre approché	`->XNUM`	`approx`	`approx`
Rendre exact	`XQ`	`exact`	`exact`
Vers chaine de caractères	`->STR`	`string`	
De chaine de caractère	`STR->`	`expr`	`expToStr`

Lorsqu'on tape une commande dans (main/historique), il s'agit d'une chaine de caractères, qui est ensuite transformée en un objet par l'interpréteur (en anglais parser), puis évaluée en fonction du contexte et des modes et/ou simplifiée ou non. L'évaluation consiste à remplacer les variables qui ont été affectées par leur valeur, et à propager ces remplacement dans les calculs. La simplification consiste à appliquer certaines règles (par exemple regrouper des termes, simplifier les fractions rationnelles, ...). Chez TI, l'évaluation et la simplification sont automatiques, et ne peuvent être empêchés. Chez Casio, on peut empêcher la simplification en mode assistant. Chez HP, on peut empêcher l'évaluation en utilisant le symbole `'` (quote) ou la fonction `QUOTE`, on peut forcer une évaluation avec l'instruction `EVAL`. Notez qu'en mode RPN (voir ci-dessous) sur les HP, il n'y a aucune simplification automatique.

Comme dans les logiciels de calcul formel, le langage des calculatrices formelles est non typé, c'est-à-dire que les instructions s'adaptent dans la mesure du possible aux différents types de données passées en argument, par exemple il existe une même instruction + qui permet d'additionner des réels ou des entiers ou des chaines de caractères (concaténation). Il est toutefois important de comprendre que les opérations peuvent être très différentes selon le type des objets passé (et les modes). On peut utiliser tous les types d'objets en argument d'une fonction, à l'exception des objets de types programmes ou fonction sur les TI/Casio/HP en mode algébrique. Notez aussi qu'une instruction a toujours le même nombre d'arguments sur les HP, ou peut avoir un nombre variable d'arguments chez TI/Casio. Sur les HP, il existe en effet un mode de saisie, dit RPN (reverse polish notation), dans lequel on doit donner les arguments d'une instruction avant l'instruction, elle ne peut donc pas avoir un nombre variable d'arguments.

Exercices :

1. Testez les environnements de saisie s'ils existent pour entrer une équation, une matrice.
2. Simplifier les expressions suivantes :
$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} \quad \frac{1+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}, \quad e^{i\pi/6}, \quad 4\text{atan}(\frac{1}{5}) - \text{atan}(\frac{1}{239})$$
3. Factoriser :
$$x^8 - 3x^7 - 25x^6 + 99x^5 + 60x^4 - 756x^3 + 1328x^2 - 960x + 256$$
$$x^6 - 2x^3 + 1, \quad (-y+x)z^2 - xy^2 + x^2y$$
4. Calculez les intégrales et simplifiez le résultat :
$$\int \frac{1}{e^x - 1}\, dx, \quad \int \frac{1}{x\ln(x)} \ln(\ln(x))dx, \quad \int (2x^2+1)e^{x^2}\, dx, \quad \int x\sin(x)e^x\, dx$$
Vérifiez en dérivant les expressions obtenues.
5. Déterminer la valeur de :
$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^3}, \quad \int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\, dx$$
6. Calculer les sommes suivantes
$$\sum_{k=1}^{N} k, \ \sum_{k=1}^{N} k^2, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
7. Développer $\sin(3x)$, linéariser l'expression obtenue et vérifier qu'on retrouve l'expression initiale.
8. Calculer le développement de Taylor en $x = 0$ à l'ordre 4 de :
$$\ln(1+x+x^2), \quad \frac{\exp(\sin(x)) - 1}{x+x^2}, \quad \sqrt{1+e^x}, \quad \frac{\ln(1+x)}{\exp(x) - \sin(x)}$$
9. Créez une liste de taille 3, un vecteur de taille 3, une matrice 3,3 et testez l'accès à un élément d'une liste, d'un vecteur, d'une matrice. Effectuez le produit de la matrice par le vecteur. Convertissez la liste en vecteur et inversement.
10. Résoudre le système linéaire
$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ ax & + & y & + & z & = & 3 \end{array} \right.$$
en utilisant soit l'instruction `rref` sur la matrice augmentée, soit la formule $A^{-1}b$.
11. Créez un objet de chaque type en mode ligne de commande, stockez-le dans une variable, par exemple `1.1, 12, 1+2i, (0.5,2.3), 1/2, x, x*sin(x)-x, [1,2]`, une matrice aléatoire 2 par 2, la liste des objets précédents.
12. Vérifiez le type de la variable (avec `TYPE` ou `getType`).
13. Essayez de décomposer l'objet si on peut le faire (selon le type d'objet et le modèle de calculatrice).
14. Testez ce que font les opérations +, inverse, *, /, avec chaque type de variable.

5 Calcul formel

5.1 Fonction et expression

Une fonction est une correspondance qui à un objet associe un autre objet. Une expression n'est pas une correspondance, c'est un objet, par exemple le résultat de l'évaluation d'une fonction en un point . `DEFINE` ou `Define` permet de définir une fonction. Comme toutes les instructions de calcul formel travaillent sur des expressions, sauf l'évaluation en un point (et quelques instructions sur HP en mode RPN), si on a défini une fonction, il ne faut pas la passer seule en argument, mais il faut passer le résultat de son évaluation en un point.

Par exemple, si on définit `Define f(x)=x^2-1`, on écrira `factor(f(x))` et non `factor(f)`.

5.2 Variables : mode réel, complexe, hypothèses.

Le choix du mode réel ou complexe influe sur les opérations comme la factorisation ou ce qui en dépend (décomposition en éléments simples, calcul de primitives par exemple). On peut passer temporairement en mode complexe sur les TI/Casio par exemple avec les instructions `cFactor` ou `cSolve` (TI).

Les variables symboliques (non affectées) sont réelles en mode réel. En mode complexe, cela dépend :

- du nom de variable sur TI : s'il se termine par `_`, la variable sera considérée comme complexe, sinon elle sera réelle. Attention donc, si vous utilisez `cSolve` une variable nommée `z` est considérée comme réelle, et `conj(z)` sera simplifié en `z`, ainsi `cSolve(z+conj(z)*i=1,z)` renvoie un résultat faux, car `conj(z)` est remplacé par `z` **avant** l'exécution de `cSolve`. Il faut utiliser `cSolve(z_+conj(z_)*i=1,z_)` pour obtenir la réponse correcte.
- elles sont complexes chez Casio
- du drapeau variable réelle sur les HP (touche MODE puis FLAGS puis flèche vers le haut pour faire apparaitre le flag système 128), s'il est mis, toutes les variables sont réelles, sinon, les variables sont complexes sauf celles contenues dans la liste `REALASSUME` du répertoire `CASDIR`.

On peut faire une hypothèse globale sur une variable sur les HP du type `ASSUME(T>1)`. Cela ajoute alors `T` à la liste des variables réelles et permet de simplifier des expressions comme `ABS(T^2-1)`. Chez TI/Casio, on peut faire une hypothèse locale sur une variable, en évaluant une expression sous condition avec l'opérateur `|`, par exemple `abs(t-1)|t>1` (mais la classe d'expression simplifiable chez TI est assez restreinte).

5.3 Arithmétiques des entiers

On donne ici les instructions du système installé de base, il existe des programmes permettant d'étendre les fonctionnalités pour TI et Casio.

1. Division euclidienne : `IDIV2/IQUOT/IREMAINDER/MOD` (HP49), `intDiv/int/mod` (TI/Classpad)
2. PGCD : `GCD/LCM` (HP), `gcd/lcm` (TI/Casio)
3. Bezout : `IEGCD/IABCUV` (HP)
4. Liste des diviseurs : `DIVIS` (HP)
5. Factorisation : `FACTOR` (HP), `factor` (TI/Casio)
6. Restes chinois : `ICHINREM` (HP)
7. Indicatrice d'Euler : `EULER` (HP)
8. Primalité : `ISPRIME?/NEXTPRIME/PREVPRIME` (HP), `isPrime` (TI)

9. Puissance rapide modulaire : `POWMOD` (HP)

Attention, le test de primalité est en réalité un test de pseudo-primalité de Miller-Rabin sur les HP, si le test échoue on peut affirmer que l'entier est composite, mais si le test réussit, l'entier peut (avec une faible probabilité) ne pas être premier. Sur les TI, le test renvoie une erreur pour des nombres de taille supérieure à 10^{306} n'ayant pas de diviseurs inférieur à 1021. L'algorithme de factorisation commence par effectuer des divisions par les nombres premiers inférieurs à une certaine valeur (environ 1000 sur HP) puis éventuellement effectue une recherche par une méthode plus évoluée, par exemple Pollard, en utilisant le test de pseudo-primalité et un temps limite de recherche. Il n'y a pas de test de primalité chez Casio.

5.4 Opérations sur les flottants

– conversion en approché `->NUM`, `approx`
– conversion en rationnel `XQ`, `exact/toFrac`
– partie entière (par défaut ou excès) `FLOOR`, `CEIL` (HP), `floor`, `ceiling` (TI), `int` (Casio)
– arrondi à un nombre de digits donné en 2ème argument `ROUND` (HP) `round/fRound` (TI/Casio)

5.5 Opérations sur les complexes

– partie réelle `RE` (HP), `real/re` (TI/Casio)
– partie imaginaire `IM` (HP), `imag/im` (TI/Casio)
– conjugué `CONJ` (HP), `conj/conjg` (TI/Casio)
– norme `ABS` (HP), `abs` (TI/Casio)
– argument `ARG` (HP), `arg` (TI/Casio)

Sur les TI, on peut faire afficher un complexe en notation exponentielle ou cartésienne. Sur les Casio, on peut convertir un complexe sous forme cartésienne, exponentielle ou trigonométrique avec `cExpand`, `compToPol` et `comToTrig`

5.6 Arithmétiques des polynomes

Les TI/Casio proposent en base peu de fonctions pour les polynômes, mais on peut les obtenir en ajoutant des programmes.

– division euclidienne et écriture de fractions en isolant la partie entière `DIV2`, `PROPFRAC` (HP), `propFrac` (TI/Casio) et `PolyQuo`/`PolyRem` (TI Nspire v1.3)
– numérateur et dénominateur d'une fraction `FXND` (HP), `getNum/numerator`, `getDenom/denominator` (TI/Casio)
– PGCD et PPCM : `GCD`, `LCM` (HP), `gcd`, `lcm` (Casio). Sur les TI, on peut utiliser `p/getNum(p/q)` pour obtenir le pgcd de `p` et `q`. Sur la TI NSpire v. 1.3, on peut utiliser `PolyGcd`.
– identité de Bézout `EGCD`, `ABCUV` (HP). On peut le programmer assez facilement sur la TI NSpire avec `PolyQuo`/`PolyRem`.
– restes chinois `CHINREM` (HP)
– résultant `RESULTANT` (HP)
– factorisation `FACTOR` (HP), `factor` (TI/Casio)
  La factorisation se fait sur $\mathbb{Z}$ si les coefficients sont exacts, elle ne donne pas forcément un produit de polynômes irréductibles sur les TI.
  Sur les HP, cocher le flag `Num factorize` (MODE FLAGS, fléche haut, remonter jusqu'au flag 109) pour forcer une factorisation numérique. Sur les TI, ajouter le nom de la variable en 2ème argument. Sur les Casio, utiliser `rfactor`
  Passer en mode complexe pour factoriser sur $\mathbb{C}$.

- `PARTFRAC` (HP) ou `expand` (TI/Casio) : décomposition en éléments simples. Sur HP, passer en mode complexe pour obtenir la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
- évaluation d'un polynôme par la méthode de Horner, `HORNER` (HP), `polyeval` (TI/Casio)
- interpolation de Lagrange, `LAGRANGE`
- localisation des racines réelles d'un polynôme par les suites de Sturm. `STURM` et `STURMAB`

5.7 Réécriture d'expressions

- factoriser et développer `FACTOR, COLLECT, REORDER, EXPAND` (HP), `factor, expand` (TI/Casio), `rfactor/collect/combine` (Casio)
- développer ou linéariser une expression trigonométrique. `TEXPAND, TCOLLECT` (HP), `tExpand, tCollect` (TI/Casio)
- développer une exponentielle ou un logarithme : `TEXPAND` (HP) `expand` (TI/Casio). Sur TI/Casio, une vérification de la validité des arguments est effectuée. par exemple $\ln(xy)$ n'est pas dvéloppé si on n'ajoute pas une hypothèse $x > 0$ ou $y > 0$.
- linéariser des exponentielles ou rassembler des logarithmes `LIN` et `LNCOLLECT` (HP), `factor` (TI/Casio). Sur TI/Casio, les exponentielles sont automatiquements regroupées.
- `EXPLN` (HP) `trigtoexp` (Casio) permettent de convertir les fonctions trigonométriques en exponentielles complexes, inversement utiliser `SINCOS` (HP) et `exptotrig` (Casio).
- De nombreuses règles de réécriture sont disponibles sur HP, par exemple pour convertir en $\tan(t/2)$ (`HALFTAN`), cf. les menus `EXP&LN`, `TRIG`.

5.8 Calcul différentiel et intégral

- Limite : `LIMIT` (HP), `limit` (TI/Casio), on passe en argument une expression, puis `X=a` sur HP ou `X,a` sur TI/Casio.
  Pour obtenir une limite à droite indiquer `X=a-0` sur HP ou ajouter un 4ième argument -1 sur TI/Casio. À gauche, `X=a+0` ou 1 en 4ième argument.
- Taylor : `SERIES` (HP), `series` (TI Nspire) `taylor` (TI/Casio), on passe en argument une expression, puis `X=a,n` sur HP ou `X,n,a` sur TI/Casio où n est l'ordre.
  Sur HP et TI Nspire, on peut faire un développement asymptotique en $\pm\infty$ en donnant cette valeur à a, sur les TI89/92 il faut faire soi-même le changement de variable.
  Sur HP, on peut faire un développement à droite ou à gauche en passant pour l'ordre un réel négatif ou positif au lieu d'un entier, sur TI Nspire indiquer 1 ou -1 à `series` pour le coté. Le résultat renvoyé par `SERIES` sur les HP se compose de la limite, de l'équivalent, du développement et du reste.
  L'ordre est l'ordre qui sera renvoyé sur TI, par contre sur HP il peut être diminué s'il y a eu des simplifications numérateur/dénominateur.
  Attention sur TI89/92, le temps de calcul devient vite prohibitif si le dénominateur s'annule, l'algorithme utilisé calcule en effet les dérivées successives et leur limite au point a. On peut passer outre en calculant séparément les développements du numérateur et du dénominateur, puis on calcule le développement de la fraction simplifiée n/d. On peut se ramener au cas où $d \to 1$, on pose alors $c = 1 - d$ et on utilise :

$$\frac{n}{d} = \frac{n}{1-c} = n(1 + c + c^2 + ...)$$

– Dérivation : DERVX, DERIV (HP), d/diff (TI/Casio). Sur TI/Casio, on peut indiquer un ordre de dérivation. Sur HP, DERIV permet de calculer le gradient, HESSIAN le hessien, CURL le rotationnel, DIV la divergence, LAPLACIAN le laplacien.
– Recherche d'extremums : fMin et fmax sur TI/Casio, TABVAR (tableau de variations) sur HP.
– Primitive : INTVX, RISCH (HP), $\int$ (TI/Casio). Sur HP, POTENTIAL et VPOTENTIAL permettent de calculer le potentiel ou le potentiel vecteur d'un champ.
– Intégrale définie : en mode exact, le système recherche une primitive. En mode auto sur TI, si la recherche échoue, une méthode de quadrature est alors lancée. Pour obtenir une valeur approchée, utiliser ->NUM sur HP et nInt (TI) ou approx (TI/Casio).

5.9 Solveurs numériques et exacts

Les solveurs exacts permettent de

– résoudre des équations se ramenant à des équations polynomiales (par changement de variable et factorisation) (HP : SOLVE, attention au choix du mode réel/complexe et factorisation numérique, TI/Casio solve et TI cSolve).
– résoudre des systèmes d'équations linéaires (HP : LINSOLVE, TI : simult), et plus généralement des systèmes simples d'équations polynomiales par base de Groebner (fonctions SOLVE/solve/csolve ci-dessus, sur les HP on peut aussi afficher la base de Groebner par GBASIS, et réduire un polynôme par rapport à une base de Groebner d'un idéal par GREDUCE).
– certaines équations différentielles (par exemple linéaires du 1er ordre ou linéaires à coefficients constants par transformation de Laplace et inverse). Sur HP, utiliser DESOLVE, sur TI/Casio, deSolve/dSolve. Pour les équations linéaires à coefficients constants ou les systèmes linéaires à coefficients constants, utiliser LDEC sur HP (il faut installer une application sur TI pour les systèmes ou les équations de degré supérieur à 2).

Notez que la recherche numérique des racines d'un polynome peut se faire par PROOT sur HP. La recherche de solutions exactes se ramenant à la factorisation des polynomes de degré 3 ou plus ne renverra pas de solution exacte, mais des solutions numériques si on choisit Num factorize sur les HP (MODE FLAGS 109) ou si on met en argument de solve la variable sur les TI ou si on utilise rsolve sur Casio.

Les solveurs numériques permettent de

– trouver une solution d'équation non polynomiale dans un intervalle donné ou en partant d'une valeur initiale (initial guess). Fonction ROOT sur les HP, nSolve sur TI, solve avec un 3iìeme argument chez Casio. Sur les HP, on accède au menu solveur numérique en shiftant la touche 7. Sur les TI, apps, puis 7. Chez Casio, application Numsolve.
– trouver une solution de système d'équations non polynomiales (fonction MSLV sur HP, solve/csolve éventuellement forcé en mode approx sur TI)
– résoudre numériquement une équation différentielle (fonction RKF, RKFERR, RKFSTEP sur HP), on peut utiliser l'application de représentation graphique sur tous les modèles.

Exercices :

1. Trouver les racines complexes des équations suivantes

$$z^2 + (1+i)z - 3 - 2i = 0, \quad z + (2-3i)\overline{z} = 1 + 2i$$

2. Déterminer des nombres premiers de la forme $2^n + 1$.
3. Déterminer le nombre n d'entiers inférieur à 21 qui sont premiers avec 21, vérifier que si a est premier avec 21, alors $a^n \pmod{21} = 1$.
4. Donner la valeur de $5^k \pmod{k}$ avec $k = 10007$.
5. Simplifier $\sin(3x)/\sin(x)$
6. Vérifier que le polynôme $x^5 + x + 1$ n'a que des racines simples et déterminer son nombre de racines réelles. Faire son tableau de variations.
7. Trouver les racines exactes et approchées de $x^3 + x + 1 = 0$, $\exp(x) + x = 3$, $\sin(x)^2 - 2 = 0$.
8. Donner une primitive (à coefficients approchés) de $1/(x^4 - 3x^3 + 5x + 1)$
9. Calculer le développement de Taylor du numérateur et du dénominateur de

$$\frac{\ln(1+x)}{\exp(x) - \cos(x)}$$

à l'ordre 6 en $x = 0$, en déduire celui de la fraction à l'ordre 5.

10. Calculer le terme d'ordre n du développement de Taylor en $x = 0$ de

$$\frac{1}{(x^2 - 4x + 3)(x + 2)}$$

(on commencera par décomposer la fraction en éléments simples). Vérifiez pour les 5 premiers termes.

11. Calculer une valeur approchée de $\int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx$ en faisant le changement de variable $x = \tan(t)$.
12. Trouver l'intersection du cercle de centre l'origine, rayon 1 et de l'ellipse d'équation $x^2 + 2xy + 3y^2 + 3x - 3y = 3$.
    Résoudre le système $sin(x) + y = 2, x + cos(y) = 2$.
13. Résoudre l'équation différentielle $e^x y' = y + 1$, calculer la valeur en $x = 1$ de la solution passant par $(0, 1)$.
    Peut-on résoudre exactement l'équation

$$(E) \quad y' = \sqrt{\sin(y+x)^2 + 1 - \cos(x)}$$

à la calculatrice ? Calculer une valeur approchée en $x = 1.0$ de y vérifiant (E) et passant par $(0.0, 1.2)$.

14. Chercher les extremas locaux de la fonction $(x+y+1)(x-2y-3)(x-y-1)$.
15. Soit A, B, C trois points quelconques du plan. On construit les triangles équilatéraux directs de cotés AB, AC, BC et le triangle dont les sommets sont les centres de ces 3 triangles. Montrer en utilisant les nombres complexes que ce triangle est équilatéral : on supposera par exemple que A a pour affixe 0, B a pour affixe 1 et C a pour affixe $z = x + iy$, on calculera les coordonnées des trois centres en fonction de z.

6 Représentations graphiques

Les principaux types de courbes non statistiques sont :

- les graphes de fonction d'une variable (dans le plan) ou de 2 variables (3-d)
- les courbes paramétrées
- les courbes en polaire (sur la Nspire, installer la version 1.3)
- les solutions (numériques) d'équation différentielles du 1er ordre de la forme $y' = f(x, y)$ (sauf sur la NSpire)
- les courbes implicites (sauf sur la NSpire)
- les suites récurrentes (sauf sur la Nspire)

Pour représenter une courbe, la calculatrice va échantilloner la (ou les) fonction(s) définissant la courbe en fonction de paramètres de discrétisation, puis, en tenant compte des paramètres d'affichage, tracer les points correspondants et éventuellement les relier entre eux par de petits segments de droite (option Connect d'un des écrans de réglages). Pour les tracés de type fonction, il faut définir la plage de x, de y, pour les tracés autres que fonction, il faut aussi définir la plage du paramètre (ou les valeurs initiales et finales de la variable pour une équation différentielle). On indique le pas d'échantillonage, pour une fonction (en unités ou en pixels) ou le pas de résolution numérique pour une équation différentielle. Plus le pas d'échantillonage est petit, plus le tracé sera précis, mais plus il sera lent. Ce qui donne selon les modéles :

1. Choix du type de graphe
   sur HP, taper simultanément sur shift-gauche et F4 (2D/3D) puis choisir le type parmi (Function, Parametric, Polar, Conic, Diffeq, Slopefield, 3d). Les suites récurrentes se tracent à partir de l'application de géométrie.
   Sur TI, le réglage du type de tracé se fait dans MODE (Function, Parametric, Polar, Sequence, Fast3d, diff equations). On doit parfois compléter le type de tracé en utilisant le menu F1-9 de diamond-Y=. Par exemple pour les courbes de niveau et les courbes implicites, choisir le mode 3d puis Graph Formats contour levels ou implicit plot.
   Sur Classpad, on choisit dans Menu soit Graph soit 3-d soit Conic soit Suites. Pour Graph, on choisit le type dans le menu `Type`. Il n'y a pas de mode pour tracer les solutions d'équations différentielles.

2. Définition des fonctions à représenter :
   Sur HP, l'expression ou la liste des expressions à représenter est stockée dans la variable `EQ`. Vous pouvez aussi spécifier ces expressions en tapant sur shift-gauche F1 (Y=). Pour les fonctions, l'expression à entrer est $(y\ =)f(x)$ ou $(z =)f(x, y)$ (3-d), pour les courbes paramétriques, l'expression est donnée par le nombre complexe $x(t)+i*y(t)$, attention à changer le nom de la variable indépendante (en t ici), pour les courbes en polaires, on donne $\rho(x)$ où x est l'angle, pour les courbes implicites $f(x, y) = 0$, pour les équations différentielles, on donne $f(x, y)$ où l'équation différentielle est $y' = f(x, y)$. Pour tracer plusieurs courbes dépendant d'un paramétre, on peut utiliser la commande `SUBST`, par exemple `SUBST(A*SIN(X),A={1,2}) STO> EQ`
   Chez TI, on entre les expressions définissant les courbes en tapant diamond `Y=`. Ces expressions ne sont pas toujours évaluées (par exemple on ne peut pas mettre un nom de variable contenant une expression dépendant de x). Pour les graphes on définit ainsi $y1$, ..., pour les fonctions, $xt1, yt1$, ... pour les courbes paramétriques, etc. Pour tracer plusieurs courbes ayant la même équation dépendant d'un paramètre, il suffit d'affecter à ce paramètre la liste des valeurs souhaitées, par exemple `{1,2,3} STO> a` puis `y1=sin(a*x)`
   Sur Classpad, on entre $y1$, ..., pour les fonctions, $xt1, yt1$, ... pour les courbes paramétriques, etc.

3. Réglage des paramètres
   Sur HP, les paramètres H-Tick et V-Tick indiquent le décalage entre 2 marques

successives sur les axes, en pixels ou en unités (selon que Pixels est coché ou non). Shift-WIN permet de régler les paramètres d'affichage (pour les fonctions, vous pouvez laisser AUTOscale calculer W-Win s'il n'y a pas de pole de la fonction dans l'intervalle). Attention, pour les tracés de type Equation différentielle, il manque le nom de la variable dépendante, par défaut `Y`, on peut le définir dans le type champ des tangentes (Slopefield).
Sur TI, diamond WINDOW permet de définir la fenêtre d'affichage par exemple les valeurs de `xmin/xmax`, `xres`, `xscl/yscl` pour les fonctions. Les paramètres `xscl` et `yscl` définissent le tick sur les axes, alors que `xres` définit en pixels le pas entre 2 évaluations. Le menu Style de `Y=` permet de définir comment le tracé est effectué (points connectés, points non connectés, point mobile avec ou sans trace, animation).
Sur Classpad, choisir le menu avant Edit, puis Réglages, paramétrage, format graphique (ou 3-d).

4. Tracé :
Sur HP, on efface éventuellement le graphe précédent (F5) et on trace en appuyant sur F6.
Sur TI on les trace avec diamond `GRAPH`.
Sur Casio, cliquer sur le bouton de graphe.
5. Opérations post-tracé (zoom, pente de tangente, recherche de racine, etc.)
Les menus permettent de changer les paramètres d'affichage (zoom), mais attention cette opération prend du temps, car la machine recalcule le graphe.
Pour les fonctions, on peut selon les modèles utiliser les menus pour trouver une racine numérique de $f(x) = 0$, afficher la tangente au graphe, calculer l'aire sous la courbe entre deux points,...

Parallèlement à l'étude graphique, on peut bien sur utiliser l'historique (ou application Main) pour faire une étude formelle de la fonction à tracer. Il est alors judicieux de donner un nom à la fonction ou à l'expression étudiée (par l'intermédiaire de define ou de STO) ou d'utiliser le nom de la fonction tel que défini dans `Y=`.

Remarque : on peut aussi lancer un tracé de fonction depuis Main, avec une commande `Draw...` sur TI/Casio, la commande `PLOTADD` (ou les commandes de type de tracé `FUNCTION`, `PARAMETRIC`, ... et l'affectation de `EQ`) sur HP ou avec un glisser-déplacer sur Casio.

Exercices :

– Représenter la fonction $f(x) = (x^3 + x + 1)/(x^2 - x - 1)$ pour $x \in [-2, 0]$ puis $x \in [-3, 3]$ puis $x \in [-10, 10]$. Trouver numériquement une solution de $f(x) = 0$. En utilisant l'application main, faites une étude de la fonction (tableau de variations, asymptotes, signe) et vérifiez sur le graphe.
– Tracer sur le même graphique les fonctions $\sin(x)$ et son développement de Taylor à l'ordre 1, 3 et 5. Graphiquement, pour quelles plages de valeurs de x les développements sont-ils de bonnes approximations de $\sin(x)$?
– Tracer en paramétriques la courbe d'équations

$$x(t) = 3\sin(3t), \quad y(t) = 2\sin(4t)$$

Pour les matheux, faites aussi l'étude des auto-croisements de la courbe.
– Tracer en polaire la courbe $\rho = 2\cos(4\theta)$. Quelques autres courbes si vous avez le temps :
lemniscate de Bernouilli :$\rho = \sqrt{\cos(2t)}$
limacon de Pascal :$\rho = a\cos(t) + b$, si $a = b$, cardioide
ellipse (demi-grand axe a, excentricité e) : $\rho = a(1 - e^2)/(1 + e\cos(t))$.
– On considère l'équation différentielle logistique (utilisée pour modéliser la croissance d'une population dans un milieu aux ressources naturelles finies) :

$$y' = y(1 - y), \quad y(t = 0) = 0.01$$

Tracer la courbe représentative de cette solution (sans résoudre l'équation différentielle !). Comparez ensuite avec le tracé de la solution exacte (obtenue avec desolve).

– Tracer tout d'abord le champ des tangentes de l'équation différentielles

$$y' = \sin(xy)$$

puis superposer quelques solutions de l'équation (sans effacer le champ des tangentes, sur TI on peut utiliser une liste comme valeur initiale pour tracer plusieurs solutions).

– Représenter $f(x, y) = (x + y - 1)(x - 2y)(x - y)$.

7 Unités et constantes physiques

Les TI et HP peuvent manipuler des valeurs numériques ayant des dimensions physiques (par exemple longueur, poids, pression, énergie, ...). On peut effectuer des opérations arithmétiques simples sur ces quantités, multiplication, division et puissance entière, ainsi que addition ou soustraction lorsque deux quantités ont la même dimension physique. On peut aussi convertir une quantité exprimée en fonction de certaines unités en la même quantité exprimée avec des unités compatibles, par exemple pour convertir une distance de miles en km, mais aussi un angle de radian en degré ou une durée d'heures en secondes. Les mathématiques sous-jacentes sont la règle de trois.

Le système MKSA des unités physiques comporte 7 unités de base, toutes les unités se ramènent à un produit par une constante numérique de puissances entières de ces 7 unités de base : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère (intensité électrique), le Kelvin (température), la mole (quantité de matière) et le candela (luminescence). Les unités du système international (S.I.) sont les unités composée de ces 7 unités de base avec comme constante numérique 1, par exemple le Pascal pour `1_kg/m/`s^2. Lorsque la constante numérique est une puissance de 10, on utilise un préfixe (par exemple m pour 10^{-3}, k pour 10^3, etc.). Il existe de nombreuses unités en-dehors de celles du S.I., en particulier dans les pays anglo-saxons, mais aussi pour des raisons de commodité (par exemple `kph` pour les vitesses, le litre, l'électron-Volt unité d'énergie, etc.).

Sur les TI et HP, les valeurs numériques avec dimension sont composées de la valeur numérique, du signe _, et d'une unité physique ou d'un produit ou quotient d'unités physiques, par exemple `12.3_km/s`. Attention, sur TI, vous devrez écrire `12.3_km/_s`. Attention, toujours sur TI, la partie `_...` est considérée comme un nom de variable (spécial), donc il faut mettre des parenthèses dans `12_km/(2_s)` ou écrire `12_km/2/_s`.

Sur les HP49, on accède aux unités prédéfinies par le menu `UNITS` (shift- droit-6). Le sous-menu `TOOLS` permet principalement de convertir (`CONVERT`) entre deux unités de même dimension (par exemple entre des km/h et des m/s), ou d'écrire en terme de produit d'unités de base (`UBASE`) ou de "factoriser" (`UFACT`) une unité. Les autres menus répertorient des unités usuelles par dimension. L'interface des unités en mode RPN est mieux adaptée aux conversions d'unités grâce à des raccourcis claviers. Taper `MODE`, puis `+/-` pour changer en mode RPN, puis `F1 FLAGS`, flèche vers le haut 3 fois, cocher le flag système 117 pour faire apparaitre Soft menu, puis OK 2 fois. Taper `UNITS` (shift droit-6) puis par exemple Lengths. Pour entrer une unité il suffit de taper la valeur numérique puis la touche du bandeau de l'unité (par exemple `F4` pour un yard, yd). Pour convertir en une autre unité, taper sur shift-gauche et la touche du bandeau de l'unité, par exemple shift-gauche `F1` pour convertir en mètres. Pour revenir en mode algébrique, taper `MODE` puis `+/-` puis `OK`.

Sur les TI, on peut choisir dans `MODE` le système international d'unités ou un système anglo-saxon, ce sont ces unités qui seront utilisées dans un résultat (sur HP, l'unité renvoyée utilise l'unité d'un des arguments) sauf conversion explicite avec la touche de conversion (touche shift-Y sur V200), . La liste des unités est accessible depuis le menu diamond-`UNITS`. On peut aussi définir une liste d'unités particulière dans ce menu si on veut utiliser par défaut des unités différentes du système international ou anglo-saxon.

Les constantes physiques (par exemple accélération de la gravité sur Terre, constante gravitationnelle, constante de Rydberg, de Planck, masse de l'électron, du proton etc.) sont également mémorisées dans les TI et HP. Sur HP, taper `APPS` puis la commande `Constants libs` pour faire apparaitre la liste des constantes mémorisées, sur TI, diamond-`UNITS` et cherchez la constante dans le premier menu. Sur HP, vous pouvez aussi saisir directement la commande `CONST()` avec en argument le symbole de la constante, par exemple `CONST(c)` renvoie la vitesse de la lumière, sur TI, vous pouvez saisir le nom de la constante préfixé par _, par exemple `_c`.

Exercices :

- Quelle est la taille en cm d'une disquette de 3 pouces 1/2 ?
- Combien de pintes dans un litre ?
- Aux Etats-Unis, on mesure la consommation d'une voiture en nombres de miles parcourus par gallon d'essence. Par exemple, certaines voitures de type SUV ont un mileage de 20 mpg. En France, on compte plutot en litres aux 100 km. Calculer la valeur correspondante.
- Pour prendre une douche de 40 litres d'eau, on suppose qu'il faut réchauffer en moyenne ces 40 litres de 10 à 40 degré Celsius. Par définition, la kilocalorie (kcal) est l'énergie nécessaire pour réchauffer un litre d'eau de 1 degré. Combien de kWh consomme-t-on par an si on prend une douche tous les jours ?
- Quelle est le temps nécessaire à la lumière pour parcourir la distance Terre-Soleil (cette distance est la définition de l'unité astronomique `au`) ?
- En supposant que la Terre se comporte comme un corps noir, elle émet un rayonnement dont la puissance P est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann

  $$P = \sigma T^4$$

  où T est la température absolue (moyenne), retirer la température standard pour avoir la température en Celsius. Ce rayonnement doit être en équilibre avec la puissance reçue du Soleil soit 1360/4_W/m^2. En déduire T. (En réalité la surface de la Terre n'est pas un corps noir, elle émet plus de rayonnement, mais une partie est renvoyée vers le sol par effet de serre).

8 Calculs financiers

L'application Time Value of Money permet principalement de calculer des mensualités de remboursement pour un emprunt à taux t et remboursement r fixes. Les mathématiques sous-jacentes sont les suites géométriques. Si u_k est la valeur empruntée l'année k, la valeur de u_{k+1} s'obtient en enlevant le remboursement r et en ajoutant les intérêts sur u_k

$$u_{k+1} = u_k(1+t) - r$$

Il s'agit alors de trouver l'une des valeurs n, r, t ou u_0 pour que $u_n = 0$. Pour cela on calcule u_k, en cherchant C pour que $v_k = u_k - C$ soit une suite géométrique de raison $1 + t$:

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= u_{k+1} - C \\ &= u_k(1+t) - r - C \\ &= (v_k + C)(1+t) - r - C \\ &= (1+t)v_k + tC - r \end{aligned}$$

Donc $C = r/t$, et $v_n = (1+t)^n v_0$ d'où :

$$u_n - C = v_n = (1+t)^n v_0 = (1+t)^n (u_0 - C)$$

finalement, si $u_n = 0$:

$$(1+t)^n = \frac{-C}{u_0 - C} = \frac{r}{r - u_0 t}$$

Sur HP, taper shift gauche-FINANCE. Sur TI, choisir l'application FINANCES. Il n'y a pas d'équivalents chez Casio.

Exercices :
– Il s'agit d'emprunter 150 000 euros au taux fixe de 4% par an. Combien de temps faut-il pour rembourser cette somme à raison de 1000 euros par mois ?
– Mêmes données, quelle mensualité faut-il payer pour rembouser en 15 ans ?
– Combien coute un ordinateur payé pendant 3 ans 1 euro par jour en supposant une inflation annuelle à 2.5% ?

9 Statistiques descriptives

Les calculs statistiques se font sur des tableaux de nombres. Sur TI, vous pouvez utiliser l'éditeur de données (APPS 6) en mode data. pour entrer les données, ou directement avec `STO>` depuis l'historique. Attention, il ne semble pas possible de transposer des données de type data, donc si vous devez travailler à la fois en lignes et en colonnes sur vos données, utilisez l'éditeur de données en mode matrice, sauvegardez-la, puis utilisez les commandes de statistiques de l'historique.

Sur Casio, utiliser l'application de Statistiques.

Sur HP, les calculs statistiques utilisent une variable réservée Σ`DAT` qui est la matrice statistique. On peut utiliser l'éditeur de matrice pour entrer les données, l'appui sur shift 5 (STATS) stocke la matrice dans la variable Σ`DAT` et ouvre le menu de statistiques. On peut aussi entrer une matrice directement depuis l'historique avec `STO>`.

Pour transposer une matrice, utiliser `TRAN` sur HP et ^{t} sur TI. Sur Casio, on peut utiliser `trn` (transconjuguée) (les données sont réelles !).

9.1 Statistiques à une variable.

Il s'agit principalement du calcul de la moyenne, variance, écart-type et des quartiles (médiane, etc.). Attention à la définition de la variance et de l'écart-type qui diffère selon qu'on s'intéresse à la population entière ou à un échantillon, en effet pour obtenir un estimateur sans biais de la variance à partir d'un échantillon, il faut diviser la somme des carrés par $n-1$ (où n désigne l'effectif) et non par n (cas de la population entière).

Moyenne, variance, écart-type

Sur TI, depuis l'éditeur de données (APPS 6), choisissez F5 One Var. Indiquez la colonne (par exemple `c1`), et si vous avez des données avec des fréquences précisez-le.
Sur Casio, menu Calc, puis Une variable
Sur HP, taper sur STATS (shift droit-5). Cochez ensuite les fonctions que vous voulez calculer et le type de statistiques (population entière ou échantillon, ce qui change la formule de la variance). Pour calculer facilement des statistiques de données avec fréquences, il faut installer une librairie de statistiques comme Stat49Pro (disponible sur `www.hpcalc.org`), ensuite dans shift-STATS, sélectionner Data Manager, Add new, puis 1w/freq, entrer les 2 colonnes, puis relancer shift-STATS, Data Manager, Describe Data.

Les calculs statistiques peuvent aussi être effectués en ligne de commande depuis l'historique, avec les commandes `mean/MEAN`, `stddev/SDEV,PSDEV` (sur HP `PSDEV` désigne l'écart-type d'une population), `variance/VAR,PVAR`. Ces commandes agissent sur Σ`DAT` sur HP, ou sur leur argument pour les TI.

Quartiles

Sur TI/Casio, les statistiques affichées par l'application de statistiques contiennent les quartiles. La fonction `median` permet de calculer la médiane.
Sur HP, il n'y a pas de fonction préprogrammée pour calculer les quantiles. On pourra utiliser

```
AXL(TRAN(∑DAT)) STO> L
```

pour convertir en liste la matrice statistique, puis

```
SORT(L[1]) STO> L1
```

pour trier par ordre croissant la première ligne de `L` (donc la première colonne de la matrice statistiques), on obtient alors la médiane en tapant :

```
L1[SIZE(L1)/2]
```

Représentation graphique des données : F1 plot setup de l'appli Data Editor (ou F2 de Stats/List) sur TI et shift-2d/3d sur HP ou menu DefnGraph sur Casio, choisir :

– boite a moustache (TI et Casio, c'est le type box plot sur TI),
– histogramme. Ne pas oublier de régler la taille des classes (par défaut 1/13ème sur HP). Attention sur HP, la plage des valeurs prises en compte dans l'histogramme dépend de la fenêtre graphique sauf si la variable indépendante est une liste constituée de 3 éléments (la variable indépendante est le 3ème élément de la liste stockée dans la variable `PPAR`) : celle-ci peut-être modifiée par inadvertance dans un autre mode (par exemple en mode `Diffeq`).

Sur TI, il peut être nécessaire de désactiver les graphes de fonction lorsqu'on trace un graphe statistique (décocher les fonctions dans l'ecran Y= ou utiliser FnOff).

Exemples :

– concentration en CO2 relevée à Mauna Loa (Hawai) de 1990 à 2004 (source www.cmdl.noaa.gov/ccgg/trends/, cdiac.esd.ornl.gov/ftp/trends/co2/maunaloa.co2)

An	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
1990	353.66	354.70	355.39	356.20	357.16	356.22	354.82	352.91	350.96	351.18	352.83	354.21
1995	359.96	361.00	361.64	363.45	363.79	363.26	361.90	359.46	358.06	357.75	359.56	360.70
2000	369.14	369.46	370.52	371.66	371.82	371.70	370.12	368.12	366.62	366.73	368.29	369.53
2005	378.43	379.70	380.92	382.18	382.45	382.14	380.60	378.64	376.73	376.84	378.29	380.06

Calculez les moyennes par mois (qui devraient faire apparaitre la croissance de la végétation, puis les moyennes et écart-types par années (augmentation de la concentration en CO2).

– Températures en septembre 2006 à Eybens (source www.meteoisere.com)

Date	Mini	Maxi
1	9,5	29,4
2	11,9	26,0
3	16,1	31,3
4	16,4	32,1
5	21,5	33,0
6	18,3	31,5
7	19,3	29,6
8	19,1	22,9
9	15,5	31,1
10	16,1	31,0
11	17,8	30,1
12	14,0	31,0
13	14,0	30,0
14	18,5	26,9
15	17,3	20,8
16	16,2	25,7
17	16,6	19,0
18	15,6	24,6
19	14,5	25,0
20	15,0	27,3
21	12,5	30,5
22	12,7	24,2
23	15,5	27,5
24	17,5	22,0
25	13,5	16,2
26	13,8	18,5
27	15,0	22,5
28	10,0	24,5
29	11,5	25,6
30	13,3	26,0

Calculer moyennes, écart-types, représenter les maximales par une boite à moustache ou/et un histogramme.

9.2 Statistiques à 2 variables

On étudie conjointement deux séries statistiques, par exemple pour faire apparaitre des corrélations entre elles, tracer une droite de régression, etc.

On utilise cette fois 2 colonnes de la matrice de données ou 2 listes. On peut effectuer le calcul de la corrélation, de la covariance, des régressions de divers types (linéaires, polynomiales, exponentielles, logarithmiques, ...) et des représentations graphiques des données (scatterplot pour nuages de points, et xyLine sur TI pour ligne polygonale, tracé de la droite de régression).

Les commandes correspondantes utilisables dans l'historique sont `TwoVar` (calculs statistiques 2 variables sur TI), `ShowStat` (affichage des résultats statistiques sur TI), `LinReg/LinearReg/LINFIT`, `QuadReg`, `QuartReg`, `LnReg/LogReg/LOGFIT`, `ExpReg/EXPFIT`, `PowReg/PowerReg/PWRFIT`, `BESTFIT` (sélection du meilleur modéle de régression sur HP), `Logistic`, ...

Exercice :
Production de pétrole en milliers de barils par jour pour la Mer du Nord entre 1999 et 2005 (source `http://www.eia.doe.gov/emeu/ipsr/supply.html`)

1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
5947	5799	5718	5657	5329	5229	4740	4343

Calculer la droite de régression linéaire de la production en fonction de l'année et estimer la production en 2010. Comparer avec d'autres modèles de régression.

9.3 Autres fonctions de proba/stats/dénombrement.

- `rand/RAND` nombre aléatoire distribué selon la loi uniforme.
- `randNorm` (TI) nombre aléatoire distribué selon la loi normale,
- `nCr/COMB` nombre de combinaisons,
- `nPr/PERM` nombre de permutations

Exercice : simuler trente lancers de dés, faire la moyenne. Vérifier avec d'autres étudiants que la moyenne des lancers suit une loi proche de la loi normale, de moyenne $\mu = 3.5$ et d'écart-type celui de la loi uniforme sur {1,...,6} divisé par $\sqrt{30}$, donc de densité

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^2}, \quad \mu = 7/2, \sigma = \sqrt{14}/12$$

On pourra représenter simultanément la densité de probabilité et l'histogramme des moyennes.

10 Statistiques inférentielles

L'exploitation de données peut prendre plusieurs formes :

1. L'inférence statistique ou "théorie de l'estimation" : connaissant un échantillon, on désire émettre une estimation sur la population totale. Dans ce cas, on n'a pas d'idée a priori sur le paramètre à estimer : on construira **un intervalle de confiance** I_α **au seuil** α. Cet intervalle I_α dépend de l'échantillon et contient, en général, la valeur du paramètre sauf dans $\alpha\%$ des cas c'est à dire, il y a seulement $\alpha\%$ des échantillons qui ont un I_α qui ne contient pas le paramètre (on dit qu'on a un risque d'erreur égal à α).
2. Le test d'hypothèses permet de savoir si il y a accord entre théorie et expérience. Dans ce cas on a une idée a priori sur la valeur que doit avoir le paramètre : on construit le test d'hypothèses (deux hypothèses H_0 et H_1 seront en concurrence), puis on prélève un échantillon et on regarde si cet échantillon vérifie le test ce qui permet d'accepter ou de refuser l'hypothèse privilégiée H_0.
   Par exemple : on veut contrôler qu'une fabrication correspond bien à ce qui a été décidé, pour cela on fabrique un test d'hypothèses, puis on teste l'hypothèse H_0 sur un échantillon de la production.
3. Le test d'homogénéite permet de comparer une distribution expérimentale à une distribution théorique. Dans les deux cas précédents, on a seulement comparé ou estimé des valeurs caractéristiques comme fréquences ou moyennes, Ici on compare deux distributions.

Pour des échantillons assez grands, le théorème qui permet de faire ces estimations est le plus souvent la loi des grands nombres (théorème de la limite centrale). Ainsi, si on calcule la moyenne X d'un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi (de moyenne μ et d'écart-type σ), la loi de $\overline{X}$ tend lorsque n tend vers l'infini vers une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma/\sqrt{n}$. Si n n'est pas assez grand (typiquement $n \leq 30$), on peut encore faire des statistiques inférentielles sur la moyenne si on sait par ailleurs que la loi commune des variables aléatoires de la population est une loi normale.

Sur les HP/Casio, les fonctions sont accessibles depuis l'historique ou pour certaines avec une interface utilisateur. Sur les TI Voyage 200, l'application APPS->Flash Apps->Stats/List Editor permet de faire des statistiques inférentielles. Sur les TI89, il faut télécharger depuis le site de TI puis installer cette application Flash (qui est gratuite).

10.1 Estimation d'une moyenne

Supposons par exemple qu'on veuille calculer la moyenne de la population au vu d'un grand échantillon et qu'on cherche par exemple un intervalle de confiance centré à 5% sur la moyenne μ de la population. On connait la moyenne m de l'échantillon qui est la valeur d'une variable aléatoire X qu'on suppose suivre une loi normale de moyenne μ et écart-type σ (c'est asymptotiquement le cas lorsque n tend vers l'infini). Si on ne connait pas σ, lorsque l'échantillon est assez grand, on peut estimer σ à partir de l'écart-type de l'échantillon (qui est l'écart-type de la population multiplié par $\sqrt{n/(n-1)}$, fonction `SDEV` sur la 49). On cherche ensuite la distance C telle que la probabilité que $|m-\mu| > C\sigma$ soit de 5%. Comme la loi de X est la loi normale, cela revient à calculer pour quelle valeur de C on a l'équation

$$(\int_{-\infty}^{-C} + \int_{C}^{+\infty})e^{-\frac{t^2}{2}} = 0.05 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

calcul lié à celui de la fonction `UTPN` de la HP ou `Normal Cdf` de la TI (menu F5) ou `NormCD` sur Casio

$$\begin{aligned} UTPN(m,v,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_x^{\infty} \exp(-\frac{(t-m)^2}{2v})\, dt \\ NormalCdf(m,v,x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_x^{y} \exp(-\frac{(t-m)^2}{2v})\, dt \end{aligned}$$

Si l'échantillon est trop petit (typiquement $n < 30$) et si la loi suivie est normale, on utilise une autre statistique car l'estimation de l'écart-type de la population par $\sigma\sqrt{n/(n-1)}$ n'est plus valide. On montre que la variable aléatoire

$$T = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2}}$$

suit la loi de Student $S(n-1,x)$ à $n-1$ degrés de liberté :

$$S(n,x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \quad \text{où } \Gamma(x) = (x-1)!$$

N.B. : l'abréviation de cette loi est t ou T et non S (par exemple `UTPT` sur HP et `Normal t Cdf` sur TI).

Sur les HP49, il y a une interface pour calculer des intervalles de confiance et faire des tests d'hypothèses sur la moyenne d'une population ou de l'égalité de moyenne de 2 populations pour des échantillons grands, on utilise Z si l'écart-type est connu, et T s'il est estimé. Tapez sur shift droit-STATS puis 6 ou 5, puis choisissez le type de test/distribution. Tapez sur HELP pour plus de détails sur le test effectué.

Sur TI, lancez l'application APPS->Flash Apps->Stats/List Editor. Les distributions statistiques et leurs inverses sont dans F5, les tests en F6. La notation Pdf signifie densité de probabilité (probability density function), la notation Cdf, densité cumulée (c'est l'intégrale de de la densité de la borne inférieure à l'argument).

Loi	HP	TI	arguments
Chi 2	`UTPC`	`Chi-square Cdf`	degrés de liberté
Snedecor	`UTPF`	`F Cdf`	degrés de liberté numérateur et dénominateur
Normale	`UTPN`	`Normal Cdf`	moyenne et variance
Student	`UTPT`	`t Cdf`	degrés de liberté

Les équivalents Casio sont `ChiCD`, `FCD`, `NormCD`, `TCD` qu'il faut faire suivre de la commande `DispStats`. Attention à la normalisation entre HP et TI, on a par exemple `UTPC(...,x)+Chisquare Cdf(...,-inf,x)= 1`.

Sur TI, les fonctions inverses sont fournies, sur Casio, l'inverse est fourni pour la loi normale (`InvNorm`), on peut aussi utiliser les fonctions de tests (`OneSampleZTest`, ...), sur HP il faut utiliser `ROOT` (ne pas oublier de purger `X` après usage).

Par exemple pour faire des statistiques sur de petits échantillons suivant la loi normale, on utilisera la fonction `UTPT` ou `t Cdf`, dont le permier argument est le nombre de degré de liberté et le deuxième x, par exemple pour résoudre `UTPT`$(n-1,x)$=0.025 pour $n=8$ on tape :

HP : `ROOT('UTPT(7,X)-0.025',X,0.0)` (ne pas oublier `'`)
TI : `F5 2 Inverse t Cdf` puis `0.975` puis `7`

en faisant de même en 0.975 (HP) ou 0.025 (TI) on obtient les opposés qui donnent un intervalle de confiance centré à 5%.

Exercice :
On a effectué 10 pesées indépendantes sur une balance d'une même masse μ et on a obtenu :
`10.008,10.012,9.990,9.998,9.995,10.001,9.996,9.989,10.000,10.015`
On suppose que la pesée est une variable aléatoire suivant la loi normale. On cherche à déterminer la masse μ au vu de l'échantillon. Tester l'hypothèse H_0 : $\mu=10$ et H_1 : $\mu>10$ au seuil de 5%. Même question pour H_1 : $\mu\neq 10$. Calculer un intervalle de confiance pour μ à 5%.

10.2 Estimation d'un écart type

Lorsque la population suit une loi normale, on peut aussi estimer l'écart-type à partir d'un échantillon et en calculer un intervalle de confiance, en utilisant la distribution du χ^2. On pose

$$Z^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2$$

On peut montrer que nZ^2/σ^2 suit une loi du χ^2 ayant n degrés de liberté.

Sur les HP49, les calculs se font en s'aidant de la fonction `UTPC`, qui donne la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi du χ^2 à n degrés de liberté soit plus grande que le 2ème argument de `UTPC`. Sur les TI, on utilise la fonction `Chi-square Cdf`. Sur les Casio `CDF`.

Exercice :
On reprend les mêmes données que ci-dessus, mais on suppose que $\mu=10$ est connu et on veut calculer un intervalle de confiance à 5% près sur la précision de la balance. Calculer la valeur z^2 ($n=10$) de Z^2 pour l'échantillon (on trouve environ 0.00007). Pour σ donné, on calcule $a=nz^2/\sigma^2$ et on regarde la probabilité que nZ^2/σ^2 (qui suit la loi du χ^2 à n degrés de liberté) soit plus grand que a, en calculant `UTPC`$(10,a)$ (`1-Chi-square Cdf` sur TI). On dira qu'on a un intervalle de confiance à 5% sur σ si `UTPC`$(10,a)$ (ou `Chi-square Cdf`) du a correspondant est compris entre 0.975 et 0.025 (les valeurs sont inversées sur TI). On cherche donc les valeurs de σ qui correspondent à un `UTPC` de 0.975 et 0.025. On calcule a_1 et a_2 avec `ROOT` sur HP. Sur les TI, on peut directement utiliser les distributions inverses (F5->2.Inverse). On en déduit les valeurs σ_1 et σ_2 de l'intervalle de confiance à 5% de σ.

11 Tableur

L'application CellSheet est installée sur les TI Voyage 200 et les TI 89 Titanium, c'est une application flash gratuite sur TI89. Elle est installée sur les Classpad 300 récentes et sur les HP49 munies de la ROM à télécharger à l'adresse :
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/#hpgeo`

Pour lancer le tableur, sur TI lancer APPS -> Flash Apps -> Cellsheet. Sur HP, APPS -> Spreadsheet.

Notez que sur une calculatrice, l'exécution d'un tableur non trivial est très lente. Sur les TI, il est recalculé automatiquement par défaut, mais on peut changer ce mode (`F1` puis Format). Sur les HP, le tableur n'est pas recalculé automatiquement au lancement, il faut taper la touche de l'éditeur de matrice (shift `MTRW`) ou sur la touche-menu `EVAL` du bandeau pour l'évaluer.

La syntaxe est proche de celle des tableurs usuels sur micro-ordinateur. La principale différence (outre l'interface) est que ces tableurs sont formels, ils peuvent manipuler des valeurs non numériques (par exemple des fractions).

- Nom de cellule.
  Un tableur est une matrice dont on numérote les lignes par des nombre et les colonnes par une ou plusieurs lettres. Le nom d'une cellule est composé d'abord de la (des) lettre(s) (donc du numéro de colonne) puis du nombre. Par exemple ligne 2, colonne 3 se note C2.
- Valeur et formule de calcul.
  La valeur d'une cellule peut être une constante ou être calculée par une formule pouvant faire intervenir les autres cellules, qui sont alors désignées par une référence (cf. ci-dessous). Lorsqu'on modifie une cellule, on entre soit sa valeur constante, soit une formule de calcul. Pour désigner une formule sur les tableurs sur PC, on la fait précéder du signe `=`, vous pouvez indiquer ce signe sur TI, mais sur HP, il ne faut pas mettre de signe `=` (on doit parfois quoter la formule en l'encadrant par deux `'`).
- Référence relative et absolue.
  Lorsqu'on désigne une cellule depuis une formule, on peut la désigner relativement à la cellule dont on définit la formule de calcul, ou de manière absolue. Cela affecte les copies de la formule dans d'autres cellules, les références absolues copiées correspondront au même numéro de ligne/colonne, alors que les références relatives correspondent au même décalage de lignes/colonnes. Une référence absolue se note en précédant la (les) lettres ou/et le nombre de la cellule par le signe $.
- (HP) Pour copier/coller des cellules, il faut les sélectionner avec les touches BEGIN/END du clavier (BEGIN lorsque le curseur est positionné en début de zone, END en fin de zone), puis taper la touche COPY puis déplacer le curseur vers la destination et taper la touche PASTE. Attention, le tableur doit avoir été évalué pour que la copie adapte les noms de cellules.
- Plage de cellules.
  Cela permet de faire référence à un ensemble rectangulaire de cellules, par exemple pour en calculer la moyenne... On indique les noms de cellule du bord du rectangle séparés par `:` (TI) ou `.` (HP).
  Vous pouvez utiliser les menus pour calculer la somme, la moyenne, l'écart-type, etc. d'une plage. Sur les TI, utiliser le menu F6, sur les HP, utiliser le menu du bandeau ou directement la fonction `SIGMA` dont le premier argument est une plage de cellules et le deuxième argument soit un entier (0 pour la somme, 1 pour la moyenne, 2 pour la variance), soit un test (par exemple `X==2` pour compter le nombre de 2 d'une plage). Attention sur HP, il faut saisir la formule en mode exact et veiller à bien encadrer la formule par des signes `'` lorsqu'on édite une formule contenant `SIGMA` y compris en mode algébrique.

– Sur les TI, vous pouvez définir un graphe statistiques dans le tableur (F2 Plot), on indique le type de graphe et la plage de cellules concernée (syntaxe ci-dessus). Il peut être nécessaire de désactiver les graphes de fonctions (décocher les fonctions dans l'ecran Y= ou utiliser FnOff).
  Sur les HP, vous pouvez exporter l'ensemble de la matrice des données (shift gauche-5) vers l'application de tracé graphique, le type de tracé est par défaut Histogram, on peut le changer avec CHOOSE du bandeau, on peut aussi changer le numéro de colonne à tracer.

Exercices :

– Créez une feuille de calcul pour calculer une moyenne de semestre LMD avec 4 modules à 6 ECTS et 2 modules à 3 ECTS.
– Créer une feuille de calcul pour entrer 3 notes de devoir pour 6 personnes, et faites les moyennes par personne et par devoir.
– Créez une feuille de calcul permettant de visualiser quelques étapes de l'algorithme d'Euclide de calcul de PGCD. De même pour Bézout.

12 Suites numériques récurrentes

Sur les TI, on utilise le `MODE SEQUENCE` puis `Y=`. Cela permet de définir une suite par sa relation de récurrence, d'avoir un tableau de valeurs des premiers éléments, puis de tracer le graphe de la relation de récurrence (pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$) et les premiers termes de la suite (choisir dans `Y=` puis `F7` (Axes) puis `WEB` et `AUTO` pour faire un graphe en toile d'araignée). On peut aussi définir la suite dans le tableur, dans l'historique ou par un programme, c'est nécessaire si on veut travailler en mode exact.

Sur les HP49, on peut utiliser le tableur pour calculer les premiers termes de la suite, on peut la définir dans l'historique ou par un programme. On doit utiliser l'application de géométrie pour visualiser une suite récurrente (graphe en "toile d'araignée" avec la fonction `plot`).

Sur les deux modèles, on peut définir une suite récurrente $u_n = f(u_{n-1})$ par la formule :
`Define u(n)=when(n>0,f(u(n-1)),u0)` (TI)
`DEFINE(U(N)=IFTE(N>0,F(U(N-1)),U0)` (HP)
(ci-dessus, remplacer `u0` par la valeur initiale). Ceci permet le calcul exact ou approché des termes de la suite selon la valeur de `u0`. Le calcul approché est la plupart du temps plus intéressant, mais parfois les deux calculs peuvent servir. On peut bien entendu faire le calcul exact directement dans le tableur.

Pour les récurrences à plus de 1 terme, ce type de formule est très inefficace, car on calculerait plusieurs fois le même terme. Il faut alors écrire un petit programme ou utiliser le tableur ou (en mode approché) l'application Suites des TI.

Exercices :

– Utiliser la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

  pour $f(x) = x^5 - 2$. Tracer une représentation graphique de la suite. Calculer la valeur exacte de u_5 pour $u_0 = 1$.
– Définir la suite de Fibonacci

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

  en utilisant plusieurs méthodes et comparer les temps de calcul.

13 Système.

La mémoire des calculatrices est composée de ROM (read only memory, en principe non modifiable) et de RAM (random access memory, perdue en cas de perte d'alimentation électrique). Sur les modèles TI89/V200/HP49/49+, la ROM est de la rom flash ce qui permet de mettre à jour le système de la calculatrice d'une part et de conserver des données ou applications d'autre part. Sur certains modèles, on peut ajouter des extensions mémoire (cartes SD pour HP49+). On peut connecter les calculatrices de même modèle entre elles (cable) ou avec un ordinateur (cable). Ceci permet d'ajouter des applications téléchargées sur Internet ou simplement d'échanger des données ou des programmes.

Sur les 49, la mémoire (RAM et ROM flash utilisateur) est divisée en port 0 (RAM), 1 (512K) et 2 (1M, flash rom). La gestion des variables se fait par l'application FILES ou directement avec STO/RCL en indiquant le numéro de port ou un nom de variable "taggé" par le numéro de port. Les applications sont appelées librairies, elles ont un numéro de librairie et s'installent en stockant le contenu de la variable chargée dans l'un des 3 ports. Une fois la librairie installée, on la configure manuellement avec la commande ATTACH(numéro) ou en tapant ON-F3 (on perd alors l'historique). Le port 0 (la RAM) permet d'organiser ses données avec une arborescence complète (répertoires, sous-répertoires). Les commandes correspondantes sont CRDIR/PURGE (répertoire vide uniquement). L'échange de données se fait par le kit de connexion sur PC ou avec sx/rx sous Linux (package lsxrx), sur la calculatrice APPS puis I/O ou directement avec les commandes XRECV/XSEND (protocole X-modem) ou RECN/RECV/SEND (protocole Kermit).

Sur les TI, il y a 2 zones de mémoires, la RAM qui contient un système de répertoire restreint à un niveau et la zone d'archivage. Les commandes de création de répertoire sont NewFold, GetFold, DelFold. On peut accéder à une variable d'un répertoire par un chemin en utilisant \ comme séparateur. Les commandes d'archivage/désarchivage sont Archive et Unarchiv. La gestion et les échanges de donnée se font avec le kit de connexion, ou avec le programme tilp sous Linux, et l'application VAR-LINK sur la calculatrice.

Les applications flash TI peuvent atteindre une taille importante, et on est vite à court de place sur les 89 par exemple. Sur les HP, les librairies ne peuvent dépasser 128K et occupent souvent beaucoup moins de place. On peut donc en installer beaucoup, au prix souvent d'une interface moins conviviale que sur TI.

Adresses web : `www.hpcalc.org` et `www.ticalc.org`.

Exercices : transmettre une variable entre 2 calculatrices. Récupérer et installer une application flash sur TI (par exemple Cabri) ou une librairie sur HP (par exemple stat49pro).

14 Sujets donnés au CAPES

http://capes-math.org/2005/sujets_dossiers_05.htm
http://capes-math.org/2005/sujets_dossiers_06.htm
http://capes-math.org/2005/sujets_dossiers_07.htm

1. (30 juin 06)
   Ce tableau comporte des données relatives au site web du capes

$$\begin{pmatrix} \text{Mois} & \text{visiteurs} & \text{visites} & \text{Mo} \\ 1 & 353 & 425 & 62 \\ 2 & 577 & 744 & 144 \\ 3 & 834 & 1151 & 169 \\ 4 & 650 & 803 & 132 \\ 5 & 2498 & 3404 & 1021 \\ 6 & 2324 & 3254 & 907 \\ 7 & 2636 & 3482 & 589 \\ 8 & 1410 & 1916 & 274 \\ 9 & 2525 & 3553 & 681 \\ 10 & 2897 & 4135 & 2600 \\ 11 & 3861 & 5232 & 4372 \\ 12 & 2452 & 3157 & 2499 \end{pmatrix}$$

   Donner pour ces 3 séries de données des tableaux des effectifs cumulés croissants. À quels types de questions ces tableaux permettent-ils de répondre ? Calculer la moyenne du nombre de visiteurs et du nombre de visites. Quel est le nombre moyen de visites par visiteurs ? Quelle est en moyenne la bande passante utilisée par un visiteur ? Proposer une ou deux représentations graphiques permettant de visualiser les données du tableau. Peut-on corréler ces différentes séries de données ?

2. (29 juin 06)
   Soit m un entier relatif et E_m l'équation d'inconnues x et y :

$$11x + 13y = m$$

   Si $m \in \mathbb{N}$, montrer qu'il y a autant de solutions de E_m dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que d'entiers dans $[5m/11, 6m/13]$. Écrire un algorithme renvoyant la ou les solutions éventuelles de E_m. Comment pourrait-on montrer que 119 est le plus grand entier naturel tel que E_m n'admet pas de solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

3. (02 juillet 06)
   Soit $ABCD$ un rectangle direct de cotés a et b. On cherche s'il existe un triangle équilatéral APQ inscrit dans ce rectangle ($P \in [BC]$ et $Q \in [CD]$).
   Construction : on construit les triangles équilatéraux BCI et CDJ puis P l'intersection de (AJ) avec $[BC]$ et Q l'intersection de (AI) avec $[CD]$. Faire la construction à la calculatrice et animer la, en faisant apparaitre les conditions aux limites d'existence de solution $a/b \in [\sqrt{3}/2, 2/\sqrt{3}]$. Montrer en utilisant les complexes que le triangle construit est équilatéral (cf. le sujet original pour plus d'indications).

4. (08 juillet 06)
   Soit C le cercle de centre l'origine O et de rayon 1. Soit $A(1,0)$, $A'(-1,0)$ et $H \in [AA']$ d'abscisse x. On mène la perpendiculaire à AA' en H, qui coupe C en M et M'. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM'. Montrer que le triangle est d'aire maximale lorsqu'il est équilatéral. Construire la figure à la calculatrice et conjecturer le résultat.

5. (17 juillet 06)
   Soit $f(x) = \exp(-\cos(x))$ sur $[0, \pi]$, C_f sa courbe représentative, il s'agit de

déterminer le nombre de tangentes à C_f passant par l'origine O.
Calculer l'équation de la tangente en $a \in [0, \pi]$. Montrer que T_a passe par O si et seulement si $a \sin(a) = 1$. Soit $\phi(x) = \sin(x) - 1/x$, étudier les variations de ϕ' sur $[0, \pi]$, puis de ϕ. Donner le nombre de solutions puis des valeurs approchées de ces solutions, tracer les tangentes solutions et la courbe C_f sur un même graphe.

6. (16 juillet 07)
Soient A, B, C trois points non alignés, M un point de (BC), M_1 le projeté orthogonal de M sur (AB), M_2 celui de M_1 sur (AC), M_3 celui de M_2 sur (BC), I l'intersection de (MM_1) et (M_2M_3). On appelle E l'ensemble des points M de (BC) tels que $M_3 = M$. Réaliser la construction sur la calculatrice. Animer la construction pour conjecturer la nature de E. Soit M' un autre point de (BC), montrer que le point I' défini comme I mais correspondant à M' au lieu de M est l'image de I par une homothétie de centre A. En déduire que lorsque M décrit (BC), I décrit une droite fixe Δ passant par A. Montrer que l'intersection J de Δ et (BC) appartient à E et construire E.

7. (2 juillet 05)

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad f(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 - 7), \quad u_0 \in [2, 3]$$

Calculer les premiers termes de la suite, conjecturer le comportement asymptotique. Montrer que f est contractante de rapport $1/2$ sur $[2, 3]$ et que $\sqrt{7}$ est toujours compris entre deux valeurs successives de la suite. Donnez une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-4} près.

8. (4 juillet 05)
Il s'agit de déterminer la date J_1 d'apparition simultanée de 2 corps astronomiques ayant des périodes de 105 et 81 jours, observés respectivement les jour J_0 et $J_0 + 6$. Soit x, y le nombre de périodes effectuées par les 2 corps. Montrer que $35x - 27y = 2$. Présentez un algorithme de calcul du PGCD de 2 entiers, puis de recherche d'une solution particulière de $35x - 27y = 1$. Calculer J_1 puis J_2 la date de l'apparition simultanée suivante.

9. (29 juin 05)
Soit A, B, C trois points non alignés du plan, T le triangle ABC. On se propose de démontrer uniquement avec les nombres complexes que les hauteurs de T sont concourantes en un point H. Illustrer le résultat. On peut se ramener au cas où les affixes a, b et c de A, B, C sont de même module (pourquoi ?) montrer avec les instructions de calcul formel que les hauteurs passent alors par H d'affixe $h = a + b + c$ (indication, considérer $z = (h - c)/(b - a)$).

15 Programmation

L'essentiel de cette section est adapté d'un document de Renée De Graeve
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~degraeve/grouge.ltx`
Le document original traite de nombreuses autres calculatrices.

15.1 Edition, correction, exécution

15.1.1 Comment éditer et sauver un programme

1. Traduction HP49G mode Algébrique
   Un programme s'écrit dans la ligne de commande entre les délimiteurs $\ll \gg$
   Pour le sauver, il suffit de faire suivre le dernier $\gg$ par :

   STO ▷ NOMDUPROGRAMME

2. Traduction TI89, 92
   Pour avoir accès à l'éditeur, on appuie sur la touche `APPS` puis `7 (Program Editor)` puis `3 (New)` et `ENTER`.
   On vous demande, dans `Type`, si on veut écrire une fonction (qui renvoie une valeur grâce à `Return`) ou un programme (appuyer `->` puis faites votre choix `1` ou `2`) puis `ENTER` pour valider votre choix. On écrit ensuite le nom du programme dans la case `Variable` puis `ENTER` pour valider le nom, puis `ENTER` pour entrer dans l'éditeur.
   Vous êtes prêt à taper votre programme. Vous pouvez ajouter éventuellement les noms des paramètres dans la première ligne (en déplaçant le curseur avec les flèches).
   Les touches `F1 F2 F3 F4` vous facilitent l'édition.
   En appuyant sur ♦ Q (HOME) vous sauvez votre programme et vous revenez à l'écran `HOME`.

15.1.2 Comment corriger un programme

1. Traduction HP49G mode Algébrique
   Si la syntaxe est mauvaise, la machine vous met automatiquement le curseur là où le compilateur a détecté l'erreur. Il suffit donc de corriger !
   Si l'erreur est détectée au cours de l'exécution du programme il faut taper :

   `VISIT('NOMDUPROGRAMME')`

   pour éditer votre programme. On corrige, puis `ENTER` sauve votre programme corrigé.
2. Traduction TI89 92
   Si la syntaxe est mauvaise, la machine vous demande si vous voulez aller là où se trouve l'erreur (`ENTER=GOTO`) ou si vous voulez arrêter (`ESC=CANCEL`). Vous répondez : `ENTER`. Vous êtes alors dans l'éditeur prêt à corriger votre erreur. Puis ♦ Q (HOME) vous fait revenir à l'écran `HOME` en sauvant votre correction.
   Si l'erreur est détectée au cours de l'exécution du programme il faut taper :

   `APPS` puis `7 (Program Editor)` puis `1 (Current)` et `ENTER`

   qui édite votre programme.

15.1.3 Comment exécuter un programme

1. Traduction HP49G mode Algébrique
   Si le programme n'a pas de paramètres, il suffit de taper son nom dans la ligne de commande ou d'utiliser le menu `VAR`. S'il y a des paramètres, on fait suivre

le nom du programme de parenthèses dans lesquelles on met les valeurs des paramètres séparées par une virgule.
Exemple : `PGCD(45,75)`

2. Traduction TI89 92
Si le programme n'a pas de paramètres, il suffit de taper son nom dans la ligne de commande. S'il y a des paramètres, on fait suivre le nom du programme de parenthèses dans lesquelles on met les valeurs des paramètres séparées par une virgule.
Exemple : `pgcd(45,75)`

15.1.4 Comment améliorer puis sauver sous un autre nom un programme

1. Traduction HP49G mode Algébrique

   `RCL('NOMDUPROGRAMME')` puis `EDIT` du bandeau.

   On fait les améliorations et on fait suivre le dernier ≫ par :

   `STO ▷ NOUVEAUNOM`

2. Traduction TI89 92
Vous ouvrez l'éditeur avec le programme que vous voulez améliorer puis sauver sous un autre nom :
`APPS` puis `7 (Program Editor)` puis `2 (Open)` puis mettre le nom du programme à modifier dans `Variable` (appuyer sur `->` pour avoir accès à tous les noms de vos programmes, sélectionner celui à modifier avec les flèches et `ENTER`), puis `ENTER`.
Ensuite, il suffit de taper sur ♦ `S` pour sauver cet éditeur sous un autre nom : `SAVE COPY AS` (on met le nouveau nom dans `Variable`).
Vous pouvez faire vos modifications puis ♦ `Q` (`HOME`) vous sauve votre programme modifié sous le nouveau nom, et vous revenez à l'écran `HOME`.

15.2 Les différentes instructions

15.2.1 Les commentaires

Il faut prendre l'habitude de commenter les programmes. En algorithmique un commentaire commence par `//` et se termine par un passage à la ligne.

1. Traduction HP49G
Le commentaire commence par `@` et se termine par un passage à la ligne ou est entouré de deux `@`.
Le caractère `@` est obtenu en tapant `shift-rouge ENTER`
Attention!!! le compilateur efface les commentaires... donc pour garder vos commentaires, il faut écrire votre programme sous la forme d'un texte qu'il faut ensuite compiler avec `STR` → ce qui complique un peu...

2. Traduction TI89 92
Le commentaire commence par © (F2 9) et se termine par un passage à la ligne.

15.2.2 Les variables

Ce sont les endroits où l'on peut stocker des valeurs, des nombres, des expressions. Le nom d'une variable est limité à 8 caractères sur TI, les HP font la différence entre majuscules et minuscules mais pas les TI.

Les variables peuvent être globales (encore définies après l'exécution du programme) ou locales (elles n'intefèrent pas avec les variables globales).

- Sur les HP49G, les variables locales sont déclarées et initialisées (initialisation obligatoire !) grâce à $\rightarrow$ (shift-rouge 0) Pour la HP49G mode Algébrique chaque déclaration de variable doit être suivie par un sous programme (délimiteurs $\ll\gg$) en écrivant :

$$\ll 1\ \rightarrow\ \mathtt{A} \ll 2\ \rightarrow\ \mathtt{B} \ll \text{corps du programme} \gg\gg\gg$$

  La flèche doit être entourée d'espaces, ces espaces sont mis automatiquement quand on n'est pas en mode Alpha.
  Exemple :

$$\ll 3.14\ \rightarrow\ \mathtt{PI} \ll 2 * \mathtt{PI} * \mathtt{R} \gg\gg \mathtt{STO} \triangleright\ \mathtt{PER}$$

  Dans cet exemple, on a écrit le programme PER, PI est une variable locale qui est déclarée et initialisée à $3.14\ \rightarrow\ \mathtt{PI}$. Cette variable est locale pour le programme qui suit sa déclaration (ici $\ll 2 * \mathtt{PI} * \mathtt{R} \gg$).
  Par contre, R est une variable globale (qui doit exister avant l'exécution du programme PER). Si, au cours d'un programme, on veut stocker une valeur dans une variable (locale ou globale) il faut bien sûr utiliser STO$\triangleright$.
- Pour les TI89, TI92 il faut définir les variables locales en début de programme en écrivant par exemple :
  `:local a,b`

15.2.3 Notion de paramètres

Quand on écrit une fonction il est possible de lui passer des paramètres. Par exemple si A et B sont les paramètres de la fonction pgcd on écrira :

`pgcd(A,B)`

Ces paramètres se comportent comme des variables locales, la seule différence est qu'ils sont initialisés lors de l'appel de la fonction.

- Pour la HP49G mode Algébrique si on veut que R soit le paramètre de la fonction PER on écrit :

$$\ll \rightarrow\ \mathtt{R} \ll 3.14\ \rightarrow\ \mathtt{PI} \ll 2 * \mathtt{PI} * \mathtt{R} \gg\gg\gg \mathtt{STO} \triangleright\ \mathtt{PER}$$

- Pour les TI 89 92 on met le nom des paramètres dans le nom de la fonction par exemple :
  `:addition(a,b)`

15.2.4 Les Entrées clavier

Pour que l'utilisateur puisse entrer une valeur dans la variable A au cours de l'exécution d'un programme, on écrira,

1. HP49G : `...PROMPTSTO('A')`
2. TI89, 92
   `:Prompt A`
   `:Prompt A,B`
   ou encore :
   `:Input "A=",A`

Attention, on ne peut pas faire d'entrées dans une fonction sur TI. et c'est déconseillé sur HP. Une fonction doit uniquement utiliser ses paramètres comme entrées.

15.2.5 Les Sorties écran.

Il ne faut pas confondre les affichages intermédiaires d'un programme avec la valeur de retour d'une fonction, les affichages ne peuvent pas être utilisés par un programme appelant. Pour afficher un résultat au cours de l'exécution d'un programme, on écrit :

1. HP49G
   – dans une boite de message

$$\mathtt{MSGBOX}(\text{"}\mathtt{A} = \text{"} + \to \mathtt{STR}(\mathtt{A}))$$

   (ici le `+` effectue la concaténation de deux chaines de caractères)
   – sur une ligne de lécran :

$$\mathtt{DISP}(\text{"}\mathtt{A} = \text{"} + \mathtt{A}, 3)$$

   ,
   3 représente le numéro de la ligne,
   `CLLCD()` permet d'effacer l'écran
   `FREEZE(7)` gèle l'affichage et permet de visualiser les 7 lignes de l'affichage.
2. TI 89 92
   `:Disp "A=",A`
   `:ClrIO` efface l'écran.
   `:Pause` arrête le programme (on appuie sur `ENTER` pour reprendre l'exécution).

Attention, on ne peut pas faire de sortie dans une fonction sur TI. On utilise la valeur de retour pour renvoyer un résultat (c'est la dernière valeur calculée dans la fonction ou la valeur qui suit une instruction `Return` sur les TI).

15.2.6 La séquence d'instructions ou action

Une action est une séquence d'une ou plusieurs instructions. On utilise `:` (sur TI) ou `;` (sur HP, le `;` s'obtient en tapant en même temps sur `shift-rouge SPC`) comme séparateur d' instructions.

15.2.7 L'instruction d'affectation

L'affectation est utilisée pour stocker une valeur ou une expression dans une variable. On tape la valeur puis la touche `STO` puis le nom de la variable à affecter.

15.2.8 Les instructions conditionnelles

1. Traduction HP49G mode Algébrique
   `IF` *condition* `THEN` *action* `END`
   `IF` *condition* `THEN` *action1* `ELSE` *action2* `END`
   Exemple (Attention au == pour traduire la condition d'égalité) :
   `IF A == 10 OR A < B THEN B-A STO▷ B ELSE A-B STO▷ A END`
2. Traduction TI89 92
   `:If` *condition* `Then :` *action* `: EndIf`
   `:If` *condition* `Then :` *action1* `: Else :` *action2* `: EndIf`
   Exemple :
   `:If A = 10 or A < B Then : B-A->B : Else : A-B->A : EndIf`

15.2.9 Les instructions "Pour"

1. Traduction HP49G mode Algébrique
   `FOR (I, A, B)` *action* `NEXT`
   `FOR (I, A, B )` *action* `STEP P`
   L'instruction `FOR` déclare `I` comme variable locale et l'initialise automatiquement.
2. Traduction TI89 92
   `:For I,A,B :` *action* `: EndFor`
   `:For I,A,B,P :` *action* `: EndFor`

15.2.10 L'instruction "Repeter"

1. Traduction HP49G mode Algébrique
   `DO` *action* `UNTIL` *condition* `END`
2. Traduction TI89 92
   `:Loop :`*action* `:If` *condition* `:Exit :EndLoop`

15.2.11 L'instruction "Tant que"

1. Traduction HP49G mode Algébrique
   `WHILE` *condition* `REPEAT` *action* `END`
2. Traduction TI89 92
   `:While` *condition* `:` *action* `: EndWhile`

15.2.12 Les conditions ou expressions booléennes

Une condition est une expression qui a comme valeur un booléen, à savoir elle est soit `vraie` soit `fausse`.

1. Les opérateurs relationnels
   Pour exprimer une condition simple on utilise les opérateurs :
   $$= \; > \; > \; \leq \; \geq \; \neq$$
   Attention pour les calculatrices HP l'égalité se traduit comme en langage `C` par `==`
2. Les opérateurs logiques
   Pour traduire des conditions complexes, on utilise les opérateurs logiques :
   `or and not` (TI), `OR AND NOT` (HP)

15.2.13 Les fonctions

Dans une fonction on ne fait pas de saisie de données : on utilise des paramètres qui seront initialisés lors de l'appel. Dans une fonction on veut pouvoir réutiliser le résultat, on peut utiliser un appel de fonction dans une expression.

1. Exemple HP49G mode Algébrique
   $\ll\rightarrow$ A B
   $\ll$ A + B $\gg$
   $\gg$
   STO $\triangleright$ ADDITION
   Pour l'exécuter, on tape :
   $$\texttt{ADDITION}(4,5)$$
2. Exemple TI89 92

```
:addition(a,b)
:Func
:Return a+b
:EndFunc
```

Pour l'exécuter, on tape :

$$\texttt{addition}(4, 5)$$

15.2.14 Les listes

On utilise les { } pour délimiter une liste. Par exemple {} désigne la liste vide et {1, 2, 3} est une liste de 3 éléments. Si on affecte une variable à une liste, on accède à un élément de la liste en tapant le nom de variable suivi de crochets et de l'indice entre crochets, par exemple `TAB[2]` désigne le deuxième élément de `TAB`.

Attention à ne pas confondre une liste avec la notion d'ensemble en mathématiques : dans un ensemble l'ordre des éléments n'a pas d'importance mais dans une liste l'ordre est important.

1. HP49G
   - On obtient le `P`ième élément de `L` avec : `L[P]` ou `L(P)` ou `GET (L, P )`
   - Si on veut modifier le `P`ième élément de `L` (par exemple le mettre à 0) on écrira : `PUT(L, P, 0) STO▷ L`
     ou
     `PUT('L', P, 0)`
     En effet `PUT(L, P, 0)` renvoie la liste modifiée (sans modifier `L`) alors que :
     `PUT ('L', P, 0)` modifie la liste `L`.
   - Pour concaténer deux listes ou une liste et un élément on utilise le `+` (alors que pour ajouter deux listes de mêmes longueurs on utilise la commande `ADD`).
   - La commade `SEQ` permet de constituer une liste, on tape :

     $$\texttt{SEQ}('\texttt{X} * \texttt{X}', '\texttt{X}', 4, 10, 1)$$

     on obtient :

     $$\{16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$$

2. `SUB` permet d'extraire des éléments d'une liste.
3. TI89-92
   - `l[i]` désigne le ième élément de la liste `l`. On peut modifier le iìeme élément de `l` avec la touche `STO` :
     `2 → L[2]`
     et si `L` est de longueur `n` on peut rajouter un élément (par exemple 121) à `L` en écrivant :
     `121 -> L[n+1]`
   - `augment` permet de concaténer deux listes.
   - on peut initialiser une liste de `n` éléments avec la commande `newlist`, par exemple :
     `newlist(10)->L` (`L` est alors une liste de 10 éléments nuls).
   - On peut aussi créer une liste avec `seq`, par exemple :
     `seq(i*i, i, 1, 10)` désigne la liste des carrés des 10 premiers entiers,
     `seq(i*i, i, 0, 10, 2)` qui désigne la liste des carrés des 5 premiers entiers pairs (le pas est ici égal à 2).
   - `left (L, 5)` désigne les 5 premiers éléments de la liste `L`, autres instructions d'extraction `right` et `mid`.

15.2.15 Chaines de caractères

Les chaines de caractère utilisent le délimiteur `"`. Quelques fonctions (HP puis TI) :

1. longueur : `SIZE`, `dim`
2. concaténation : `+`, `&`
3. partie de chaine : `SUB`, `left/mid/right`
4. code ASCII : `CHR/NUM`, `char/ord`
5. recherche d'une sous-chaine dans une chaine : `POS`, `inString`

15.3 Exercices

15.3.1 Sur le thème mathématique.

1. Ecrire une fonction calculant le cube d'un entier. En utilisant cette fonction afficher la liste des cubes des entiers de 1 à 10.
2. Ecrire une fonction calculant les 2 racines d'une équation du second degré donnée par a, b et c.
3. Ecrire une fonction calculant la somme de j variant de 1 à n de $1/j$. De même en faisant varier j en décroissant.
4. Ecrire une fonction testant si un nombre est premier en recherchant un diviseur inférieur à $\sqrt{n}$.
5. Ecrire une fonction calculant le pgcd de 2 entiers par l'algorithme d'Euclide.
6. Ecrire une fonction calculant l'indicatrice d'Euler d'un entier en utilisant la fonction précédente.
7. Même question pour l'identité de Bézout.
8. Ecrire une fonction calculant $a \pmod{pq}$ connaissant $a = b \pmod{p}$ et $a = c \pmod{q}$.

15.3.2 Sur le thème du séquencage

Pour les chaines de caractère, on utilisera au choix des listes de variables (attention, vérifier qu'elles ne sont pas affectées) ou des chaines.

1. Ecrire une fonction testant si un caractère est parmi A, C, G, T. On renvoie 1 si c'est le cas et 0 sinon.
2. Ecrire une fonction qui teste si deux caractères sont complémentaires.
3. Ecrire une fonction qui teste si une chaine de caractère n'a que des caractères A, C, G, T.
4. Ecrire une fonction qui teste si deux chaines sont complémentaires.
5. Ecrire une fonction qui renvoie la chaine ARN complémentaire d'une chaine ADN.
6. Ecrire une fonction qui compte le nombre de A, C, G et T dans une chaine.
7. Écrire une fonction renvoyant la position d'un codon de start dans une chaine d'ARN. Faites de même pour déterminer la position d'un codon de stop à partir d'une position donnée.
8. Écrire un programme qui détermine le début et la fin d'une partie codante d'une séquence d'ARN (en recherchant le premier triplet de démarrage AUG et l'un des triplets de fin correspondants UAA, UGA, UAG). Modifier le programme précédent pour qu'il lise de 3 en 3 seulement et détermine les 3 possibilités de partie codante de l'ARN (selon que l'on commence à la 1ère, 2ème ou 3ème lettre la lecture de 3 en 3). On renverra pour chacune la longueur de la séquence codante et le rapport du nombre de bases AU sur le nombre de bases CG.

9. On se donne un tableau de 16 réels indicé horizontalement et verticalement par les lettres de base A, C, G, T. Chaque réel correspond à un “poids” que l’on donne si les lettres correspondantes se trouvent sur 2 chaines d’ADN, on mettra par exemple un poids positif si les lettres sont égales et négatif sinon. Écrire une fonction calculant le poids total obtenu en sommant tous ces poids pour les caractères de deux chaines de même longueur. Ceci servira ensuite à comparer une chaine à des chaines connues en trouvant la plus proche.
10. (fastidieux) : transcrire une chaine ARN en proteine

	U			C			A			G			
U	UUU	Phe	[F]	UCU	Ser	[S]	UAU	Tyr	[Y]	UGU	Cys	[C]	U
	UUC	Phe	[F]	UCC	Ser	[S]	UAC	Tyr	[Y]	UGC	Cys	[C]	C
	UUA	Leu	[L]	UCA	Ser	[S]	UAA	*STOP*		UGA	*STOP*		A
	UUG	Leu	[L]	UCG	Ser	[S]	UAG	*STOP*		UGG	Trp	[W]	G
C	CUU	Leu	[L]	CCU	Pro	[P]	CAU	His	[H]	CGU	Arg	[R]	U
	CUC	Leu	[L]	CCC	Pro	[P]	CAC	His	[H]	CGC	Arg	[R]	C
	CUA	Leu	[L]	CCA	Pro	[P]	CAA	Gln	[Q]	CGA	Arg	[R]	A
	CUG	Leu	[L]	CCG	Pro	[P]	CAG	Gln	[Q]	CGG	Arg	[R]	G
A	AUU	Ile	[I]	ACU	Thr	[T]	AAU	Asn	[N]	AGU	Ser	[S]	U
	AUC	Ile	[I]	ACC	Thr	[T]	AAC	Asn	[N]	AGC	Ser	[S]	C
	AUA	Ile	[I]	ACA	Thr	[T]	AAA	Lys	[K]	AGA	Arg	[R]	A
	AUG	Met	[M]	ACG	Thr	[T]	AAG	Lys	[K]	AGG	Arg	[R]	G
G	GUU	Val	[V]	GCU	Ala	[A]	GAU	Asp	[D]	GGU	Gly	[G]	U
	GUC	Val	[V]	GCC	Ala	[A]	GAC	Asp	[D]	GGC	Gly	[G]	C
	GUA	Val	[V]	GCA	Ala	[A]	GAA	Glu	[E]	GGA	Gly	[G]	A
	GUG	Val	[V]	GCG	Ala	[A]	GAG	Glu	[E]	GGG	Gly	[G]	G

16 Géométrie

16.1 Principes

16.1.1 Géométrie dynamique

Une application de géométrie permet d'effectuer une construction géométrique, c'est-à-dire définir des objets géométriques (points, droites, segments, cercles, perpendiculaire, ...) indépendants ou dépendants des objets précédents. Par exemple, on crée trois points, puis le triangle défini par ces 3 points, les médianes issues des 3 sommets puis le point d'intersection des 3 médianes. Les applications de géométrie peuvent aussi calculer un lieu géométrique (courbe à laquelle appartient un point dépendant d'un point se déplacant sur une courbe) ou une enveloppe de droite (courbe à laquelle est tangente une droite dépendant d'un point se déplacant sur une courbe). On dit que l'application est interactive si on peut déplacer certains objets géométriques soit dans le plan s'ils sont indépendants des objets précédents, soit sur une courbe du plan s'ils sont sur une courbe, le logiciel recalcule alors la nouvelle position de tous les objets géométriques et affiche la figure mise à jour. On peut ainsi observer si une propriété de la figure (par exemple concourrance de trois droites, tangence, ...) est fortuite ou semble toujours vraie. Si le logiciel de géométrie interagit avec un logiciel de calcul formel, on peut aussi prouver une propriété en faisant des calculs de géométrie analytique.

Les calculatrices ont un écran un peu trop petit pour faire des constructions complexes, de plus le temps de calcul de la figure devient vite trop grand pour avoir une interactivité agréable, néanmoins, elles permettent d'effectuer de petites constructions et d'expérimenter ce type de logiciels dont le principe de fonctionnement est identique sur ordinateur.

16.1.2 Représentation

L'écran d'une calculatrice ou d'un ordinateur est composé de pixels, les objets géométriques doivent être discrétisés pour être représentés. Sur un écran d'ordinateur, il y a suffisamment de pixels pour que l'oeil ait l'impression de voir de "vrais" objets géométriques, sur une calculatrice on distingue souvent clairement la discrétisation.

Il existe des algorithmes permettant d'effectuer rapidement cette discrétisation pour les objets géométriques courants (segments, cercles), le plus connu est l'algorithme de Bresenham. Il faut également tenir compte du cadrage visible à l'écran des objets à représenter (par exemple une droite sera toujours représentée par un segment), il faut donc effectuer cette troncature (en anglais clipping). Pour plus de détails, chercher le mot clef Bresenham sur Internet, cf. par exemple
`http://raphaello.univ-fcomte.fr/IG/Algorithme/Algorithmique.htm`

16.1.3 Calcul

Sur TI, il n'y a pas d'information précise sur les structures de donnée utilisée par le logiciel de géométrie (adapté de Cabri). On peut juste dire que dés qu'un calcul est nécessaire, il est fait en mode approché, on ne peut donc que conjecturer et pas prouver sur la TI.

Le logiciel de géométrie interactive de la HP49/50 utilise une représentation analytique (approchée ou exacte) des objets manipulés (par exemple deux nombres complexes approchés pour un segment de droite, ou un complexe et un réel approchés pour un cercle) correspondant à un repère orthonormé (qui n'est pas forcément affiché). Les liens entre un objet et les objets précdents se font en utilisant des fonctions à un ou plusieurs arguments comme par exemple le centre (d'un cercle), l'intersection (de 2 objets),... qui sont traduits par des équations en géométrie analytique. La résolution de ces équations se fait en fonction du mode exact ou approché, elle est naturellement plus lente dans le premier cas mais permet de prouver un résultat.

La création d'un objet dépendant d'objets précédents se fait de manière explicite sur HP (en utilisant une fonction pour créer l'objet) ou implicite sur TI (l'interface du logiciel traduit en interne des mouvements de curseur ou appui sur entree).

Pour calculer un lieu, la HP utilise une représentation paramétrique rationnelle de la courbe sur laquelle se déplace le point indépendant, puis elle calcule en mode exact les coordonnées du point dépendant en fonction du paramétre t et effectue une représentation de la courbe paramétrique obtenue. Il n'est pas possible de calculer un lieu et de faire bouger un point sur une même figure. Pour une enveloppe, on calcule l'équation de la droite dépendante en fonction de t

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$$

L'enveloppe est l'ensemble des points $M(t)(x(t), y(t))$ qui sont sur la droite, mais aussi tels que $M'(t)$ est parallèle à la droite

$$a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0, \quad a(t)x'(t) + by'(t) = 0$$

En dérivant la première équation par rapport à t et en soustrayant la seconde, on obtient

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0$$

d'où l'on déduit x et y en fonction de t (courbe paramétrique).

Enfin pour calculer l'équation cartésienne d'une courbe paramétrique rationnelle $x = n(t)/d(t), y = N(t)/D(t)$, la HP calcule le résultant par rapport à t de $n(t) - xd(t)$ et $N(t) - yD(t)$.

16.2 Utilisation

16.2.1 Par calculatrice

Sur les TI, il existe 2 logiciels de géométrie, le plus utilisé en France est celui adapté de Cabri, on le lance depuis les applications Flash (application gratuite à installer au préalable sur les TI89). Sur les HP49/50, il faut disposer de la ROM modifiée à télécharger sur `www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/capes.html`, puis on lance depuis Apps la Geometrie.

- Sur les TI avec Cabri
  - Pour construire un objet sur TI, on utilise les menus pour sélectionner le type d'objet puis avec le curseur et la touche Entree on crée un ou plusieurs objets libres ou on indique les objets dont l'objet à construire dépend.
  - Pour faire bouger un point d'une figure, on sélectionne le pointeur dans les menus, on s'approche du point, on appuie simultanément sur alpha ou LOCK et les touches de déplacement.
  - On peut faire afficher diverses informations numériques approchées sur les objets géométriques (distance, angle, etc.) mais il n'y a pas d'interaction avec le calcul formel.
  - On peut enregistrer diverses informations numériques de la figure lorsqu'on fait bouger un point pour une analyse ultérieure.
  - Lorsqu'une opération nécessite une entrée numérique (par exemple donner l'angle d'une rotation), on doit créer une représentation graphique de cet objet auparavant (menu F7, 6. Numerical Edit).
  - Il n'est pas possible de représenter des objets non géométriques comme les graphes de fonction.
  - On peut animer une figure
  - On peut définir des macros pour les constructions courantes.
- Sur les HP,

– les commandes de création d'objet sont "explicites", la plupart du temps elles se font par l'intermédiaire d'une ligne de commande qui est préremplie par l'utilisation des menus. Utiliser le menu Ajouter (F2) pour créer un nouvel objet.
– les objets ont tous un nom de variable, et peuvent avoir un label affiché à l'écran (on reprend alors le nom de variable) ou non. Le format d'un nom d'objet est composé du label affiché à l'écran et du nom de variable séparé par :, par exemple `A:A:` pour un objet nommé `A` et affiché `A`, ou `::A` pour un objet nommé `A` mais sans légende à l'écran.
– l'application peut utiliser des coordonnées exactes, mais si on veut déplacer un point et faire bouger la figure, il faut travailler en mode approché. Pour déplacer un point, on utilise le menu Deplacer et on indique le nom du point. On peut aussi éditer globalement la figure (Edit Figure), une figure se présente comme une matrice dont la première colonne est la colonne des commandes de création des objets, la deuxième colonne est le nom de l'objet (comme expliqué ci-dessus).
– on peut tracer des objets non géométriques, par exemple une courbe représentative de fonction, puis ensuite une tangente en un point, etc.
– on a accès depuis l'historique à toutes les informations analytiques sur tous les objets construits, on passe en argument d'une commande les noms de variables des objets géométriques, par exemple `abscisse(A)` (les commandes de géométrie sont affichées dans le bandeau si on tape la commande `GEO(0)`).
– on peut afficher une information analytique dans la figure (Legende), on peut enregistrer des valeurs de la figure lorsqu'on fait bouger un point pour une analyse ultérieure
– on peut définir des objets géométriques à l'aide de fonctions (définies dans l'historique comme une fonction normale).
– on ne peut pas animer une figure. Par contre on peut calculer un lieu ou une enveloppe et en déduire l'équation.

16.2.2 Exemple

Nous allons construire un triangle défini par trois points et son cercle circonscrit.
– Sur HP

1. Touche APPS, puis Géométrie.
2. Si votre calculatrice est en anglais, tapez `F6` (Config) et sélectionnez `Francais` (si c'est `English` qui apparait, tapez sur la touche `ON` pour annuler)
3. Vous pouvez supprimer les axes en tapant `F6` (Config) puis en sélectionnant `Enlever axes`
4. Tapez `F1` (Fich.) puis choisissez `Nouveau`, donnez un nom de variable pour votre construction, par exemple `CIRCON`
5. Tapez `F2` (Ajouter) puis choisissez `Points` puis `aleatoire`, donnez alors 3 noms de points, par exemple `A B C` (le clavier est en mode alphabétique). Vous avez construit 3 points aléaoires.
6. Tapez `F2` (Ajouter) puis choisissez `Lignes` puis `mediatrice`, vous voyez apparaitre
   `mediatrice()`
   le curseur se trouve après la parenthèse ouvrante, donnez alors le nom des 2 points A et B séparés par une virgule, vous devez avoir la ligne
   `mediatrice(A,B)`
   tapez sur `ENTER`, donnez ensuite le label de la médiatrice (c'est le nom qui apparaitra à l'écran) et le nom de variable de la médiatrice, par exemple

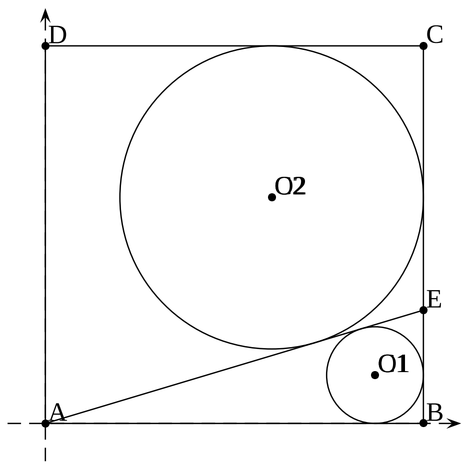
`:c:c`. Vous pouvez aussi ne pas afficher de label pour la médiatrice en tapant `::c`. Par contre vous devez toujours donner un nom de variable à la médiatrice.

7. Recommencez pour créer la médiatrice `b` des points `A` et `C` et la médiatrice `a` des points `B` et `C`.
8. Tapez à nouveau `F2`, sélectionnez `Points` puis `inter`, indiquez en argument les noms de variable des deux médiatrices, par exemple `a` et `b`, donnez un label et un nom de variable pour le point d'intersection, par exemple `:O:O`.
9. À nouveau `F2`, puis `Courbes`, puis `cercle`, donnez en argument le centre `O` et l'un des 3 points, par exemple `A`, donnez un nom de label et de variable au cercle par exemple `:S:S`. Notez qu'on pouvait construire directement un cercle circonscrit à partir de 3 points (en choisissant `circonscrit` au lieu de `cercle`).
10. Tapez sur `F1` puis `Sauver` pour sauver la figure `CIRCON`
11. Pour faire varier un des points et observer comment la figure se modifie, tapez `F4` (Déplacer), sélectionnez `A`, `B` ou `C` et faites bouger le point avec les flèches (vous pouvez précéder les flèches par les touches shift pour déplacer plus rapidement ou alpha moins rapidement). Tapez sur `Ok` pour accepter la nouvelle position ou sur `Annul` pour annuler le déplacement.
12. Pour quitter, tapez `F1` puis `Quitter`.
13. Vous pouvez maintenant taper des commandes de géométrie analytique, comme par exemple `affixe(A)`, `rayon(S)` directement au clavier (taper deux fois sur alpha puis sur la touche shift gauche puis sur alpha pour bloquer le clavier en mode alphabétique minuscule, taper à nouveau sur shift gauche alpha pour revenir en mode majuscule), ou en utilisant le sous-menu `Mesure` du bandeau des commandes de géométrie (taper `GEO(0)` pour faire apparaitre ce menu).
14. Pour revoir cette figure ultérieurement, lancez à nouveau l'application, puis si nécessaire `F1` et charger `CIRCON`.
15. Vous pouvez aussi modifier la construction dans son ensemble en l'éditant soit depuis le menu F4 (Déplacer), sous-menu `Edit figure`, soit en dehors de l'application de géométrie en éditant la variable `CIRCON`. Dans les deux cas, vous éditez une liste d'objets géométriques, chaque objet géométrique étant constitué d'une formule de calcul et d'un label/nom de variable.

– Sur TI :
  1. Lancer Flash APPS puis Cabri
  2. F2, Point, déplacer le curseur en 3 endroits et appuyer sur Entree.
  3. F3, Triangle, appuyer sur Entree en chacun des 3 points tracés précédemment
  4. F4, Perpendicular Bisector, appuyer sur entree sur chaque coté lorsque le curseur est près du milieu d'un coté et qu'apparait perpendicular bissector of this side of the triangle.
  5. F4, Cercle, appuyer sur entree lorsque le curseur est suffisamment proche de l'intersection et qu'apparait point at this intersection. Déplacer le curseur jusqu'à ce qu'il soit proche d'un des sommets et qu'apparaisse this radius point, taper à nouveau entree.
  6. F1, Pointer, mettre le curseur près du point à déplacer puis appuyer simultanément sur les fléches de déplacement et sur la touche alpha ou lock.
  7. F5, permet d'avoir certaines équations, menus, distances,...

16.2.3 Exercices

1. Faites la même construction pour le centre de gravité ou/et le cercle inscrit, l'orthocentre d'un triangle.
2. Théorème de Napoléon
   Soit ABC un triangle quelconque, on construit sur ses cotés trois triangles équilatéraux, il s'agit de caractériser le triangle formé par les 3 centres des triangles équilatéraux.
3. On se donne un point M sur un cercle passant par A, soit $MAPN$ le carré direct de coté MA. Quel est le lieu de N lorsque M parcourt le cercle ?
4. On se donne un point F et un cercle C de centre O et de rayon r. Soit M un point sur le cercle C, N la médiatrice du segment FM. Quelle est l'enveloppe des médiatrices N lorsque M parcourt le cercle C ?
5. On se donne un carré ABCD, un point E parcourant le segment BC. On construit le cercle inscrit au triangle ABE et le cercle tangent aux cotés EA, EC, CD. Il s'agit de savoir pour quelle position de E les deux cercles ont même rayon, et pour quelle position de E les deux cercles sont tangents à la droite EA au même point.



6. Théorème de Morley
   Soit ABC un triangle, on trace les trissectrices des angles en chaque sommet, puis on appelle M, N et O les points d'intersection de la première trissectrice issue d'un sommet avec la deuxième trissectrice issue du sommet suivant. Il s'agit de caractériser le triangle MNO.