Bac S 2008, maths expérimentales : les 25 sujets avec Xcas

Renée De Graeve
avec la participation de B. Parisse

3 juillet 2008

Table des matières

I - Sujet 003

> On lance trois dés bien équilibrés dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.
> Alice et Bob calculent la somme des trois nombres obtenus.
> Si la somme obtenue est égale à 9, Alice gagne.
> Si la somme obtenue est égale à 10, Bob gagne.
> Dans tous les autres cas, la partie est annulée.
> Le but de l'exercice est de déterminer qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner.

1. Sur un tableur, réaliser une simulation de cette expérience aléatoire.
   Appeler l'examinateur pour valider cette simulation.
   Réponses
   – On ouvre un tableur (menu Edit->Ajouter tableur) et on indique 1001 lignes,
   – On tape dans `A0,B0,C0` `=rand(6)+1` et on recopie vers le bas ou on remplit les colonnes `A, B, C` avec le menu Maths->Nombres aléatoires
   – On tape dans `D0` `=A0+B0+C0` et on recopie cette formule vers le bas.
   – Dans `E0`, on tape `=count_eq(9,D0 :D999)` et dans `E1` on tape `=count_eq(10,D0 :D999)`
   On obtient :

Table Edit Maths | reeval | val | Save | <No filename>

E2 | 0

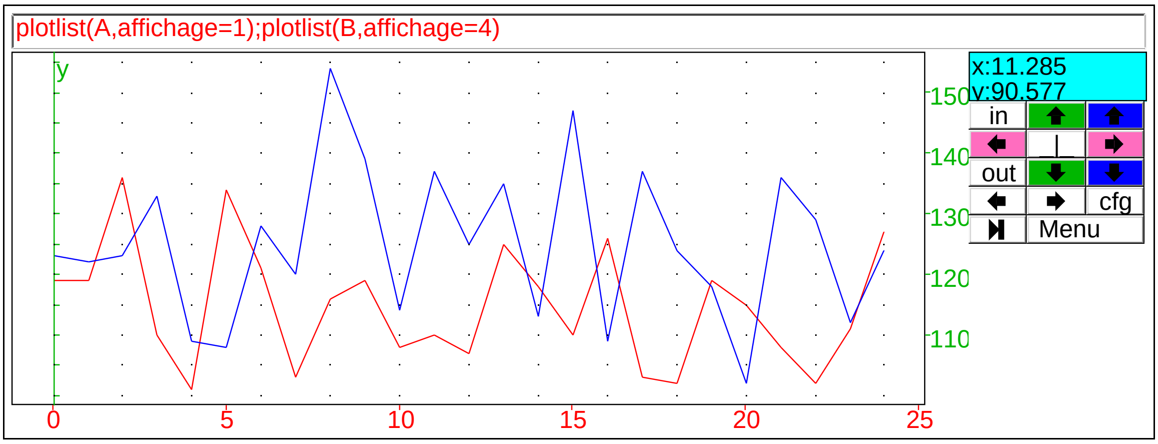
* Spreadsheet <> R1001C10 auto down fill

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	4	3	5	12	136	0	0	0	0
1	3	1	1	5	139	0	0	0	0
2	4	6	4	14	0	0	0	0	0
3	6	5	6	17	0	0	0	0	0
4	5	3	2	10	0	0	0	0	0
5	3	6	4	13	0	0	0	0	0
6	1	3	1	5	0	0	0	0	0
7	2	3	4	9	0	0	0	0	0
8	6	1	2	9	0	0	0	0	0
9	1	2	3	6	0	0	0	0	0
10	2	3	6	11	0	0	0	0	0
11	5	4	2	11	0	0	0	0	0
12	3	3	5	11	0	0	0	0	0
13	1	1	5	7	0	0	0	0	0
14	2	4	5	11	0	0	0	0	0
15	4	4	3	11	0	0	0	0	0
16	1	3	4	8	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

2. Sur un tableur, réaliser une simulation sur un échantillon de taille 1000 de cette expérience aléatoire et déterminer, pour cette simulation, les fréquences de réussite respectives d'Alice et de Bob.
   Appeler l'examinateur pour valider la feuille de calcul construite.
   Réponses
   – dans une ligne de commandes, on initialise des variables :
   `A :=NULL;B :=NULL;N :=0`
   – on met dans `F0:=(A :=A,E0)`
   – on met dans `F1:=(B :=B,E1)`

– on met dans `F2:=(N :=N+1)`

Explication : chaque fois que l'on appuie sur le bouton `eval` du tableur, on refait les 1000 tirages, `N` augmente de 1 et on rajoute dans `A` le nombre de fois qu'Alice à gagné et on rajoute dans `B` le nombre de fois que Bob à gagné. On tape et on obtient en bleu les fréquences où Bob gagne et en rouge celles où Alice gagne :



On tape dans une ligne de commande

```
sum(A)/N; sum(B)/N
```

On obtient : `114.76,124.84`

3. Est-il possible de conjecturer qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner ?
Appeler l'examinateur pour lui fournir cette réponse et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.
Réponses
On peut conjecturer que Bob a plus de chances de gagner.

4. **Étude mathématique**
On souhaite maintenant calculer la probabilité de gagner d'Alice et de Bob.
Répondre aux deux questions suivantes (dans n'importe quel ordre) :
Calculer la probabilité de gagner d'Alice et de Bob.
Qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner ?
Réponses
Il suffit de savoir de combien de façon on peut écrire 9 et 10 comme la somme de 3 entiers de [1..6]. On a :

$$\begin{aligned} 9 &= 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 \\ 10 &= 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4. \end{aligned}$$

Il y a 5 façons d'écrire 9 comme la somme de 3 entiers de [1..6] et 2 décompositions comportent des doublons. Il y a 6 façons d'écrire 10 et 3 décompositions comportent des doublons. La probabilité d'avoir 1,2,6 est donc $3! * 1/6^3$ alors que la probabilité d'avoir 1,4,4 est $3 * 1/6^3$. Donc la probabilité d'avoir 9 est

$$3\frac{6}{6^3} + 2\frac{3}{6^3} = \frac{4}{6^2} = \frac{1}{9}$$

alors que la probabilié d'avoir 10 est

$$3\frac{6}{6^3} + 3\frac{3}{6^3} = \frac{4}{6^2} = \frac{1}{8}$$

La probabilité de gagner d'Alice est donc $1/9/(1/9+1/8) = 8/17$ alors que celle de Bob est de $1/8/(1/9+1/8) = 9/17$

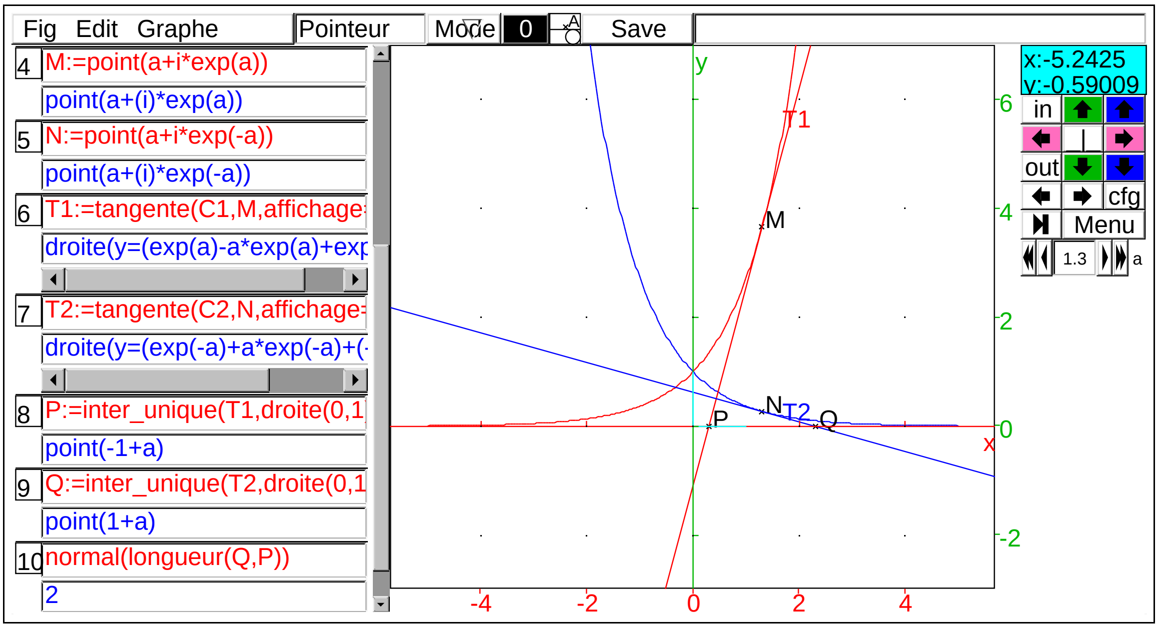
II - Sujet 006

Soit C1 et C2 les courbes d'équations respectives $y = \exp(x)$ et $y = \exp(-x)$ dans un repere O; $\vec{u}, \vec{v}$ orthonormal du plan.
Soit a un nombre réel quelconque. On désigne respectivement par M et N les points de C1 et C2 d'abscisse a et par (T1) et (T2) les tangentes à C1 et C2 en M et N.
Les droites (T1) et (T2) coupent respectivement l'axe des abscisses en P et Q.

1. Avec un logiciel de géométrie dynamique (ou une calculatrice graphique) construire les courbes C1 et C2 et les droites (T1) et (T2). Que peut-on remarquer pour les droites (T1) et (T2) ?
   Appeler le professeur pour lui montrer le graphique créé et lui indiquer la conjecture faite au sujet de (T1) *et de* (T2).
   Réponses
   On ouvre un niveau de géométrie plane (menu Edit->Ajouter->Graph&geo 2-d) et on tape (pour la ligne définissant le curseur commençant par assume on peut utiliser le menu Edit->Ajouter paramètre) :

```
C1:=plotfunc(exp(x),x,affichage=1);
C2:=plotfunc(exp(-x),x,affichage=4);
assume(a=[1.3,-5,5,0.1]);
M:=point(a,exp(a));
N:=point(a,exp(-a));
T1:=tangente(C1,M,affichage=1);
T2:=tangente(C2,N,affichage=4);
P:=inter_unique(T1,droite(0,1));
Q:=inter_unique(T2,droite(0,1));
```

   et on obtient :



   Les droites (T1) et (T2) semblent perpendiculaires. Ceci est confirmé par l'exécution de l'instruction

```
simplifier(pente(T1)*pente(T2))
```

2. À l'aide du logiciel émettre une conjecture à propos de la longueur du segment [PQ].
   Appeler le professeur pour lui présenter la conjecture et la démonstration envisagée.

Réponses
On tape `normal(longueur(P,Q))` on obtient 2

3. Démontrer la conjecture émise à la question 2.

Réponses
L'équation de (T1) est

$$y = \exp(a)(1 + x - a)$$

L'équation de T2 est

$$y = \exp(-a)(1 - (x - a))$$

Le point P a donc pour coordonnées $x = a - 1; y = 0$ alors Le point Q a donc pour coordonnées $x = 1 + a; y = 0$. La pente $m1$ de (T1) est égale à $\exp(a)$, la pente $m2$ de (T2) est égale à $\exp(-a)$. Le produit des pentes $m1 * m2 = \exp(a) * \exp(-a) = -1$ donc, (T1) et (T2) sont perpendiculaires.

III - Sujet 007

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\left\{\begin{array}{rl} a_0 = & 20 \\ b_0 = & 60 \end{array}\right. \text{ et, pout tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{rl} a_{n+1} = & \frac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = & \frac{a_n + 2b_n}{4} \end{array}\right.$$

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer les 50 premiers termes des suites (a_n) et (b_n).
Réponses
La colonne A représente la suite (a_n) et la colonne B représente la suite (b_n) :

Table Edit Maths | reeval | val | Save | <No filename>

B1 | =(A0+2*B0)/4

* Spreadsheet <> R51C10 auto down fill

	A	B	C	D	E	F	G
34	0.00226017957871	0.0022601795787	""	""	""	""	""
35	0.0016951346840	0.0016951346840	""	""	""	""	""
36	0.0012713510130	0.0012713510130	""	""	""	""	""
37	0.0009535132597	0.0009535132597	""	""	""	""	""
38	0.0007151349448	0.0007151349448	""	""	""	""	""
39	0.0005363512086	0.0005363512086	""	""	""	""	""
40	0.0004022634064	0.0004022634064	""	""	""	""	""
41	0.0003016975548	0.0003016975548	""	""	""	""	""
42	0.0002262731661	0.0002262731661	""	""	""	""	""
43	0.0001697048746	0.0001697048746	""	""	""	""	""
44	0.0001272786559	0.0001272786559	""	""	""	""	""
45	9.5458991964e-05	9.5458991964e-05	""	""	""	""	""
46	7.1594243973e-05	7.1594243973e-05	""	""	""	""	""
47	5.36956829797e-0	5.36956829797e-0	""	""	""	""	""
48	4.02717622348e-0	4.02717622348e-0	""	""	""	""	""
49	3.02038216761e-0	3.02038216761e-0	""	""	""	""	""
50	2.26528662571e-0	2.26528662571e-0	""	""	""	""	""
	0	1	2	3	4	5	6

2. Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de la suite (a_n) et à celle de la suite (b_n) ?
Appeler l'examinateur pour vérifier les calculs et les conjectures.

Réponses
On conjecture que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0.

3. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = a_n + b_n, \quad v_n = b_n - a_n$$

(a) Compléter la feuille de calculs avec les 25 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
(b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?
Appeler l'examinateur pour valider la conjecture et lui indiquer comment mettre en place la vérification demandée à la question suivante.
(c) Vérifier expérimentalement, sur la feuille de calcul, la conjecture émise, validée par l'examinateur.
Appeler l'examinateur, lui montrer les vérifications faites et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

Réponses
La colonne C représente la suite (u_n) et la colonne D représente la suite (v_n) :

Table Edit Maths | reeval | val | Save | <No filename>

C0 | =A0+B0

* Spreadsheet <> R51C10 auto down fill

	A	B	C	D	E	F
0	20.0	60	80.0	40.0	0	0
1	25.0	35.0	60.0	10.0	0	0
2	21.25	23.75	45.0	2.5	0	0
3	16.5625	17.1875	33.75	0.625	0	0
4	12.578125	12.734375	25.3125	0.15625	0	0
5	9.47265625	9.51171875	18.984375	0.0390625	0	0
6	7.1142578125	7.1240234375	14.23828125	0.009765625	0	0
7	5.33813476562	5.34057617188	10.6787109375	0.00244140625	0	0
8	4.00421142578	4.00482177734	8.00903320312	0.0006103515625	0	0
9	3.00331115723	3.00346374512	6.00677490234	0.00015258789062	0	0
10	2.25252151489	2.25255966187	4.50508117676	3.81469726562e-0	0	0
11	1.68940067291	1.68941020966	3.37881088257	9.53674316406e-0	0	0
12	1.26705288887	1.26705527306	2.53410816193	2.38418579102e-0	0	0
13	0.950290262699	0.950290858746	1.90058112144	5.96046447754e-0	0	0
14	0.712717846036	0.712717995048	1.42543584108	1.49011611938e-0	0	0
15	0.53453842178	0.534538459033	1.06907688081	3.72529029846e-0	0	0
16	0.400903825648	0.400903834961	0.801807660609	9.31322574615e-0	0	0
	0	1	2	3	4	5

Les suites (u_n) et (v_n) semblent être des suites géométriques de raisons respectives $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$.

4. (a) Démontrer la conjecture de la question 3(b).
(b) Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n.
(c) Justifier les réponses données à la question 2 et déterminer la valeur exacte de la limite des suites (a_n) et (b_n).

Réponses
(a) On calcule

$$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = (2a_n + b_n + a_n + 2b_n)/4 = (3a_n + 3b_n)/4$$

Donc $u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n$ donc

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0 = 80\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ v_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{2a_n + b_n - a_n - 2b_n}{4} = \frac{a_n - b_n}{4} \end{aligned}$$

D'où $v_{n+1} = \frac{2}{4} v_n$ finalement

$$v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n v_0 = 40\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

(b) on a $b_n = (u_n + v_n)/2$ et $a_n = (u_n - v_n)/2$ Donc

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n 40 - \left(\frac{1}{4}\right)^n 20$$

$$b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n 40 + \left(\frac{1}{4}\right)^n 20$$

Pour vérifier on tape par exemple :
`(3/4)^2*40-(1/4)^2*20.` et on obtient 21.25
`(3/4)^2*40+(1/4)^2*20.` et on obtient 23.75

IV - Sujet 010

Un pion est placé sur la case de départ :

				Départ				

Le lancer d'une pièce bien équilibrée détermine le déplacement du pion.
• PILE, le pion se déplace vers la droite
• FACE, le pion se déplace vers la gauche
Un trajet est une succession de 4 déplacements. On s'intéresse à l'événement

A "le pion est revenu à la case départ après 4 déplacements".

À chaque lancer, on associe le réel +1 si le résultat est PILE et -1 si le résultat est FACE.

1. Simuler à l'aide du tableur de 200 à 2000 trajets du pion et estimer la fréquence de l'événement A. Compléter le tableau suivant :

Nombre d'essais	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
Fréquence de A										

Appeler l'examinateur pour vérifier le tableau obtenu.

Réponses

On remplit les 4 premières cases d'une ligne du tableur avec `=rand(2)`. Pour avoir l'arrivée du pion, on écrit un petit programme qui a pour arguments 4 nombre de {0,1} et qui renvoie la case d'arrivée.
On tape dans un ligne de commandes :

```
trajet4(a,b,c,d):={
 if (a==0) a:=-1;
 if (b==0) b:=-1;
 if (c==0) c:=-1;
 if (d==0) d:=-1;
 return a+b+c+d;
}:;
```

On peut aussi utiliser la définition suivante moins claire mais plus efficace

```
trajet4(a,b,c,d):=2*(a+b+c+d)-4
```

On remplit alors la case `E0` avec `trajet4(A0,B0,C0,D0)` puis, on sélectionne les cases `A0,B0,C0,D0,E0` et on recopie vers le bas.
Pour connaitre les fréquences de l'événement A selon le nombre de lancers, on tape

– dans la case `F0`, `=(count_eq(0,(E0) :(E199)))/200`,
– dans la case `F1`, `=(count_eq(0,(E0) :(E399)))/400` etc...
– dans la case `F9`, `=(count_eq(0,(E0) :(E1999)))/2000`.
Puis pour pouvoir avoir dans une liste la colonne `F` (lignes 0 à 9), on tape dans `G0` `=(F :=F0 :F9)`. La liste est aussi stockée `F` On obtient :

Table Edit Maths | reeval | val | Save | <No filename>

F9 | =(count_eq(0,(E0):(E1999)))/2000

* Spreadsheet <> R2001C10 auto down fill

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	1	0	0	0	-2	79/200	[79/200,29	0	0
1	1	0	0	0	-2	29/80	0	0	0
2	1	0	1	0	0	28/75	0	0	0
3	0	1	0	1	0	303/800	0	0	0
4	0	1	0	0	-2	179/500	0	0	0
5	0	1	1	1	2	221/600	0	0	0
6	0	0	1	1	0	529/1400	0	0	0
7	1	1	1	1	4	611/1600	0	0	0
8	0	1	1	1	2	337/900	0	0	0
9	0	0	1	1	0	187/500	0	0	0
10	1	0	0	0	-2	0	0	0	0
11	1	1	0	0	0	0	0	0	0
12	1	0	0	0	-2	0	0	0	0
13	0	0	1	1	0	0	0	0	0
14	0	0	0	1	-2	0	0	0	0
15	1	0	1	1	2	0	0	0	0
16	1	1	1	1	4	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

On tape dans une ligne de commande `F`, on obtient

`[79/200,29/80,28/75,303/800,179/500,221/600,529/1400,611/1600,337/900,187/500]`

On tape dans une ligne de commande `evalf(F)`, on obtient :
`[0.395,0.3625,0.373333333333,0.37875,0.358,0.368333333333,`
`0.377857142857,0.381875,0.374444444444,0.374]`
On remplit alors le tableau :

Nombre d'essais	200	400	600	800	1000
Fréquence de A	0.395	0.3625	0.37333	0.37875	0.358

Nombre d'essais	1200	1400	1600	1800	2000
Fréquence de A	0.36833	0.377857	0.381875	,0.37444	0.374

2. **Partie démonstration**

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des quatre réels.

(a) En précisant la méthode choisie, calculer les valeurs possibles de X et le nombre de trajets possibles.

Appeler l'examinateur pour contrôler la réponse et lui indiquer la démarche prévue à la question suivante

Réponses

Pour avoir le nombre N de trajets possibles, on cherche le nombre de trajets différents quand on a :
– 0 fois FACE alors N = 1 et X=-4,
– 1 fois FACE alors N =comb(4, 1) = 4 et X=-2,
– 2 fois FACE alors N =comb(4, 2) = 6 et X=0,
– 3 fois FACE alors N =comb(4, 3) = 4 et X=2,
– 4 fois FACE alors N =comb(4, 4) = 1 et X=4,
Donc le nombre de trajets possibles est 16. On peut dire aussi plus simplement qu'à chaque lancer il y a 2 trajets possibles et donc au bout de 4 lancers il y a $2^4 = 16$ trajets possibles.

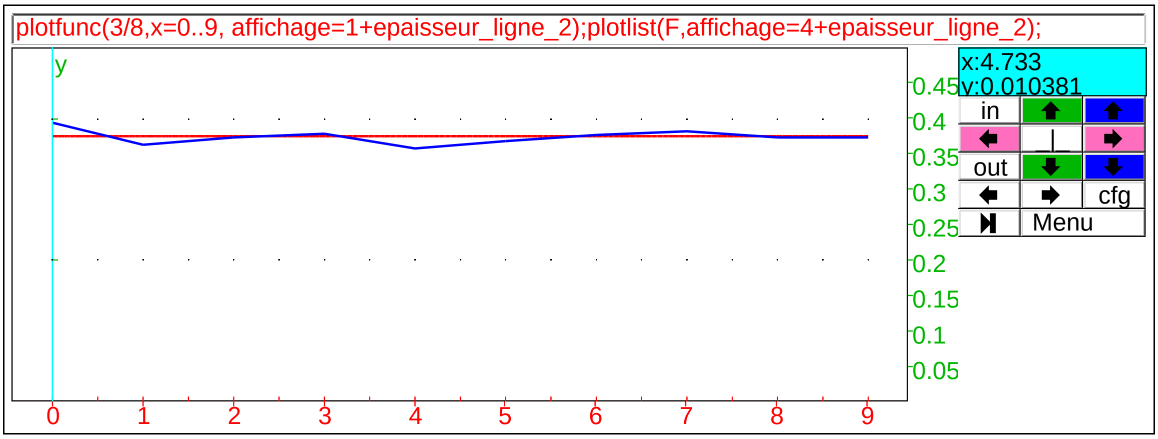
(b) Calculer la probabilité de l'événement A à l'aide d'un schéma de Bernoulli et comparer avec l'estimation obtenue.

Réponses

On cherche P(A) = P(X = 0) = $\frac{\text{comb}(4,2)}{2^4} = \frac{3}{8}$ = 0.375. On trace la courbe des fréquences obtenue, on tape dans une ligne de commandes :

```
plotfunc(3/8,x=0..9, affichage=1+epaisseur_ligne_2);
     plotlist(F,affichage=4+epaisseur_ligne_2);
```

On obtient :



Remarques On peut bien sûr faire ce graphe directement depuis le tableur, puisqu'au tableur est associé un graphe (à l'aide du menu `Edit` du tableur, régler la configuration pour faire apparaitre ce graphe (`Edit->Configuration-`

Donc ce cas on tape :

dans `G0`, `=plotlist(F0 :F9)` et

dans `G1`, `=droite(y=3/8)`.

On peut aussi ne pas utiliser le tableur et faire cet exercice à l'aide de petits programmes. On tape :

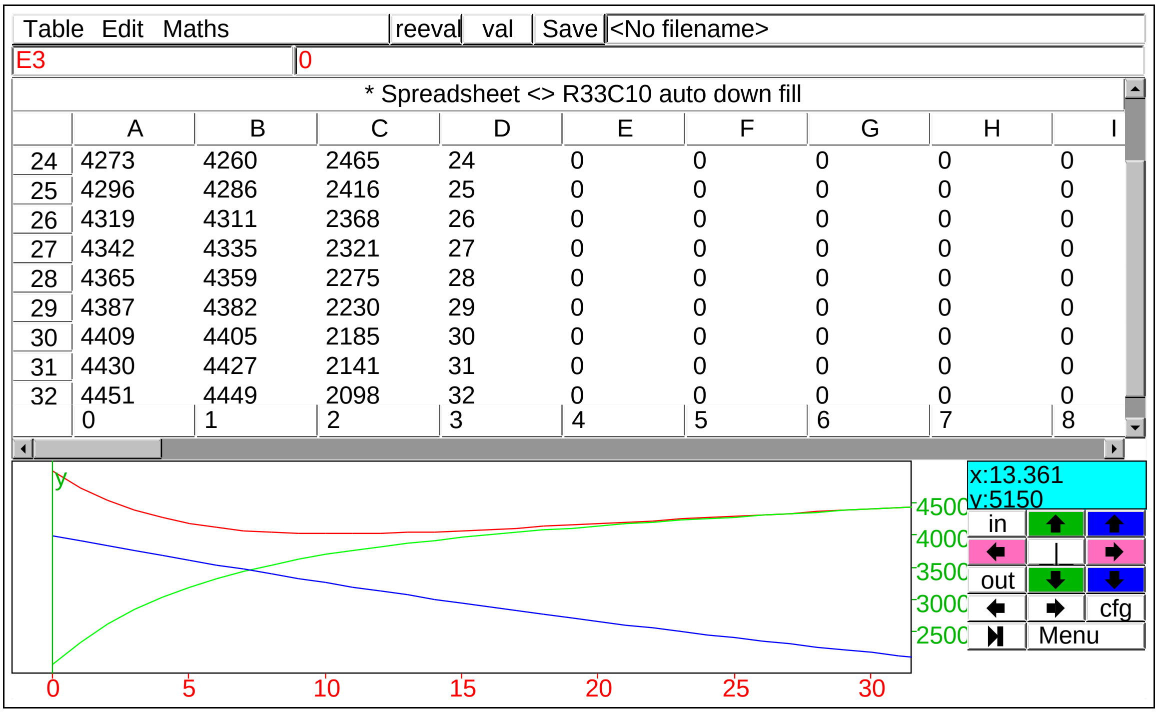
```
trajet():={
 local k,res;
 res:=0;
 for (k:=1;k<=4;k++){
  if (rand(2)) res++; else res--;
 }
 return res;
}:;

simulation(p):={
 local k,n,res;
 n:=0;
 for (k:=1;k<=p;k++) {
  if (trajet()==0) n++;
 }
 return n/p,evalf(n/p);
}:;
```

Puis, on tape `simulation(2000)`. On obtient par exemple : `769/2000,0.3845`

V - Sujet 013

L'objet de ce travail est l'étude de flux de populations entre trois zones géographiques : une ville notee A, une zone périphérique notée B et une zone de campagne notée C.
Pour modéliser les flux de population, on fait les hypothèses suivantes :
– La population totale des trois zones reste constante.
– Chaque année la zone A perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone B et 1% de la population de la zone C.
– Chaque année la zone B perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone A et 1% de la population de la zone C.
– Chaque année la zone C perd 2% de sa population.
Au premier janvier 2008, la zone A comptait 5 000 habitants, la zone B en comptait 2 000 et la zone C en comptait 4 000.
On désigne par a_n , b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des zones A, B et C au premier janvier de l'annee (2008 + n). On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n , b_n et c_n peuvent ne pas être entiers.

1. On souhaite décrire, avec le modèle ci-dessus, l'évolution des trois populations.
   (a) Représenter graphiquement, à l'aide du tableur, ou d'une calculatrice, les suites (a_n), (b_n) et (c_n).
   (b) Conjecturer le sens de variation et la convergence des suites (a_n), (b_n) et (c_n).
   Appeler l'examinateur pour vérification des résultats obtenus et des conjectures.
   Réponses
   On met `5000` dans `A0`, on met `2000` dans `B0` et on met `4000` dans `C0`. Puis, on tape :
   – dans `A1`, `=A0*0.9+B0*0.1+C0*0.01`
   – dans `B1`, `=B0*0.9+A0*0.1+C0*0.01`
   – dans `C1`, `=C0*0.98`
   On sélectionne `A1, B1,C1` et on recopie ces formules vers le bas. On tape
   – dans `E0`, `=plotlist((A0) :(A32),affichage=1)`
   – dans `E1`, `=plotlist((B0) :(B32),affichage=2)`
   – dans `E2`, `=plotlist((C0) :(C32),affichage=4)`
   On obtient :



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
24	4273	4260	2465	24	0	0	0	0	0
25	4296	4286	2416	25	0	0	0	0	0
26	4319	4311	2368	26	0	0	0	0	0
27	4342	4335	2321	27	0	0	0	0	0
28	4365	4359	2275	28	0	0	0	0	0
29	4387	4382	2230	29	0	0	0	0	0
30	4409	4405	2185	30	0	0	0	0	0
31	4430	4427	2141	31	0	0	0	0	0
32	4451	4449	2098	32	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

2. Pour chaque année $(2008+n)$, soit d_n la différence de population entre les zones A et B.
   Conjecturer la nature de la suite (d_n).
   Appeler l'examinateur pour une vérification et lui indiquer les méthodes envisagées pour les démonstrations qui suivent.
   Réponses
   On conjecture que la suite (d_n) est décroissante et converge vers 0 (ce qui ne semble pas vrai lorsqu'on arrondit avec `round` !).
3. On se propose de calculer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).
   (a) Déterminer l'expression de c_n et de d_n en fonction de n.
   (b) En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.
   (c) Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).
   Réponses
   On a $c_{n+1}=\frac{98}{100}c_n$, donc (c_n) est une suite géométrique de raison $\frac{98}{100}$ et on a :

$$c_n=\left(\frac{98}{100}\right)^n 4000$$

On a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{9}{10}a_n+\frac{1}{10}b_n+\frac{1}{100}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{10}a_n+\frac{9}{10}b_n+\frac{1}{100}c_n \end{aligned}$$

donc

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{8}{10}(a_n-b_n)$$

donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{8}{10}$ et on a :

$$d_n=\left(\frac{8}{10}\right)^n 3000$$

La somme $a_n + b_n + c_n$ est constante en effet

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + \frac{2}{100} c_n + \frac{98}{100} c_n = a_n + b_n + c_n$$

La somme $a_n + b_n + c_n$ est constante et égale à $a_0 + b_0 + c_0 = 11000$ donc :

$$s_n = a_n + b_n = 11000 - \left(\frac{98}{100}\right)^n 4000$$

On a ainsi

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & (s_n + d_n)/2 = 5500 - \left(\frac{98}{100}\right)^n 2000 + \left(\frac{8}{10}\right)^n 1500 \\ b_n & = & (s_n - d_n)/2 = 5500 - \left(\frac{98}{100}\right)^n 2000 - \left(\frac{8}{10}\right)^n 1500 \end{array}$$

Quand n tend vers l'infini d_n tend vers 0 et s_n tend vers 11000 donc a_n tend vers 5500 et b_n tend aussi vers 5500.

VI - Sujet 014

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C est la courbe représentative de la fonction exponentielle et le point B a pour coordonnées (2 ; -1).
On admet que la distance BM admet un minimum quand M décrit C. Ce minimum est appelé distance du point B à la courbe C.
Le but de l'exercice est de trouver la distance du point B à la courbe C.

1. Réaliser à l'aide d'un logiciel une figure dynamique correspondant à cette situation.
   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.
   (a) M est un point quelconque de la courbe C. Faire une conjecture sur la position du point M pour laquelle la distance BM semble minimale.
   On appelle ce point M_0.
   (b) Tracer la droite d perpendiculaire en M_0 à la droite (BM_0).
   Quelle semble être la position particulière de la droite d ?
   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures émises et lui indiquer la ou les méthodes de contrôle prévues à la question (c).
   (c) Utiliser le logiciel pour contrôler les conjectures et, éventuellement, les rectifier.
   Réponses
   Avec `Xcas` on calcule la longueur BM en fonction du paramàtre `a` et on trace en représentation graphique G (en rouge) de cette longueur qui est représentée par la longueur OA1. Pour cela, on ouvre un niveau de géométrie (menu Edit->Ajouter->Graphe et geo 2d), on tape dans le premier niveau

```
C :=plotfunc(exp(x));
```

   puis on crée un curseur (menu de la figure Edit->Ajouter parametre) ce qui renvoie une commande du type

```
assume(a=[0.7,-5,5,0.1]);
```

   On ajoute alors le point B

```
B :=point(-2,0)
```

   Puis on fait varier M sur la courbe C en fonction du curseur a, on calcule la longueur BM

```
M :=element(C,a)
l :=normal(longueur(B,M))
```

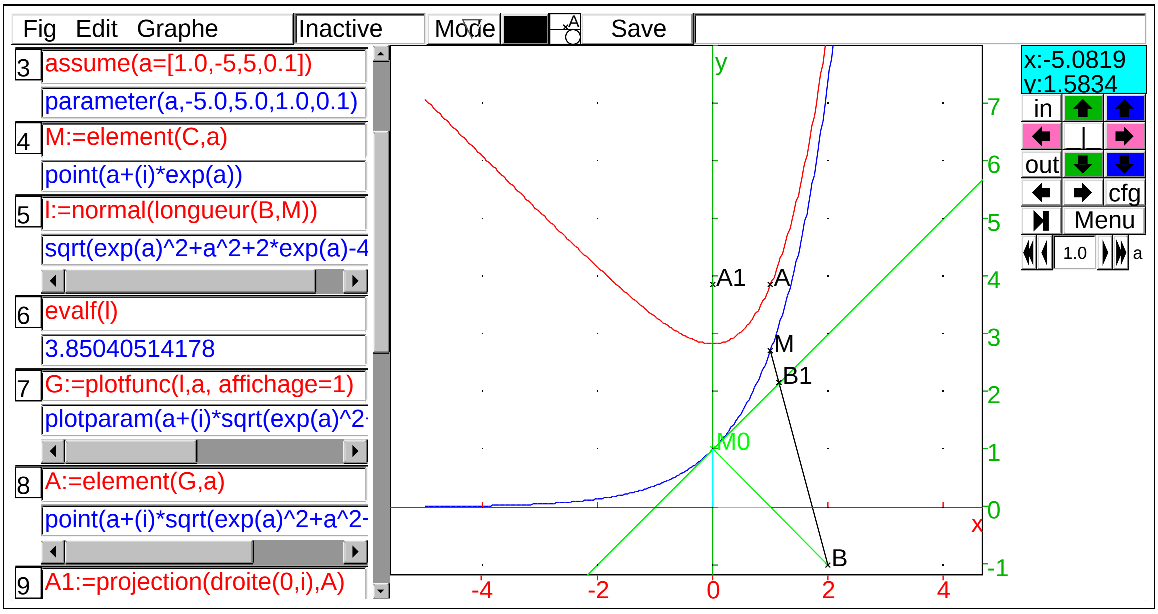
On remarque que l est calculé en fonction de a pour avoir sa valeur numérique, il faut demander une valeur approchée

```
evalf(l)
```

On peut maintenant faire varier a et observer quand la valeur numérique de la longueur est minimale. On peut aussi représenter la courbe représentative de G en fonction de a.

```
G :=plotfunc(l,a, affichage=1);
A :=element(G,a);
A1 :=projection(droite(0,i),A);
```

On obtient :



On observe que

(a) M0 semple être le point d'affixe i.

(b) la droite d semble être tangente à la courbe C en M0 En effet, on tape `tangente(C,M0, affichage=2)` on voit que cette droite a la même équation que d, c'est la droite $(y = (x+1))$.

2. On se propose de déterminer la valeur exacte de la distance du point B à la courbe C.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les contrôles faits et lui proposer une méthode permettant à la fois de déterminer le point M_0 *et la distance du point* B *à la courbe* C.

   (a) Déterminer, par le calcul, la position du point M_0.

   (b) Quelle est la valeur exacte de la distance du point B à la courbe C ?

   Réponses

   On va montrer que le point B se projette en M0 sur la tangente dt à C en M0. On va montrer que cette tangente dt partage le plan en deux demi-plans : dans l'un il y a la courbe C, dans l'autre le point B. Soit B1 l'intersection de BM et de d.

   On aura donc $\text{BM0} \leq \text{BB1} \leq \text{BM}$.

3. Vérifier, par le calcul, la conjecture formulée au 1.(b).

   Réponses

   Soit M_0 le point de coordonnées $(0, 1)$.

   On calcule le carré de la longueur BM pour éviter des racines carrées. On a

$$\text{BM}^2 = (x-2)^2 + (\exp(x)+1)^2$$

Posons $h(x) = (x-2)^2 + (\exp(x)+1)^2$. On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2(x-2) + 2\exp(x)(\exp(x)+1) \\ h''(x) &= 2 + 2\exp(x)(\exp(x)+1) + 2\exp(x)^2 = 4\exp(x)^2 + 2\exp(x) + 2 \end{aligned}$$

Ou on tape

```
h(x) :=(x-2)^2+(exp(x)+1)^2;
normal(diff(diff(h(x))))
```

On obtient `4* exp(x)^2+2*exp(x)+2`. Donc h' est croissante. De plus $h'(0) = 0$, donc h admet un minimum en $x = 0$. On a $\mathrm{BM} = l(x) = \sqrt{h(x)}$ donc l admet aussi un minimum en $x = 0$. Finalement la distance de B à la courbe C est $\sqrt{h(0)} = 2\sqrt{2}$.

Autre méthode :

La tangente dt à la courbe C au point M0 a pour pente $\exp(0) = 1$ donc a pour équation : $y = x + 1$.

La droite (BM_0) a pour équation : $y = -x + 1$

La droite d perpendiculaire en M_0 à la droite (BM_0) est donc de pente 1 et a pour équation : $y = x + 1$ donc dt et d sont confondues.

Il reste à montrer que pour tout réel x on a : $g(x) = \exp(x) - x - 1 \geq 0$. On a $g'(x) = \exp(x) - 1 \geq 0$. On fait le tableau de variations : $g'(x) < 0$ pour $x < 0$, $g'(x) = 0$ pour $x = 0$, $g'(x) > 0$ pour $x > 0$. Donc $g(x)$ admet un minimum en $x = 0$ et $g(x) \geq g(0) = 0$.

On calcule alors $\mathrm{BM0} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

VII - Sujet 020

On considère le carré direct ABCD du plan orienté tel que $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = \dfrac{\pi}{2}$. On appelle O le centre du carré. Un point M décrit le segment [DC]. La perpendiculaire à la droite (AM) passant par A coupe (BC) en N. On appelle I le milieu de [MN]. On se propose de déterminer le lieu des points I lorsque M décrit le segment [DC].

1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique.

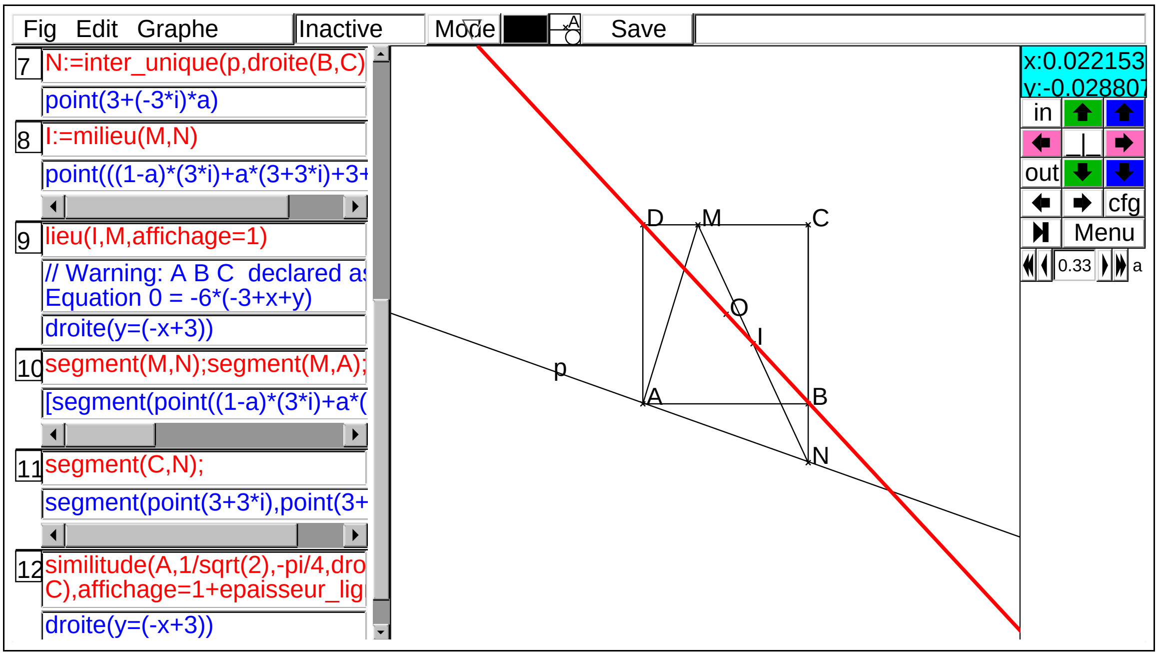
   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

   Réponses

   On choisit par exemple : `A :=point(0);B :=point(3);`. On tape et on obtient :

   ```
   carre(A,B,C,D);
   O:=milieu(A,C);
   assume(a:=[0.33,0,1,0.01]);
   M:=element(droite(D,C),a);
   p:=perpendiculaire(A,droite(A,M));
   N:=inter_unique(p,droite(B,C));
   I:=milieu(M,N);
   lieu(I,M,affichage=1+epaisseur_ligne_2);
   segment(M,N);segment(M,A);;
   segment(C,N);;
   ```

   On obtient la figure suivante :



2. Mettre en évidence avec le logiciel la nature du triangle AMN.

   Réponses

   On tape :

   `normal(longueur2(A,M));normal(longueur2(A,N));`

   On obtient `9+9*a^2,9+9*a^2`.

   On tape `est_rectangle(N,M,A);` et on obtient 3 ce qui signifie que le triangle MNA est rectangle en A.

3. Faire afficher le lieu des points I lorsque M décrit le segment [DC].

   Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures et pour lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

   Réponses

   On tape : `lieu(I,M,affichage=1)` et on obtient en rouge la droite (BD).

4. **Partie démonstration**

   Démontrer que le triangle AMN est rectangle isocèle (on pourra utiliser une rotation de centre A).

   Réponses

   la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ transforme D en B, la droite (AD) en la droite (AB) et la droite (AM) en la droite p qui est la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A.

   Donc, la droite (DC) qui est perpendiculaire à la droite (AD), est transformée en la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par B c'est à dire la droite (BC)

   M qui est l'intersection de (DC) et de (AM) est donc transformé en N qui est l'intersection de (BC) et de p.

   Donc le triangle direct ANM est rectangle isocèle en A.

5. En déduire la nature du triangle AIM ; établir que le point I est l'image de M par une similitude S de centre A dont on précisera l'angle et le rapport.

   Réponses

   Le triangle ANM est isocèle en A, donc la médiane AI est aussi une hauteur donc le triangle AIM est rectangle en I.

   I est le milieu de l'hypoténuse du triangle ANM donc le triangle AIM est isocèle en I. Donc le triangle direct AIM est rectangle isocèle en I.

   Donc I se déduit de M par une simimitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{-\pi}{4}$

6. Déterminer S(D) et S(C) puis conclure sur le lieu de points cherché.

   Réponses

   On a : S(D) = O et S(C) = B.

Puisque M se déplace sur la droite DC et S(M) = I, le lieu de I est la droite S(D)S(C) transformée par S de la droite (DC). Donc le lieu de I est la droite (OB). On tape

```
similitude(A,1/sqrt(2),-pi/4,droite(D,C),affichage=1+epaisseur_ligne_3)
```

On obtient la figure du début.

VIII - Sujet 021

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABB' tel que : $(\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{2}$. Soit M un point variable de la droite (BB') et M' l'image de A dans la rotation de centre M et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
On note I le milieu de $[BB']$ et J le milieu de $[MM']$.
On cherche à déteminer le lieu du point J lorsque M décrit la droite (BB').

1. (a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
Appeler l'examinateur pour vérification de la figure.
(b) Visualiser le lieu du point J quand M décrit la droite (BB'). Quelle conjecture peut-on émettre ?
(c) Que peut-on conjecturer à propos des triangles ABI et AMJ ?

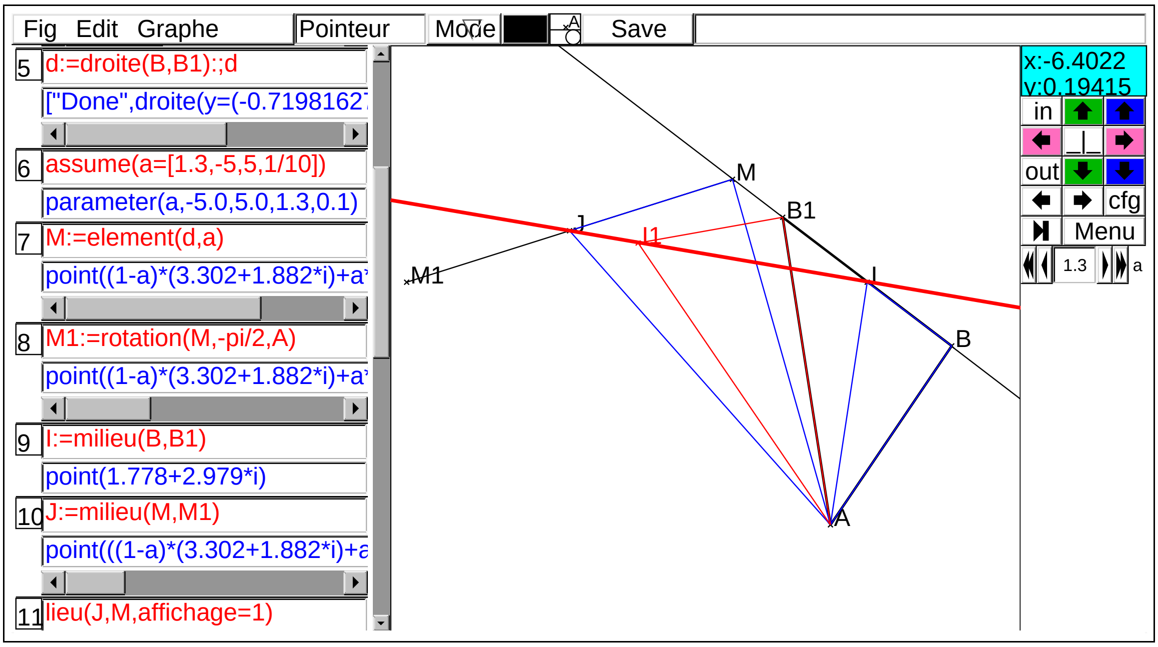
Appeler l'examinateur pour vérification des conjectures.

Réponses

(a) On tape :

```
B1:=rotation(B,-pi/2,A);
triangle(A,B,B1,affichage=epaisseur_ligne_2);
d:=droite(B,B1):;d;
assume(a=[1.3,-5,5,1/10]);
M:=element(d,a);
M1:=rotation(M,-pi/2,A);
I:=milieu(B,B1);
J:=milieu(M,M1);
lieu(J,M,affichage=1);
```

On obtient :



(b) On conjecture que le lieu de J est une droite qui passe par I

(c) On conjecture que les triangles ABI et AMJ sont semblables.

2. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en I.

   (a) Déterminer l'image du point M par la similitude S.
   Appeler l'examinateur pour faire le point et lui indiquer la méthode prévue pour la résolution de la question 2.(b).

   (b) En déduire le lieu du point J quand M décrit la droite (BB1).

Réponses

(a) Les triangles ABI et AMJ sont semblables car
   – ils ont un angle droit en B et en M
   – $\frac{AB}{AM} = \frac{BI}{MJ}$ car $\frac{AB}{BI} = \frac{AM}{MJ} = 2$
   La similitude S transforme donc M en J.

(b) Donc le lieu de J est l'image de la droite (BB1) par la similitude S : c'est une droite qui passe par I et par I1 l'image de B1 par cette similitude.
   La similitude S est de rapport $\sqrt{5}/2$ et d'angle atan$(1/2)$. On tape :

```
I1 :=similitude(A,sqrt(5)/2,atan(1/2),B1,affichage=1)
similitude(A,sqrt(5)/2,atan(1/2),d,affichage=1+epaisseur_ligne_3)
```

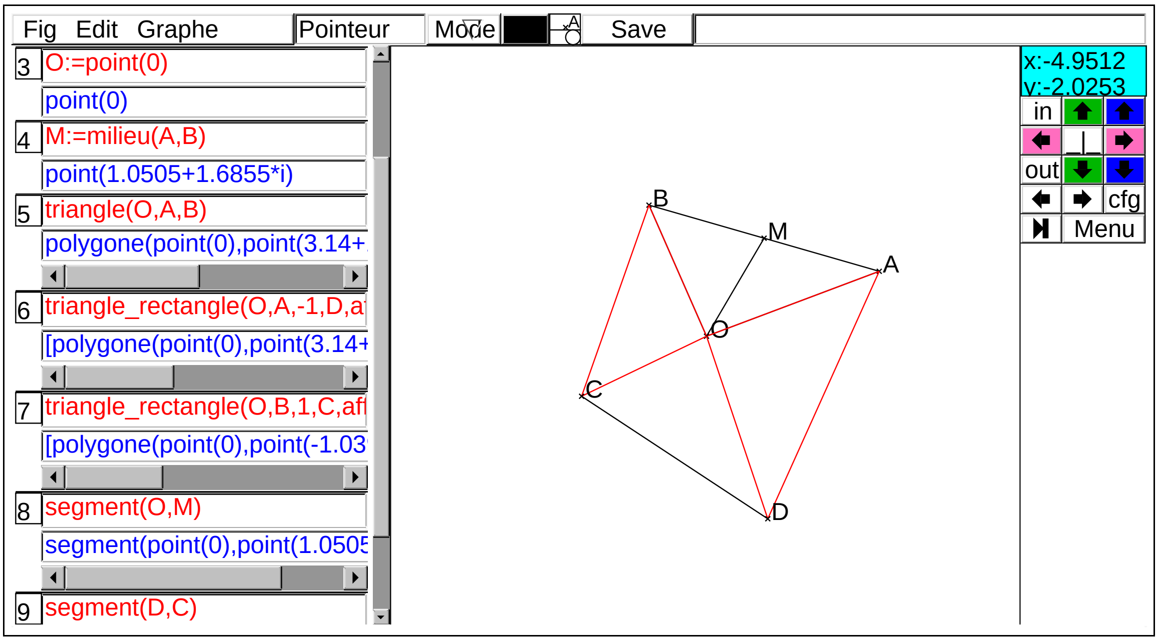
IX - Sujet 026

Dans le plan orienté, on définit le triangle direct OAB et on note M le milieu du segment [AB]. On construit les triangles AOD et OBC directs, rectangles et isocèles en O.
L'objet du problème est d'étudier les longueurs et les positions relatives des segments [OM] et [DC].

1. Construire la figure décrite précédemment à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
   Appeler l'examinateur pour valider la construction.

   Réponses
   On clique sur trois points `A,B` puis on tape :

```
O:=point(0);
M:=milieu(A,B);
triangle(O,A,B);
triangle_rectangle(O,A,-1,D,affichage=1);
triangle_rectangle(O,B,1,C,affichage=1);
segment(O,M);
segment(D,C);
```



2. En modifiant le triangle OAB, émettre une conjecture concernant les longueurs OM et DC et une autre au sujet des positions relatives des droites (OM) et (DC).

   Appeler l'examinateur pour valider les conjectures et exposer la démarche envisagée pour la preuve.

   Réponses

   Il semble que DC = 2OM et que DC et OM sont perpendiculaires.
   On tape `2*longueur(O,M)` et on obtient `3.97213318004`.
   On tape `longueur(D,C)` et on obtient `3.97213318004`.
   On tape `est_perpendiculaire(droite(O,M),droite(D,C))` et on obtient `1`.

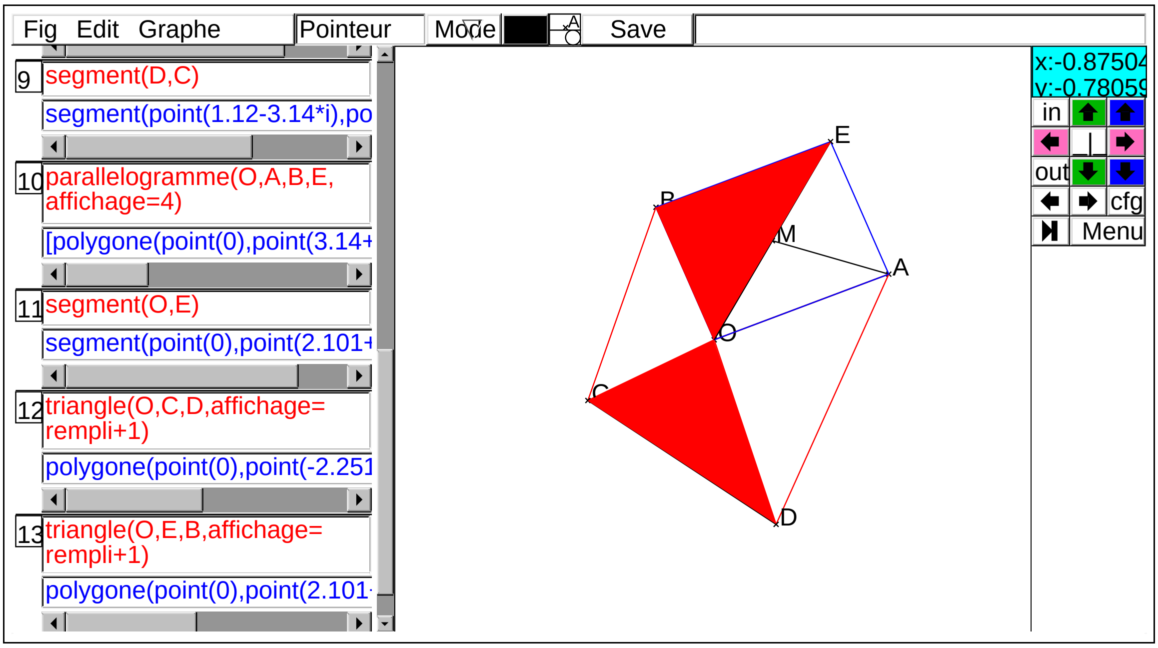
3. **Partie démonstration**

   Proposer une démonstration des conjectures faites.

   Réponses

   Démonstration avec les complexes :
   On appelle a et b les modules des affixes za et zb de A et B et ta et tb leurs arguments :
   `za :=a*exp(i*ta)`
   `zb :=b*exp(i*tb)`
   Puis on calcule les affixes zm, zc, zd de M, A, B.
   `zm :=(za+zb)/2`
   `zc :=b*exp(i*(tb+pi/2))` qui renvoie `b*(i)*exp((i)*tb)`
   `zd :=a*exp(i*(ta-pi/2))` qui renvoie `a*(-i)*exp((i)*ta)`
   Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{OM}$ ont pour affixe :
   `normal(zc-zd)` qui renvoie `(i)*b*exp((i)*tb)+(i)*a*exp((i)*ta)`
   `zm :=(za+zb)/2` qui renvoie `(a*exp((i)*ta)+b*exp((i)*tb))/2`
   On prouve les deux conjectures en même temps, en tapant :
   `normal(zc-zd-2*i*zm)` qui renvoie `0`. On a donc DC = 2OM et DC et OM sont perpendiculaires.

Démonstration en géométrie pure :



On trace le parallélogramme OAEB. (on tape `parallelogramme(O,A,B,E,affichage=4)`)
M est le centre de ce parallélogramme : M est le point de concours des diagonales qui se coupent en leur milieu.
Les triangles BOE et OCD sont egaux en effet :

– BO = OC,
– BE = OA = OD,
– $\widehat{OBE} = \pi - \widehat{AOB}$ et $\widehat{COD} = \pi - \widehat{AOB}$

On sait que OC et BO sont perpendiculaires, que OD et OA sont perpendiculaires donc

il existe une rotation qui transforme B en O, O en C et E en D.

Donc DC = OE = 2OM et DC et OM sont perpendiculaires.

X - Sujet 028

Étude, selon les valeurs de m réel donné, du nombre de solutions, pour $x \in [-5;5]$, de l'équation

$$(E) \quad -x^2 + 2x - 1 + me^{-x} = 0$$

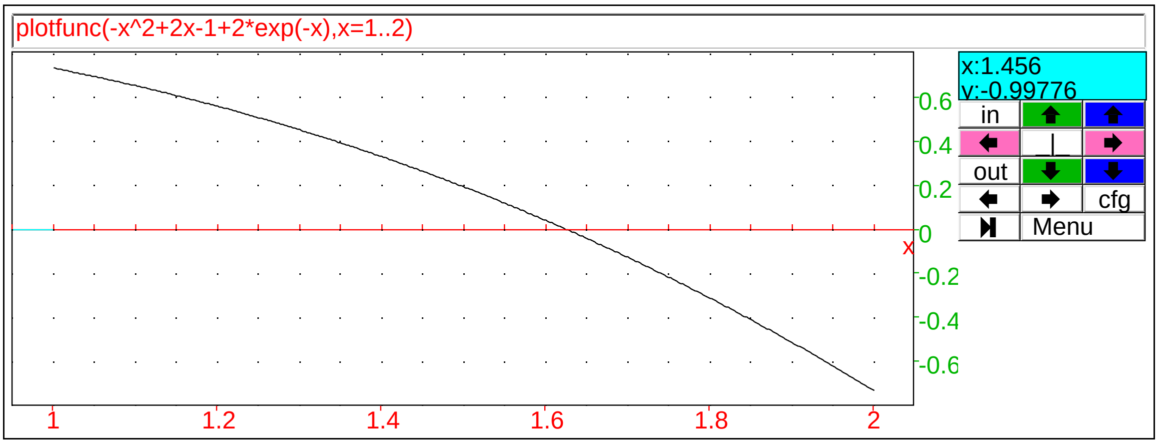
1. On pose $m = 2$. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de l'unique solution de (E), à l'aide d'un grapheur.
   Réponses
   On trace le graphe de (E) pour $x \in [-5;5]$, on tape :

   ```
   plotfunc(-x^2+2x-1+2*exp(-x),x=-5..5)
   ```

   On voit que la solution de (E) pour $x \in [-5;5]$ se trouve entre 1 et 2 donc on tape :

   ```
   plotfunc(-x^2+2x-1+2*exp(-x),x=1..2)
   ```

   On obtient :



Donc, si a est l'unique solutionde (E) dans l'intervalle $[-5;5]$ on a :

$$1.6 < a < 1;65$$

ce qui donne un encadrement d'amplitude 510^{-2}

2. Soit f la fonction définie pour $x \in [-5;5]$ par :

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)\exp(x)$$

À l'aide d'un grapheur, tracer le graphe de f pour $x \in [-5;5]$ et émettre une conjecture sur le nombre de solutions de $f(x) = m$ pour $x \in [-5;5]$, en fonction des valeurs de m.

Réponses

On définit la fonction f :

```
f(x) :=(x^2-2x+1)*exp(x);
```

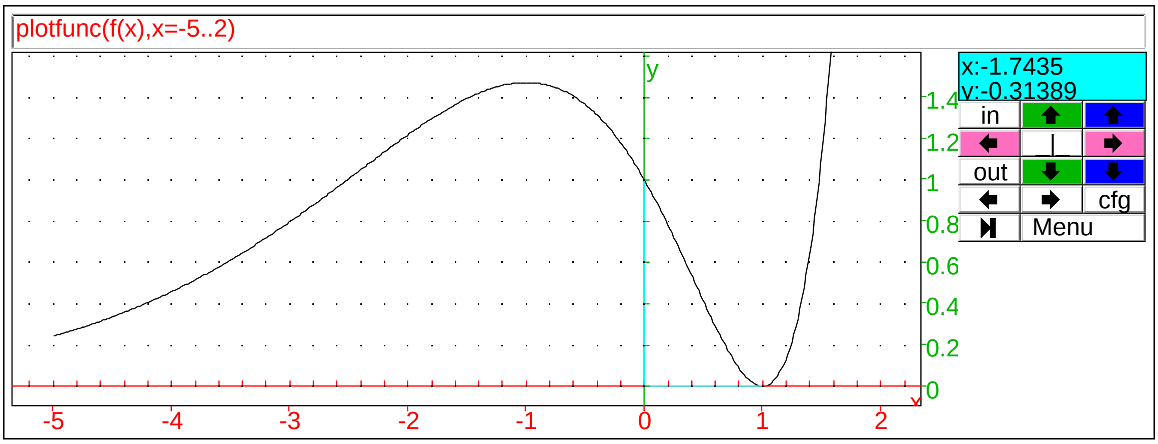
On trace le graphe de $f(x)$ pour $x \in [-5;5]$, on tape :

```
plotfunc(f(x),x=-5..5)
```

On voit bien le graphe de $f(x)$ pour $x \in [2;5]$ mais il faut changer d'échelle pour $-5 < x < 2$, donc on tape :

```
plotfunc(f(x),x=-5..2)
```

On obtient :



Il semble que $f(-1) = 4\exp(-1)$ est le maximum de f sur $[-4;1]$ et que $f(1) = 0$ est le minimum de f sur $[-4;1]$. On tape :

```
f(-1),f(-1.)
```

On obtient l'image de -1 et sa valeur approchée :

```
4*exp(-1),1.47151776469
```

On émet donc la conjecture suivante, en notant n le nombre de solutions de $f(x) = m$ pour $x \in [-5;5]$:
- si $m < 0$ alors $n = 0$,
- si $m = 0$ alors $n = 1$ ($x = 1$ est la solution),
- si $0 < m < 4\exp(-1) \approx 1.47151776469$ alors $n = 3$,
- si $m = 4\exp(-1) \approx 1.47151776469$ alors $n = 2$ ($x = -1$ est une solution ainsi que $x = b$ avec $1.5 < b < 1.6$),
- si $4\exp(-1) < m$ alors $n = 1$,

3. Démontrer que l'équation (E) et l'équation $f(x) = m$ ont le même ensemble de solutions dans l'intervalle $[-5;5]$.
Réponses
On tape :

```
E :=-x^2+2x-1+m*exp(-x);simplify(E*exp(x))
```

On obtient :

```
-x^2+2*x-1+m*exp(-x),-exp(x)+2*x*exp(x)-x^2*exp(x)+m
```

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{E} * \mathrm{e}^x = -f(x) + m$$

On en déduit que $\mathrm{E} = 0$ et $f(x) = m$ ont le même ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ donc aussi dans l'intervalle $[-5;5]$.

4. Répondre au problème posé
Réponses
On a $f(x) = (x-1)^2 * \mathrm{e}^x$ donc $f(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. On va chercher les variations de f dans l'intervalle $[-5;5]$. On tape :

```
F :=factor(derive(f(x)))
```

On obtient :

```
(1+x)*(-1+x)*exp(x)
```

Donc $f'(x)$ a le signe de $(1+x)(-1+x)$. On tape :

```
solve(F>0,x)
```

On obtient :

```
[x<-1,x>1]
```

Donc f est croissante dans l'intervalle $[-5;-1]$, puis décroissante dans l'intervalle $[-1;1]$, puis croissante dans l'intervalle $[1;5]$. La conjecture est donc démontrée.

XI - Sujet 029

Dans l'espace rapporté à un rep're orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(0, 6, 0), B(0, 0, 8), C(10, 0, 8). M est un point appartenant au segment [OB]. Le plan (PP) passant par M et orthogonal à la droite (OB) coupe la droite (AC) en P.

Partie expérimentale.

1. En utilisant un logiciel de géométrie, construire une figure traduisant l'énoncé.
Appeler l'examinateur pour la vérification de la construction.
Réponses
On ouvre un écran de géométrie 3d et on choisit comme configuration : x, y, z compris ente 0 et 11 et on décoche `Montrer les axes`. On tape :

```
O :=point(0,0,0);
A :=point(0,6,0);
B :=point(0,0,8);
C :=point(10,0,8);
```

Pour pouvoir faire bouger le point M avec un curseur, on crée un paramètre (menu Edit de la figure) que l'on nomme t avec comme valeurs extrêmes 0 et 1, puis on tape

```
M :=element(segment(O,B),t);
```

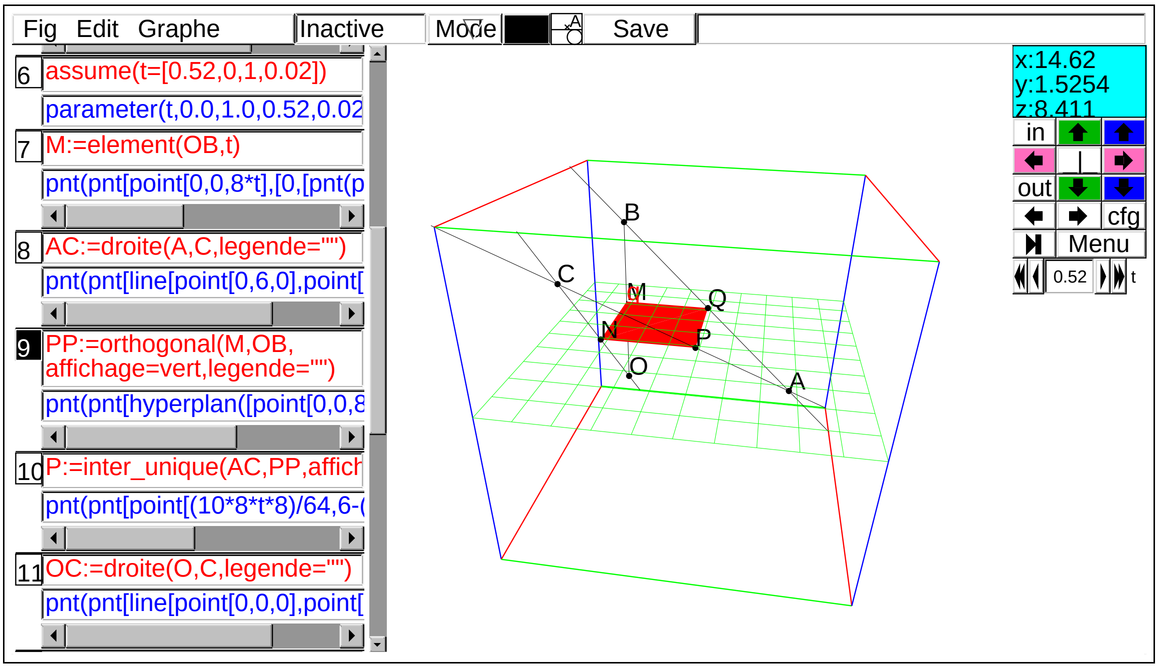
On tape pour avoir le plan PP sans que son nom soit affiché :

```
PP :=orthogonal(M,droite(O,B),legende="")
```

Puis pour avoir le point P :

```
P :=inter_unique(PP,droite(A,C))
```

On obtient la figure :



2. On note respectivement N et Q les points d'intersection du plan (PP) avec les droites (OC) et (AB) et l'on admet que le quadrilatère MNPQ est un rectangle. En déplaçant le point M, émettre une conjecture quant à la position de ce point rendant maximale l'aire du rectangle.
   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.
   Réponses
   On tape pour avoir les points N et Q :

```
N :=inter_unique(PP,droite(O,C));
Q :=inter_unique(PP,droite(A,B));
```

   On tape pour avoir le polygone MNPQ rempli de rouge :

```
q :=polygone(M,N,P,Q, affichage=rempli+1);
```

   En faisant bouger le point M, on conjecture que l'aire est maximum lorsque M est le milieu de OB (pour $t = 1/2$)

Partie démonstration avec `Xcas`

On note $z = \text{OM}$.

1. Exprimer en fonction de z les longueurs MN et MQ.
   Pour savoir si le polygone MNPQ est un rectangle, on tape :

```
est_perpendiculaire(droite(M,N),droite(P,N))
```

On obtient :

```
1
```

```
est_perpendiculaire(droite(M,Q),droite(P,Q))
```

On obtient :

```
1
```

donc MN ⊥ PN et donc MNPQ est un rectangle puisque c'est un quadrilatère plan qui a 3 angles droits (l'angle M par hypothèse et les angles N et Q démonstration faite par Xcas).
On a $t = z =$ OM. On tape :

```
S :=simplifier(aire(q))
```

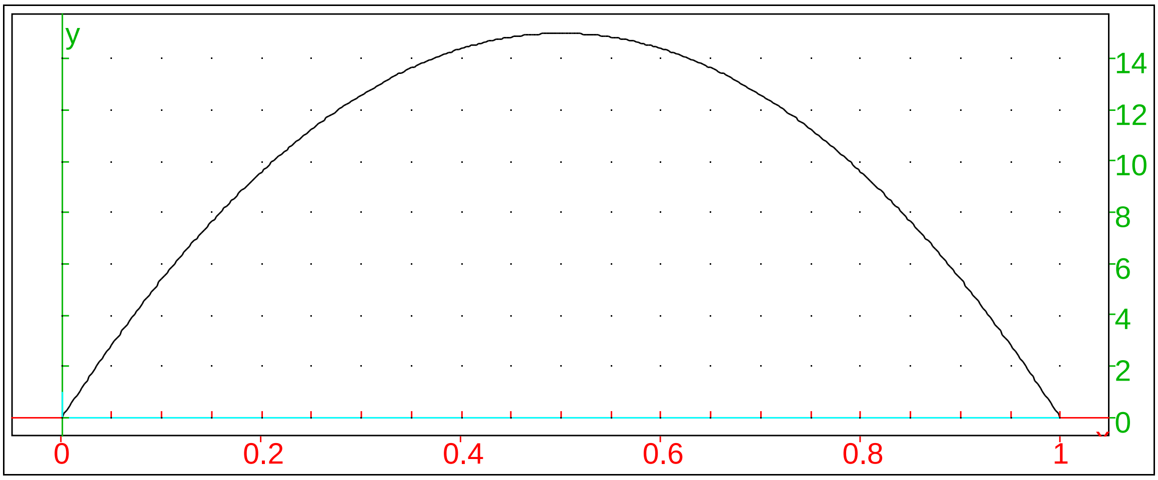
On obtient :

```
-60*t^2+60*t
```

2. Démontrer la conjecture émise en 2. On tape :

```
plotfunc(S,t=0..1)
```

On obtient :



On tape :

```
solve(derive(S,t),t)
```

On obtient :

```
[1/2]
```

Puis on tape

```
subst(S,t=1/2)
```

pour obtenir le maximum de l'aire (15).

XII - Sujet 030

Soit u_1 un nombre réel fixe. On considère la suite récurrente u de premier terme u_1 et telle que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + 1$.

1. En utilisant une calculatrice ou un tableur, calculer les premiers termes de cette suite et en réaliser une représentation graphique.
   Le choix du nombre de termes et de la valeur de u_1 est laisse au candidat, qui en testera plusieurs, dont u_1 = -100.
   Appeler l'examinateur pour verifier les calculs faits.
   Réponses
   On met les entiers dans la colonne A (1 dans `A1` et `=A1+1` dans `A2` et on recopie cette formule vers le bas).
   Puis on met la valeur de $u_1$dans `B1` par exemple 1 et `=B1/$A1+1` dans `B2` et on recopie cette formule vers le bas).
   Pour pouvoir visualiser en même temps plusieurs suites u, on peut remplir `C1,D1...G1` avec différentes valeurs de u_1 (par exemple 10.0,-10.0. -100.0,100.0 et 3.0. Puis on recopie la formule contenue dans `B2` vers la droite, puis on recopie les formules contenues dans `C2,D2...G2` vers le bas, on obtient

Table Edit Maths | reeval | val | Save | <No filename>

C1 | 10.0

* Spreadsheet <> R33C7 auto down fill

	A	B	C	D	E	F	G
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1.0	10.0	-10.0	-100.0	100.0	3.0
2	2	2.0	11.0	-9.0	-99.0	101.0	4.0
3	3	2.0	6.5	-3.5	-48.5	51.5	3.0
4	4	1.666666666	3.166666666	-0.1666666666	-15.166666666	18.166666666	2.0
5	5	1.416666666	1.791666666	0.9583333333	-2.7916666666	5.5416666666	1.5
6	6	1.283333333	1.358333333	1.19166666667	0.441666666	2.108333333	1.3
7	7	1.213888888	1.226388888	1.19861111111	1.073611111	1.351388888	1.216666666
8	8	1.173412698	1.1751984127	1.17123015873	1.153373015	1.193055555	1.173809523
9	9	1.1466765873	1.146899801	1.14640376984	1.144171626	1.149131944	1.146726190
10	10	1.1274085097	1.127433311	1.12737819665	1.127130180	1.127681327	1.127414021
11	11	1.112740850	1.112743331	1.11273781966	1.112713018	1.112768132	1.112741402
12	12	1.101158259	1.101158484	1.10115798361	1.101155728	1.101160739	1.101158309
13	13	1.091763188	1.091763207	1.0917631653	1.091762977	1.091763394	1.091763192
14	14	1.083981783	1.083981785	1.08398178195	1.083981767	1.0839817996	1.083981784
15	15	1.077427270	1.077427270	1.07742727014	1.077427269	1.0774272714	1.077427270
16	16	1.071828484	1.071828484	1.07182848468	1.071828484	1.071828484	1.071828484
17	17	1.066989280	1.066989280	1.06698928029	1.066989280	1.0669892803	1.066989280
18	18	1.062764075	1.062764075	1.06276407531	1.062764075	1.0627640753	1.062764075
	0	1	2	3	4	5	6

2. En fonction des différentes valeurs de u_1 :
   (a) émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite u ;
   (b) émettre une conjecture sur la limite de la suite u.
   Appeler l'examinateur pour valider les deux conjectures et indiquer la méthode prévue pour les démonstrations de la question (3).
   Réponses
   (a) La suite u semble être positive et décroissante à partir d'un certain rang.
   (b) La suite u semble être bornée, si c'est le cas $\dfrac{u_n}{n}$ va tendre vers 0 quand n tend vers l'infini et la suite u serait convergente vers 1.
3. Dans cette question on suppose que u_1 = -100.
   (a) Demontrer qu'à partir d'un certain rang n_0 , à preciser, la suite u est décroissante.
   (b) Démontrer que la suite u est convergente et préciser sa limite.
   Réponses
   D'après le calcul des premiers termes pour $1 \leq n \leq 8$, la suite u est croissante. Montrons qu'à partir de $n_0 = 8$, la suite u est décroissante.
   Tout d'abord, on montre par récurence que pour $n \geq 7$ on a $u_n > 1$
   – pour $n = 7$, on a $u_7 = \dfrac{773}{720} > 1$

– si $u_n > 1$ alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1 > 1/n + 1 > 1$.
On a $u_{n+1} - u_n = u_n \frac{1-n}{n} + 1$ et $u_n = \frac{u_{n-1}}{n-1} + 1$, donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_{n-1}}{n} + \frac{1-n}{n} + 1 = \frac{-u_{n-1}+1}{n}$$

Or si $n \geq 8$ alors $n-1 \geq 7$ donc $-u_{n-1}+1 < 0$ et $u_{n+1} < u_n$.

Remarques

On a démontré que la suite u définie par : $u_1 = -100$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge vers 1.

On peut démontrer plus généralement que pour tout réel a la suite u définie par :
$u_1 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge vers 1.

1. Montrons que si u est bornée (c'est à dire si il existe M tel que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|u_n| < \mathrm{M}$), alors u converge vers 1.
   On a :
   $$|u_n - 1| = \frac{|u_{n-1}|}{n-1} < \frac{\mathrm{M}}{n-1}$$
   Or $\dfrac{\mathrm{M}}{n-1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini d'où le résultat. Il suffit donc de montrer que u est bornée pour montrer sa convergence.
2. On va montrer que quelque soit u_1, il existe n_1 tel que $u_{n_1} > 1$ et alors à partir de $n_2 = n_1 + 1$ la suite u est plus grande que 1 et décroissante.
   – On fait une démonstration par l'absurde : supposons que pour tout n on a $u_n \leq 0$.
   On aurait alors pour $u_n(1-n) \geq 0$ donc
   $$u_{n+1} - u_n = u_n \frac{1-n}{n} + 1 \geq 1 > 0$$
   La suite u serait donc croissante et majorée par 0 donc convergente vers une limite $l \leq 0$ ce qui est impossible car une suite convergente est bornée et on a montré précédemment que si si u est bornée, elle converge vers 1.
   – D'après ce qui précède il existe un rang $n_0 \geq 1$ tel que $u_{n_0} > 0$ alors il existe $n_1 = n_0 + 1$ tel que $u_{n_1} = \dfrac{u_{n_0}}{n_0} + 1 > 1$ donc pour tout $n \geq n_1$ alors $u_n > 1$ (évident par récurrence).
   – Montrons que la suite u est décroissante pour $n \geq n_1 + 1$.
   Pour $n \geq n_1$ (donc $n+1 \geq n_2 = n_1 + 1$), on a : $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} \dfrac{-n}{n+1} + 1$
   Par définition $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + 1$ donc
   $$u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\frac{u_n}{n} + 1\right)\left(\frac{-n}{n+1}\right) + 1 = \frac{-u_n}{n+1} + \frac{-n}{n+1} + 1 = \frac{-u_n + 1}{n+1} < 0$$
   puisque pour tout $n \geq n_1$ on a $u_n > 1$.
   La suite u est décroissante et minorée par 1, elle est donc convergente vers $l \neq 0$ donc $\dfrac{u_n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par passage à la limite dans la relation de récurrence on déduit que $l = 1 + 0 = 1$. Donc quelque soit u_1 la suite u est décroissante à partir d'un certain rang et converge vers 1.

XIII - Sujet 033

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}; i, j, k)$, on définit les points $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$ et $\mathrm{C}(0,0,1)$ et le point I milieu du segment [AB].

Partie expérimentale.

1. (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace, représenter le tétraèdre OABC et le point I.

   (b) Pour un point M du segment [AC], on définit le plan P passant par le point I et orthogonal à la doite (IM). Tracer la section du tétraèdre OABC par le plan P.

   (c) Le plan P coupe la droite (OB) en un point N . Construire le point N et tracer le segment [MN].

   Appeler l'examinateur pour lui présenter la figure construite.

   Réponses

   On tape :

```
A:=point(1,0,0);
B:=point(0,1,0);
C:=point(0,0,1);
I:=milieu(A,B);
O:=point(0,0,0);
tetraedre(O,A,B,C);
```

   Pour avoir un point mobile M de AC dépendant d'un paramètre formel t, on crée un curseur formel (menu Edit->Ajouter parametre de la figure) de nom `t` avec comme valeurs extrêmes 0 et 1 puis on tape :

```
M :=element(segment(A,C),t)
```

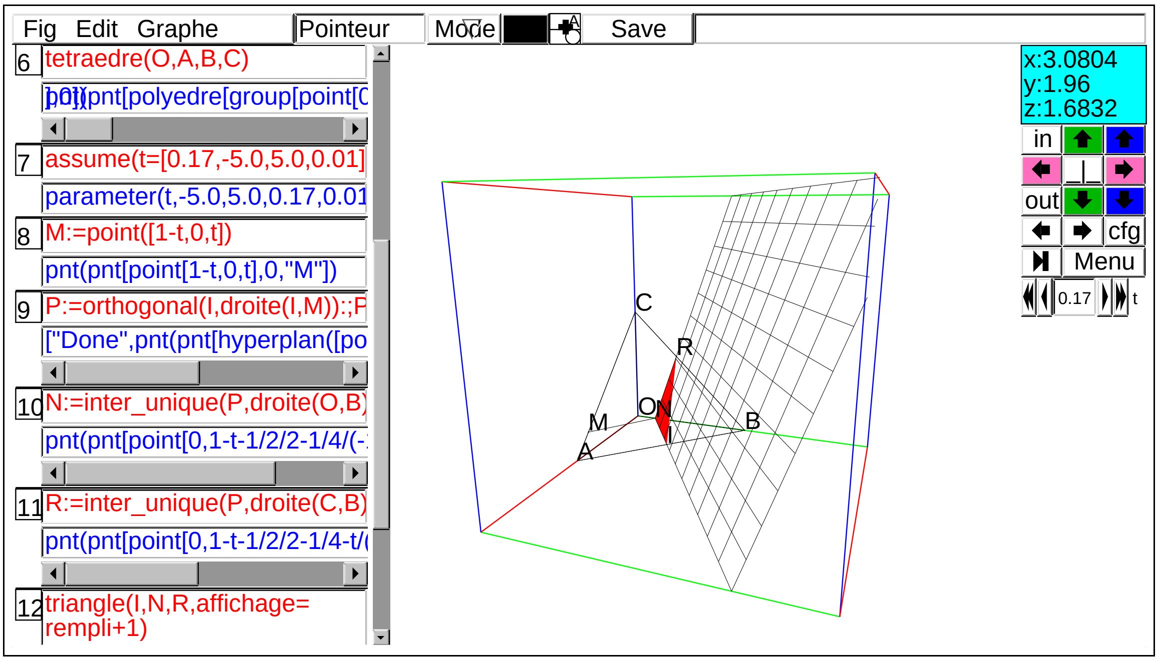
   On peut aussi calculer l'équation paramétrique de AC

```
parameq(segment(A,C))
```

   qui renvoie `[1-t,0,t]`. Donc pour pouvoir faire bouger un point M de AC, on peut aussi taper :

```
assume(t=0.2);
M :=point([1-t,0,t])
```

   puis on tape et on obtient :



2. Étudier à l'aide du logiciel, les variations de la longueur MN et conjecturer la position du point M, sur le segment [AC], telle que cette longueur soit minimale. Quelle est, d'après le logiciel, cette longueur minimale ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les observations faites et les résultats obtenus.

   Réponses

   Pour connaitre la longueur MN, on tape :

```
L :=normal(longueur(M,N))
```

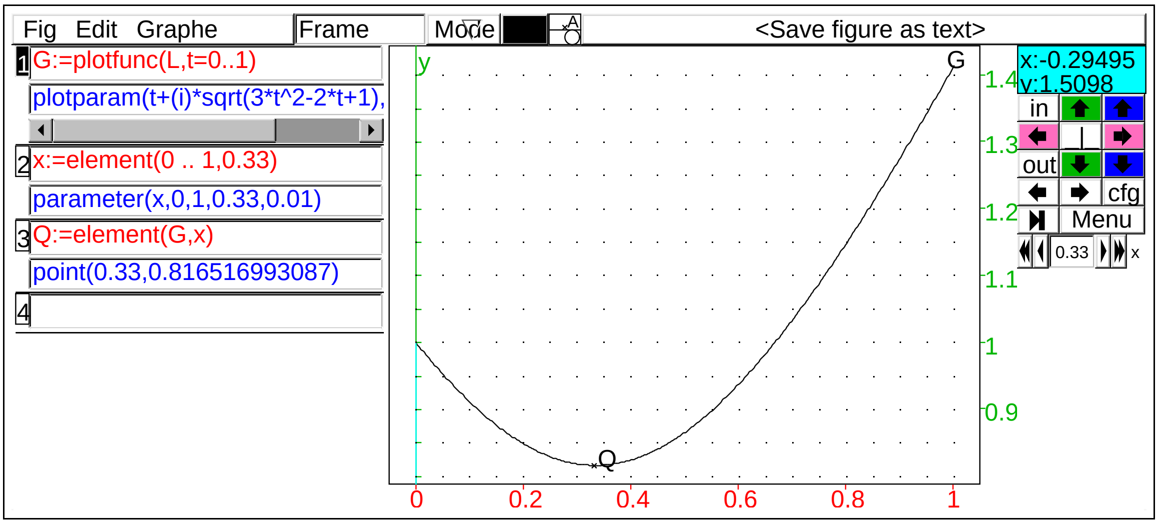
On obtient :

```
sqrt(3*t^2-2*t+1)
```

Pour connaitre les variations de la longueur MN, on ouvre un écran de géométrie 2d et on tape :

```
G :=plotfunc(L,t=0..1)
x :=element(0 .. 1,0.33);
Q :=element(G,x);
```

On obtient :



Le point d'affixe 0.33+0.816516993087*i semble être le point miminimum du graphe G : on a MN = 0.816516993087 quand M = $(1-0.33, 0, 0.33)$ et MN est proche du minimum de MN quand M varie sur AC.

Partie démonstration avec `Xcas`

On définit le réel $t = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}}$ et on admet que les coordonnées des points M et N sont respectivement $\mathrm{M}(1-t, 0, t)$ et $\mathrm{N}(0, t, 0)$ (cf. l'équation paramétrique de AC).

1. Calculer la longueur MN en fonction de t.

   Appeler l'examinateur pour lui expliquer la méthode prévue pour déterminer le minimum de cette longueur.

   Réponses

   On a

   $$\mathrm{MN} = \sqrt{(1-t)^2 + t^2 + t^2} == \sqrt{3t^2 - 2t + 1}$$

2. Déterminer la valeur de t pour laquelle cette longueur est minimale.

   Réponses

   On cherche le minimum de $3t^2 - 2t + 1$ qui est atteint pour $t = 1/3$.

3. Donner la valeur minimale prise par la longueur MN.

   Réponses

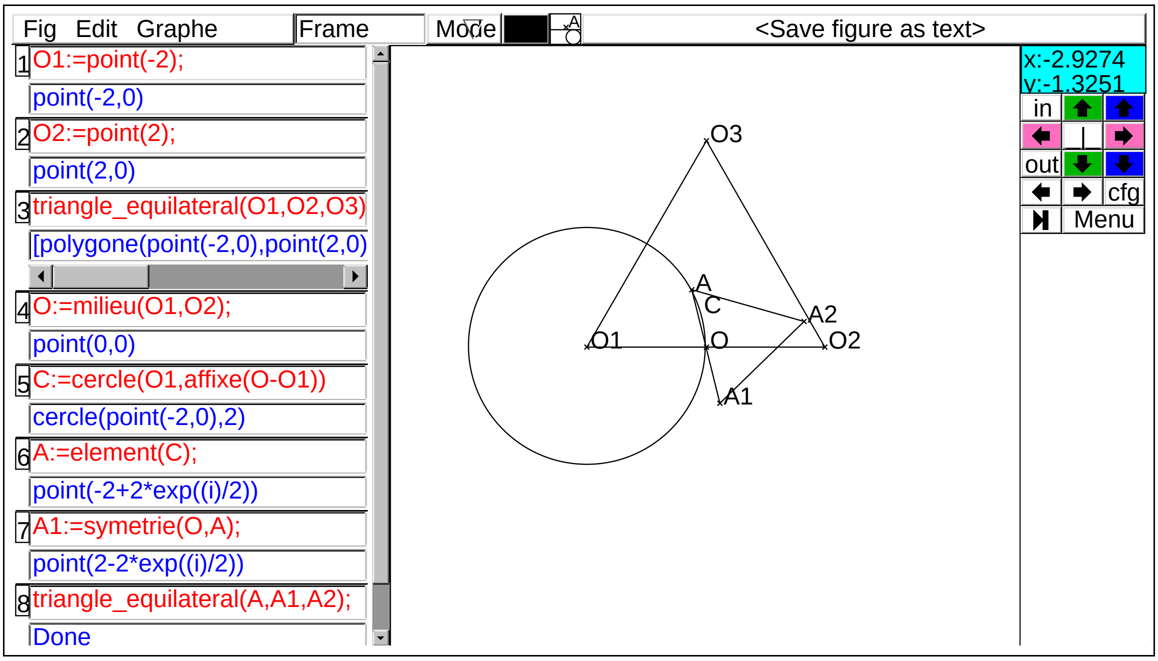
   La valeur minimale prise par la longueur MN vaut donc $\sqrt{1-1/3} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0.816496580928$ lorsque M a pour coordonnées $\dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{1}{3}$

XIV - Sujet 039

On considère un triangle équilatéral direct $O_1O_2O_3$, le milieu O du segment $[O_1O_2]$ et le cercle C de centre O_1 passant par O. On note A un point du cercle C distinct du point O.
Pour tout point M du cercle C , on note M_1 le point symétrique de M par rapport à O puis M2 le point tel que le triangle MM_1M_2 soit équilatéral direct.

Partie expérimentale

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire le triangle $O_1O_2O_3$, placer le point O et tracer le cercle C.
   Appeler l'examinateur pour vérifier la construction.
   Réponses
   ```
   O1:=point(-2);
   O2:=point(2);
   triangle_equilateral(O1,O2,O3);
   O:=milieu(O1,O2);
   C:=cercle(O1,affixe(O-O1))
   ```
2. Le point A étant construit sur le cercle C, construire le point A_2 associé au point A par le procédé indiqué dans le préambule.
   Appeler l'examinateur pour vérifier la construction.
   Réponses
   ```
   A:=element(C);
   A1:=symetrie(O,A);
   triangle_equilateral(A,A1,A2);
   ```



3. Placer un autre point, noté M, sur le cercle C et construire le point M_2 associé à ce point.
   Visualiser la courbe (ou lieu) que semble d'écrire le point M_2 lorsque le point M décrit le cercle C et émettre une conjecture à ce propos.
   Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture.
   Réponses

```
assume(t=[4.8,-5.0,5.0,0.0]);
M:=element(C,t);
M1:=symetrie(O,M);
M2:=rotation(M,pi/3,M1);
lieu(M2,M,affichage=1)
```

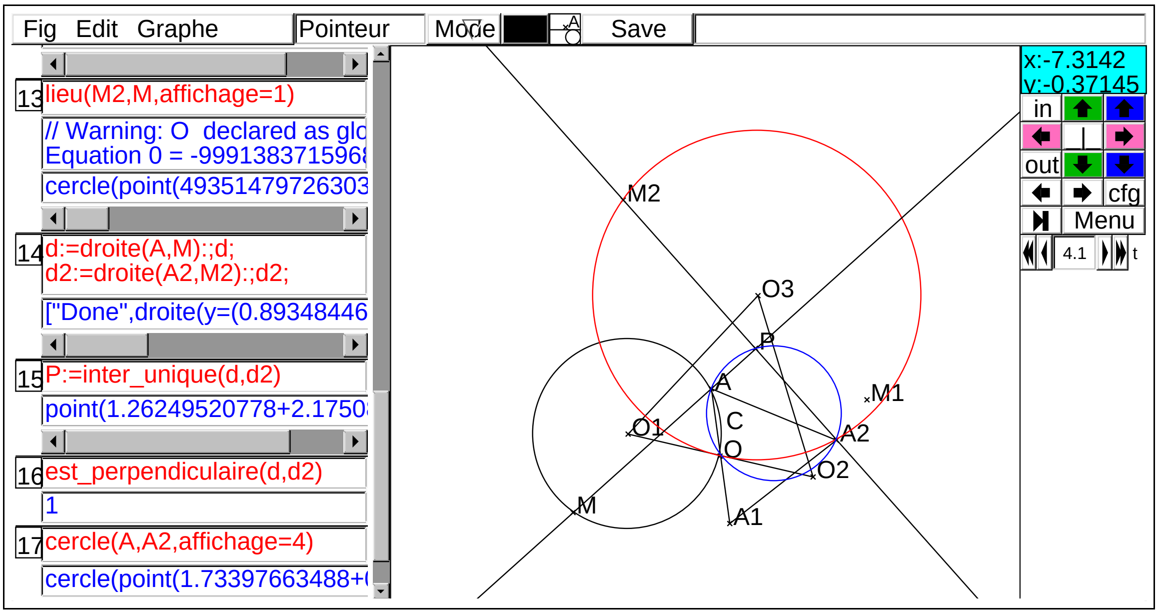
4. Lorsque les points M et A sont distincts, les droites (AM) et (A_2M_2) se coupent en un point P . Placer le point P sur la figure. Émettre une conjecture concernant le lieu décrit par le point P lorsque le point M décrit le cercle C privé du point A.

   Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

   Réponses

```
d:=droite(A,M):;d;
d2:=droite(A2,M2):;d2;
P:=inter_unique(d,d2);
cercle(A,A2,affichage=4)
```

   On obtient le lieu de M_2 en rouge et le lieu de P en bleu :

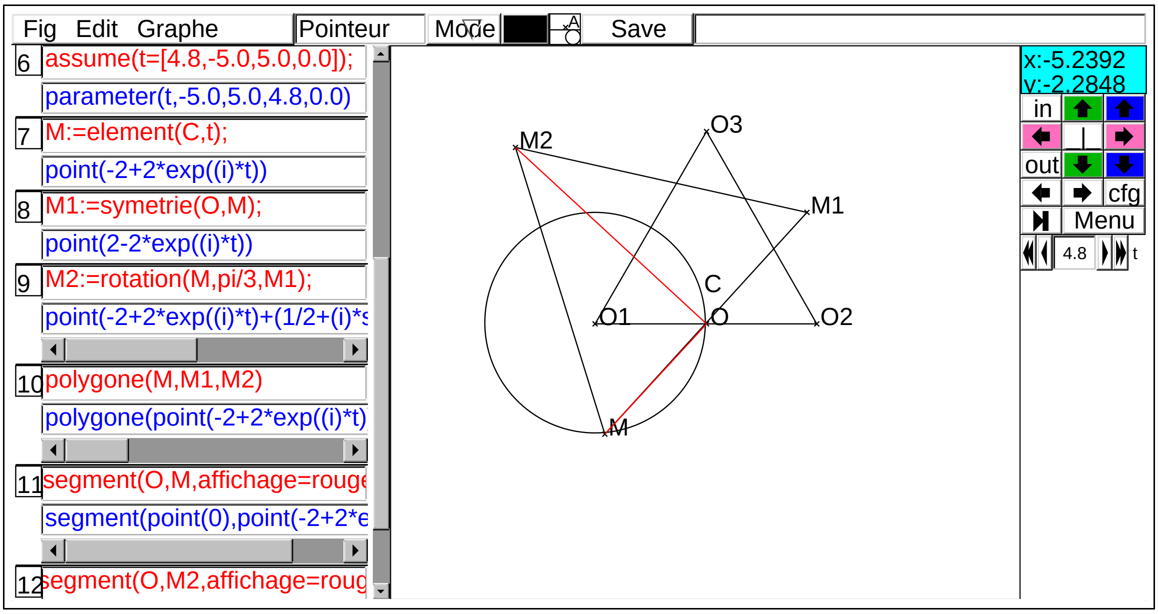


Démonstration

1. Montrer qu'il existe une similitude directe de centre O par laquelle le point M du cercle C a pour image le point M_2. Préciser l'angle et le rapport de cette similitude.

   Réponses

   On refait une figure où les segments OM et OM2 sont dessinés en rouge :



OM2 est la médiane donc aussi la hauteur d'un triangle équilatéral donc

$$OM2 = \sqrt{3}OM, \quad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM2}) = -\frac{\pi}{2}$$

Donc M2 est le transformé de M dans la similitude S de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

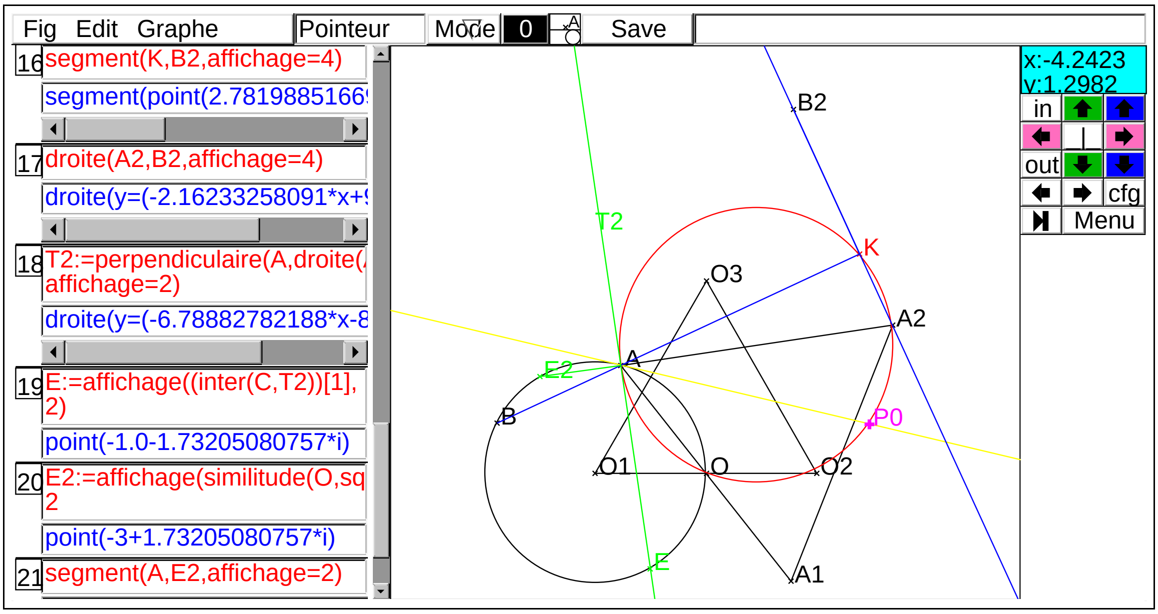
2. Déterminer le lieu du point M_2 lorsque le point M décrit le cercle C.

   Réponses
   Lorsque le point M décrit le cercle C de centre O1 et de rayon O1O, le lieu du point M_2 est l'image de C par cette similitude S, donc le cercle C1 de centre O3 et de rayon O3O. En effet, O3 est le transformé de O1 dans la similitude de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et le point O est fixe. On vérife en tapant

   ```
   similitude(O,sqrt(3),-pi/2,C)
   ```

3. Préciser le lieu du point P lorsque le point M décrit le cercle C privé du point A.

   Réponses
   La droite (AM) est transformée en la droite (A2M2) par une similitude d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A2M2})$ vaut $-\frac{\pi}{2}$. Donc P se trouve sur le cercle C2 de diamètre AA2 et C2 passe aussi par O.
   Reste à voir si tous les points K de C2 sont-ils des points P.



Soit K un point de C2.

- si K est différent de A, la droite (AK) coupe le cercle C en A et en B. B est différent de A sauf si la droite (AK) est tangente en A au cercle C. Soit P_0 l'intersection de la tangente T au cercle C en A. Puisque C et C_2 se coupent en O et en A, les deux cercles ne sont pas tangents et donc P_0 est différent de A.
  Donc si K est différent de P_0, B est différent de A. On pose $S(B) = B_2$, $B_2A_2 \perp BA$ donc B_2A_2 et BA se coupent en P. K est sur BA et est sur le cercle de diamètre AA_2 donc il est confondu avec P.
- si K est en A, la tangente T2 en A à C2 coupe le cercle C en A et en E. E est différent de A car les cercles C et C_2 ne sont pas tangents car ils se coupent en O et en A avec A différent de O. Donc si K = A, E est différent de A on pose $S(E) = E_2$, $E_2A_2 \perp EA$ donc si E_2A_2 et EA se coupent en P. Puisque la droite (EA) est tangente à C_2, on a aussi $EA \perp AA_2$ donc A, A_2, E_2 sont alignés et P = A.

Le lieu du point P est donc le cercle C2 de diamètre AA2 privé de P_0.

XV - Sujet 044

On considère la suite (u_n) definie pour tout n entier strictement positif par :

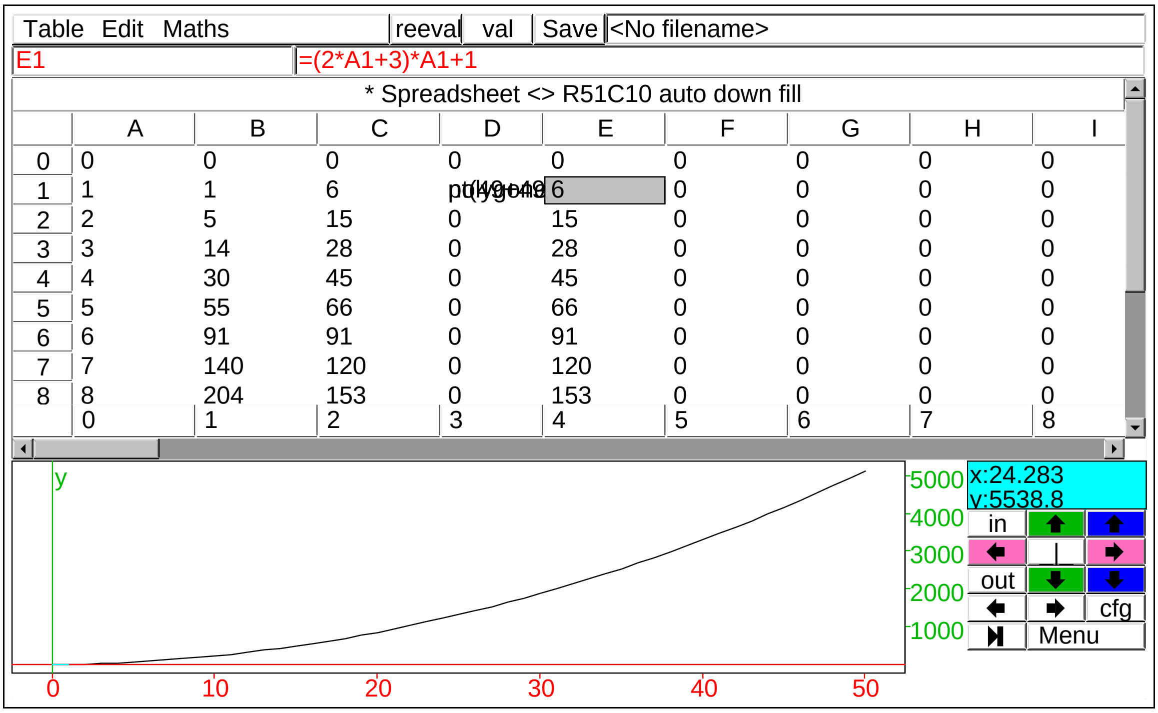
$$u_n = \frac{6}{n}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

N.B. : on peut résoudre directement cet exercice avec la fonction `sum` de Xcas (`factor(6/n*sum(k^2,k=1..n))`) mais nous suivons ici l'esprit de l'exercice.

Partie expérimentale

1. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite (u_n).

   Réponses



2. Émettre une conjecture sur le type de fonction f telle que, pour tout n entier entre 1 et 50, on ait : $u_n = f(n)$.

   La fonction f semble être un polynôme du second degré.
   Pour la déterminer, on va supposer que $f(n) = an^2 + bn + c$ et résoudre le système $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$, $u_3 = f(3)$
   Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture et proposer une méthode pour la préciser.
   Réponses

3. Mettre en place la stratégie validée par l'examinateur et déterminer précisément la fonction f.
   Appeler l'examinateur, lui indiquer la fonction f trouvée et lui proposer une méthode pour résoudre la question 4.
   Réponses
   On tape dans des niveaux de calcul formel

```
f(n):=a*n^2+b*n+c;
u1:=6; u2:=15; u3:=28;
solve([u1=f(1),u2=f(2),u3=f(3)],[a,b,c])
```

   On obtient `[2,3,1]` donc $a = 2, b = 3, c = 1$.

Démonstration

1. (a) Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a $u_n = f(n)$ ou f est la fonction validée par l'examinateur.
   (b) En déduire une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers strictement positifs.
   Réponses
   (a) On tape :

```
factor(2n^2+3n+1)
```

   On obtient `(1+n)*(1+2*n)`.
   Montrons par récurence que

$$u_n = 2n^2 + 3n + 1 = (1+n)(1+2n)$$

   On a bien $u_1 = 6 = 2 + 3 + 1$. Supposons que $u_n = 2n^2 + 3n + 1 = (1+n)(1+2n)$. On a

$$u_{n+1} = u_n \frac{n+1}{n} + 6(n+1)$$

donc

$$u_{n+1} = (1+n)(1+2n)\frac{n}{n+1} + 6(n+1) = n(1+2n) + 6(n+1)$$

et $u_{n+1} = 2n^2 + 7n + 6$. On tape

```
factor(2n^2+7n+6)
```

On obtient `(2+n)*(3+2*n)`. Donc u_{n+1} vérifie l'hypothèse de récurrence.
On a donc montré que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = (1+n)(1+2n)$$

(b) On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

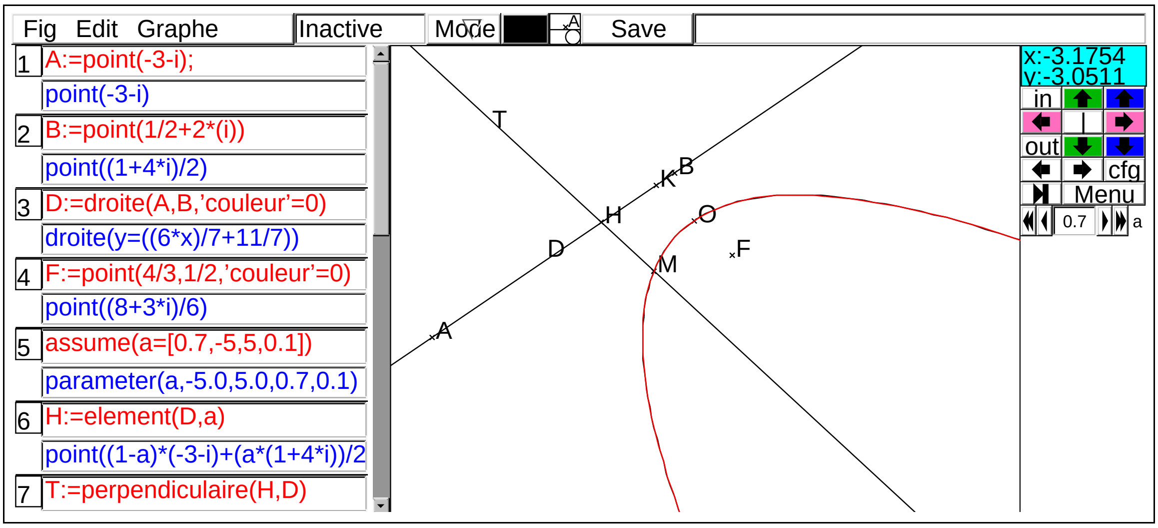
XVI - Sujet 045

On considère dans le plan (P) une droite D et un point F non situé sur cette droite. Il s'agit de déterminer l'ensemble G, lieu géométrique des points du plan équidistants de D et de F.

Partie expérimentale

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la droite D et le point F.
   Construire également un point H sur la droite D et la droite T perpendiculaire à D en H.
   Appeler l'examinateur pour vérifier la figure et exposer la démarche envisagée pour la suite de la construction.

   Réponses
   On tape et on obtient :



2. Construire un point M de T équidistant de F et de H .
   Construire le lieu géométrique du point M lorsque le point H décrit la droite D.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de G ?
   Appeler l'examinateur pour lui montrer la figure et lui indiquer votre conjecture.
   Réponses
   On tape

```
A :=point(-3-i);
B :=point(1/2+2*(i));
D :=droite(A,B,'couleur'=0);
F :=point(4/3,1/2,'couleur'=0);
assume(a=[0.7,-5,5,0.1]);
H :=element(D,a)
T :=perpendiculaire(H,D)
M :=inter_unique(mediatrice(H,F),T);
```

Pour obtenir le lieu on tape

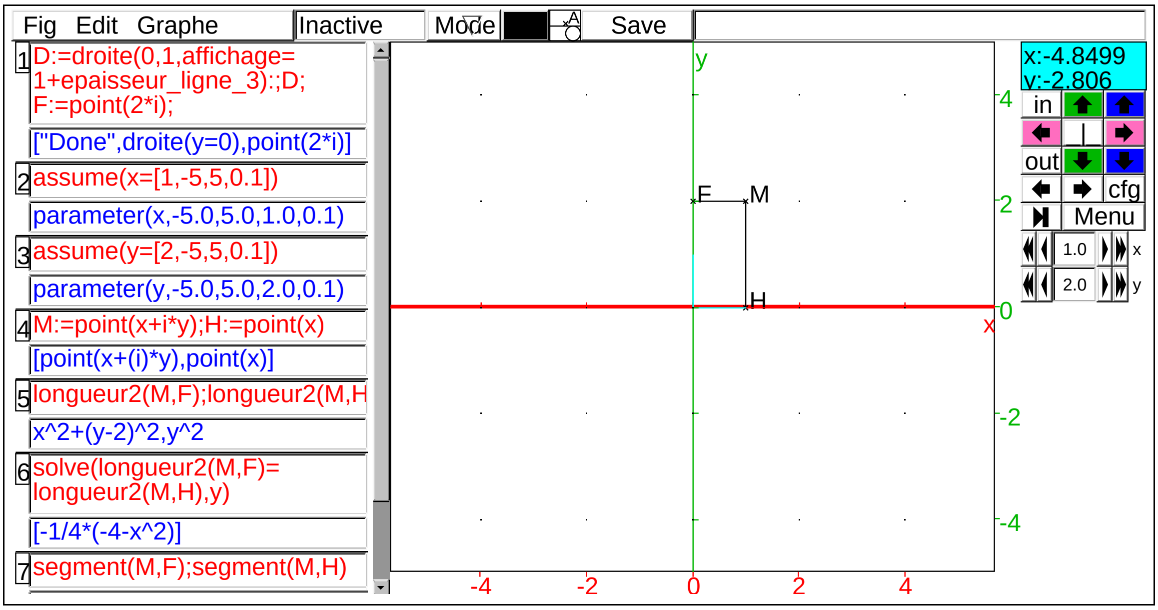
```
lieu(M,H);
```

ou bien

```
trace(M)
```

et on fait varier le curseur `a` pour observer l'ensemble décrit par la trace du point M.

3. On considère un repère orthonormal direct O; $\vec{i}$, $\vec{j}$ tel que D est la droite (O; $\vec{i}$) et le point F est sur la droite (O; $\vec{j}$). Pour un point M(x, y) quelconque du plan, on considère le point H, projeté orthogonal de M sur la droite D.
(a) Calculer MF^2 et MH^2 en fonction de x et y et en déduire une condition liant x et y pour que le point M soit équidistant de F et de D.
(b) Donner alors une équation de G et conclure.
Réponses
On tape et on obtient :



On a :

$$MF^2 = x^2 + (y-2)^2, \quad MH^2 = y^2$$

On résoud l'équation MF = MH ou encore MF^2 = MH^2, soit

$$x^2 + (y-2)^2 = y^2$$

On obtient

$$x^2 - 4y + 4 = 0$$

c'est à dire

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

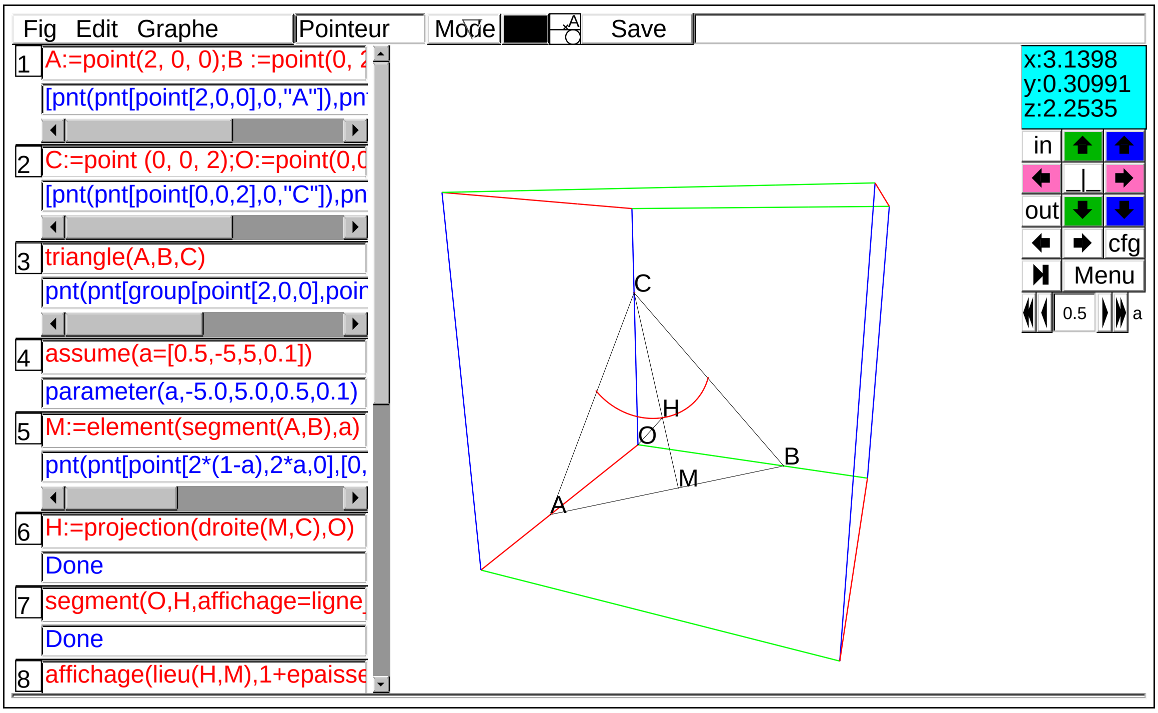
qui est l'équation d'une parabole.

XVII - Sujet 062

Dans l'espace rapporté à un rep'‘re orthonormé d'origine O, on construit le tétraèdre OABC avec : $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,2)$.
Ce tétraèdre est dit « trirectangle » car trois de ses faces sont des triangles rectangles. Pour tout point M du segment [AB], on construit le projeté orthogonal H du point O sur la droite (MC).

Partie expérimentale

1. Proposer, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, une figure traduisant la situation et construire le lieu des points H lorsque le point M décrit le segment [AB].
   Quel semble être le lieu du point H ?
   Appeler l'examinateur pour vérifier le tracé du lieu et la conjecture.
   Réponses
   On tape et on obtient :



   Le lieu du point H semble être un arc de cercle du plan (A,B,C).

2. Conjecturer les positions du point M sur le segment [AB] pour lesquelles la longueur CH semble maximale, minimale.
   Appeler l'examinateur pour vérifier ces conjectures.
   Réponses
   On fait bouger le curseur `a` et on fait afficher CH^2 (formellement ainsi que sa valeur numérique), pour cela on ajoute la ligne :

```
L :=normal(longueur2(C,H));evalf(L)
```

   On obtient lorsque $a = 0.5$: `2/(1-a+a^2),2.66666666667`
   – La longueur CH semble maximale lorsque M est au milieu de AB et alors $CH^2 = 2+2/3 = 8/3$
   – La longueur CH semble minimale lorsque M est en A ou en B et $CH^2 = 2$

3. On se propose de démontrer les conjectures émises.
   (a) Démontrer la double égalité :

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CO}^2$$

Appeler l'examinateur pour lui indiquer les stratégies retenues pour répondre aux questions (b) et (c) suivantes.
(b) Valider ou invalider alors les conjectures faites à la question 2. Calculer les extremums de CH.
(c) Le lieu de H est-il un arc de cercle ?

Réponses
(a) On tape : `parameq(segment(A,B))`.
On obtient : `[2-2*t,2*t,0]`. Donc le point M a pour coordonnées [2-2*a,2*a,0] (il est sur la droite y=-x+2,z=0).
On peut démontrer la double égalité

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CO}^2$$

de plusieurs façons :
– avec les coordonnées,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CO} &= 2*2\\
\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CM} &= [(1-a)/(1-a+a^2), a/(1-a+a^2), 1/(-1+a-a^2)]*[2*(1-a), 2*a, -2]\\
&= (2(1-a)^2+2a^2+2)/(1-a+a^2)\\
&= 4\\
\overrightarrow{CO}^2 &= 4
\end{aligned}$$

– avec les vecteurs,
On sait que le produit scalaire de 2 vecteurs orthogonaux est nul. On a CO ⊥ OM et CM ⊥ OH. Comme

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{C0}+\overrightarrow{OM},\quad \overrightarrow{CH}=\overrightarrow{C0}+\overrightarrow{OH},$$

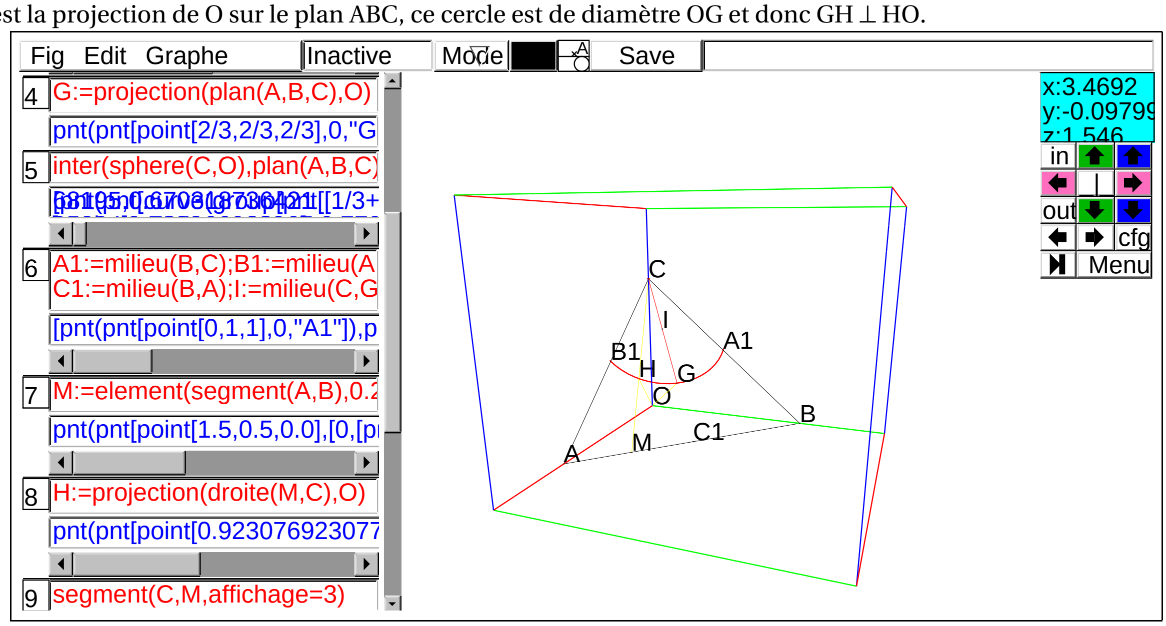
on a

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CO}^2+0,\quad \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{C0}.\overrightarrow{CM}+0$$

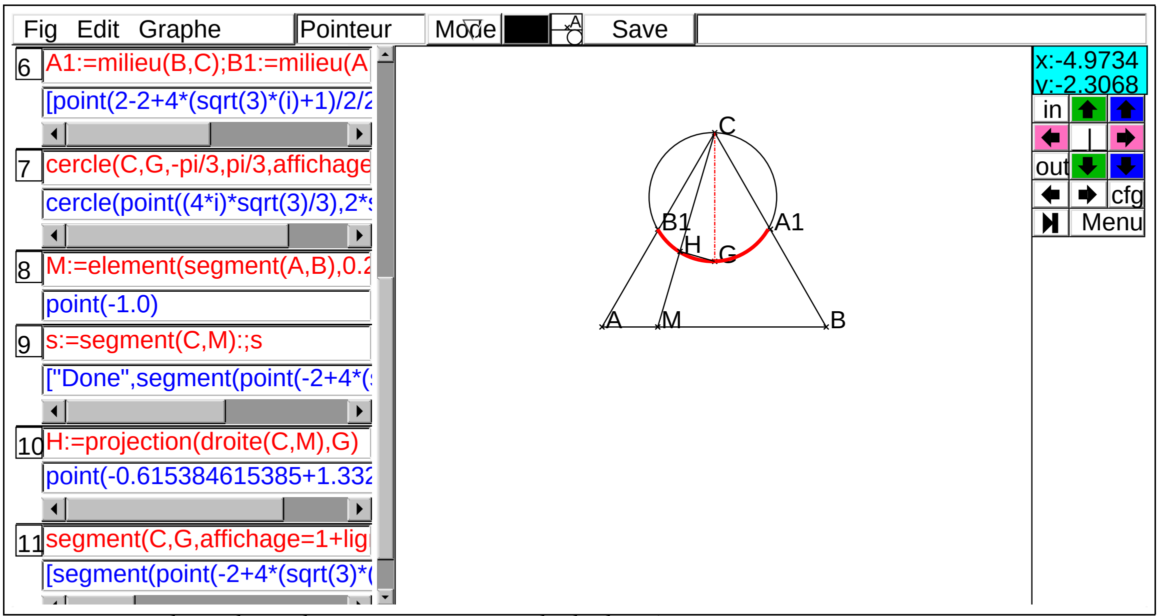
– en géométrie pure,
Le triangle OCM est rectangle en O et H est le pied de la hauteur issue de O. On a donc (relation dans un triangle rectangle)

$$\mathrm{CO}^2=\overline{\mathrm{CH}}.\overline{\mathrm{CM}},\quad \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CO}=\mathrm{CO}^2$$

(b) et (c)
Il y a plusieurs stratégies :
– en géométrie pure,
Le triangle OCH est rectangle en H donc H se trouve sur la sphère de diamètre OC. Par construction H est dans le plan ABC donc H se trouve sur le cercle intersection de la sphère de diamètre OC et du plan ABC. Si G est la projection de O sur le plan ABC, ce cercle est de diamètre OG et donc GH ⊥ HO.



Les triangles (rectangles en G) OGA, OGB, OGC sont égaux, donc GA = GB = GC. Le point G est donc le centre de gravité et aussi l'orthocentre du triangle équilatéral ABC. On est donc ramené à un problème de géométrie plane.



Soient $A1, B1, C1$ les milieux de BC, CA, AB. Le cercle de diamètre CG passe par A1 et B1, puisque A1G et B1G sont aussi les hauteurs de ABC qui est équilatéral. Lorsque M décrit le segment AB, H décrit l'arc de cercle $A1, B1$ d'angle au centre $2\pi/3$.

- CH est donc minimum quand HG est maximum donc quand H est en A1 ou en B1 et vaut dans ce cas $\sqrt(2)$ (on a bien $\mathrm{CH}^2 = 2$,
- CH est donc maximum quand H est en G dans ce cas $\mathrm{CH} = \mathrm{CG} = \mathrm{CA}\sqrt{3}/3 = 2\sqrt{2}\sqrt{3}/3 = 2\sqrt{6}/3$ (on a bien $\mathrm{CH}^2 = 8/3$).

– en géométrie analytique,

- $\mathrm{CH} * \mathrm{CM} = 4$ donc CH est minimum quand CM est maximum danc quand M est en A ou B. On a $\mathrm{CA} = 2\sqrt{2}$ donc $\mathrm{CH} = 4/(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
- $\mathrm{CH} * \mathrm{CM} = 4$ donc CH est maximum quand CM est minimum danc quand M est en C1. On a $\mathrm{CC1} = (2\sqrt{2})\sqrt{3}/2 = \sqrt{6}$ donc

$$\mathrm{CH} = 4/(\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}/3, \quad \overline{\mathrm{CH}}.\overline{\mathrm{CM}} = 4$$

donc H se déduit de M par l'inversion de centre C et de rapport 4.

On a $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = k * \overrightarrow{\mathrm{CM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CH}}.\overrightarrow{\mathrm{CM}} = 4$ donc $k = 4/\mathrm{CM}^2$ et

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + 4\overrightarrow{\mathrm{CM}}/\mathrm{CM}^2$$

Si $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (x, -x+2, 0)$, on a $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = (x, -x+2, -2)$ et $\mathrm{CM}^2 = x^2 + (-x+2)^2 + 4 = 2x^2 - 4x + 8$ et donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= [0,0,2] + \frac{4}{2x^2-4x+8}[x, -x+2, -2] \\ &= \left[\frac{2x}{4-2x+x^2}, \frac{4-2x}{4-2x+x^2}, \frac{4-4x+2x^2}{4-2x+x^2}\right] \end{aligned}$$

G est dans le plan $x+y+z=2$ et sur la normale au plan passant par O d'équation $x=y=z$, donc les coordonnées de G sont $[2/3, 2/3, 2/3]$ et le milieu I de CG a pour coordonnées $\mathrm{I} = [1/3, 1/3, 4/3]$ donc

$$w = \overrightarrow{\mathrm{IH}} = \left[\frac{-4+8x-x^2}{12-6x+3x^2}, \frac{8-4x-x^2}{12-6x+3x^2}, \frac{-4-4x+2x^2}{12-6x+3x^2}\right]$$

On a donc `normal(norm(w))=(sqrt(6))/3`

XVIII - Sujet 063

Le but de cet exercice est d'étudier les restes modulo p (p entier strictement superieur à 1) des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definies par : $u_n = an + b$, a et b étant deux entiers naturels donnés. On note $r_n = u_n \bmod p$

1. Construire une feuille de calcul donnant les restes modulo 20 des 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definie par $u_n = 12n+5$.
   Appeler l'examinateur
   Réponses
   On met dans `A1` `=A0+1` et on recopie vers le bas, puis dans `B0` la formule `=irem(12*A0+5,20)` et on recopie vers le bas.
2. Adapter la feuille de calcul de façon à obtenir les restes modulo p des 20 premiers termes de la suite definie par $u_n = an + b$, $n \in \mathbb{N}$, de telle manière qu'on puisse modifier les valeurs de a, b et p. Notez sur votre feuille les restes obtenus dans les cas particuliers suivants :
   (a) $p = 20$ et $u_n = 5n-3$;
   (b) $p = 7$ et $u_n = 5n-3$.
   Quelle conjecture peut-on formuler quant aux suites formées par ces restes euclidiens ?
   Appeler l'examinateur pour verifier la conjecture émise
   Réponses
   Pour les deux cas particuliers, on met dans `C0` la formule `=irem(5*A0-3,20)` et on recopie vers le bas, dans `D0` la formule `=irem(5*A0-3,7)` et on recopie vers le bas. Pour pouvoir changer la valeur de a, b, p on met par exemple dans une ligne de commande

```
a,b,p :=5,3,10
```

   puis dans `E0` la formule `=irem(a*A0+b,p)` et on recopie vers le bas. On peut aussi mettre dans la colonne `F` les définitions de a, b, p, par exemple dans `F0` la formule `=(a :=3)`, etc. On obtient :

Table Edit Maths | reeval | val | Save | <No filename>

F0 | =nop(a)

* Spreadsheet <> R21C10 auto down fill

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	5	17	4	3	5	0	0	0
1	1	17	2	2	8	3	0	0	0
2	2	9	7	0	3	10	0	0	0
3	3	1	12	5	8	0	0	0	0
4	4	13	17	3	3	0	0	0	0
5	5	5	2	1	8	0	0	0	0
6	6	17	7	6	3	0	0	0	0
7	7	9	12	4	8	0	0	0	0
8	8	1	17	2	3	0	0	0	0
9	9	13	2	0	8	0	0	0	0
10	10	5	7	5	3	0	0	0	0
11	11	17	12	3	8	0	0	0	0
12	12	9	17	1	3	0	0	0	0
13	13	1	2	6	8	0	0	0	0
14	14	13	7	4	3	0	0	0	0
15	15	5	12	2	8	0	0	0	0
16	16	17	17	0	3	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

   Si a est un multiple de p, les suites r_n sont constantes, sinon si p est premier, ces suites sont périodiques de période p et sinon ces suites sont périodiques de période un diviseur de p.

3. Démonstration de la conjecture :
(a) Montrer que, parmi les nombres $u_0, u_1, ..., u_p$, il existe deux nombres ayant le même reste dans la division euclidienne par p, pour p entier naturel non nul.
(b) Soient n_0 et $n_0 + \mathrm{T}$ les rangs de ces deux nombres ($\mathrm{T} \neq 0$). Montrer que $a\mathrm{T}$ est un multiple de p.
(c) En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{\mathrm{T}+k}$ et u_k ont le même reste dans la division euclidienne par p.
(d) Démontrer alors la conjecture.
Réponses
(a) Pour tout p entier naturel non nul, il y a p restes différents donc, parmi les $p+1$ nombres $u_0, u_1, ..., u_p$, il existe deux nombres ayant le même reste dans la division euclidienne par p, c'est à dire parmi les $p+1$ nombres $r_0, r_1, ..., r_p$, il existe deux nombres égaux.
(b) On suppose que $u_{n_0} = an_0 + b$ et $u_{\mathrm{T}+n_0} = a\mathrm{T} + an_0 + b$ ont le même reste dans la division euclidienne par p, c'est à dire $r_{n_0} = r_{\mathrm{T}+n_0}$. On a donc :

$$an_0 + b = q_1 p + r, \ a\mathrm{T} + an_0 + b = q_2 p + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < p, q_1 \in \mathbb{N}, q_2 \in \mathbb{N}$$

Donc $a\mathrm{T} + q_1 p + r = q_2 p + r$ c'est à dire $a\mathrm{T} = (q_2 - q_1)p$.
(c) pour tout entier naturel k, on a

$$u_{\mathrm{T}+k} = a\mathrm{T} + ak + b = a\mathrm{T} + u_k$$

Comme $a\mathrm{T}$ est un multiple de p, $u_{\mathrm{T}+k}$ et u_k ont le même reste dans la division euclidienne par p donc $r_{\mathrm{T}+k} = r_k$
(d) Soit g le pgcd de a et p et $\mathrm{A} = a/g, \mathrm{P} = p/g$. L'équation $a\mathrm{T} = kp$ est équivalente à $\mathrm{AT} = k\mathrm{P}$. Comme P est premier avec A, P divise T. Réciproquement P est bien une période ($k = \mathrm{A}$) donc la période de la suite est $\mathrm{P} = p/\mathrm{pgcd}(a, p)$.

XIX - Sujet 066

On considère une suite (S_n) definie par le lancer d'une pièce équilibrée de la façon suivante :

$$\mathrm{S}_0 = 0 \text{ et } \begin{cases} \mathrm{S}_{n+1} & = \mathrm{S}_n + 1 \text{ si on obtient PILE} \\ \mathrm{S}_{n+1} & = \mathrm{S}_n - 1 \text{ si on obtient FACE} \end{cases}$$

On note A_n l'évènement « obtenir $\mathrm{S}_n = 0$ ».
On s'interesse à la probabilité de réaliser l'évènement A_n pour un entier n non nul donné.

Partie expérimentale

1. En utilisant un tableur, effectuer une simulation donnant les 11 premiers termes de 1 000 suites définies de la même facon que (S_n).
Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles l'évènement A_n est impossible ? Justifier votre reponse.
Appeler l'examinateur pour présenter votre simulation et votre justification.
Réponses
Pour faire cette simulation on ouvre un tableur ayant 1001 lignes et 11 colonnes. On remplit :
– `A1` avec `0` et `B1` avec `=ifte(rand(2),A1+1,A1-1)` puis on remplit cette formule vers la droite,
– on remplit ensuite toutes ces formules vers le bas
Si n est impair, on ne peut pas avoir $\mathrm{S}_n = 0$. En effet, montrons par récurrence que S_n a la même parité que n :
– S_1 est égal à 1 ou -1 donc est impair
– si S_n a la même parité que n alors $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n + 1$ ou $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n - 1$ donc S_{n+1} a la même parité que $n+1$
2. (a) Donner les fréquences d'apparition de l'évènement A_n pour n variant de 1 a 10.
(b) Faire d'autres simulations de même taille pour compléter le tableau suivant

Fréquences d'apparition de A_n										
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Simulation 1										
Simulation 2										
Simulation 3										
Simulation 4										
Simulation 5										

Appeler l'examinateur pour une verification.

Réponses

(a) Pour avoir les fréquences d'apparition de l'évènement A_n pour n variant de 1 a 10, on tape dans `B0`

`=count_eq(0,B1 :B1000)/1000.`

puis on recopie cette formule vers la droite. On obtient :

Table Edit Maths | reeval | val | Save | <No filename>

B0 | =(count_eq(0,(B1):(B1000)))/1000.0

* Spreadsheet <> R1001C11 auto down fill

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	0	0.0	0.488	0.0	0.367	0.0	0.299	0.0	0.257	0.0	0.251
1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	0
2	0	1	2	3	2	1	0	1	0	1	0
3	0	-1	0	-1	0	1	0	-1	-2	-3	-2
4	0	-1	0	1	0	-1	0	-1	-2	-3	-4
5	0	1	0	-1	-2	-1	0	1	0	1	2
6	0	1	2	1	0	1	2	1	2	1	0
7	0	1	0	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
8	0	1	2	1	0	-1	0	1	2	3	4
9	0	1	2	1	2	3	4	5	4	5	4
10	0	1	0	-1	0	-1	0	-1	-2	-3	-2
11	0	-1	0	1	0	-1	-2	-1	0	-1	-2
12	0	-1	0	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	0
13	0	1	0	1	0	-1	-2	-1	0	-1	-2
14	0	1	0	-1	-2	-1	0	1	0	1	2
15	0	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

(b) On appuie sur le bouton `reeval` pour avoir une autre simulation et on recopie la première ligne du tableur dans le tableau. On obtient :

Fréquences d'apparition de A_n										
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Simulation 1	0.0	0.488	0.0	0.367	0.0	0.299	0.0	0.257	0.0	0.251
Simulation 2	0.0	0.516	0.0	0.372	0.0	0.308	0.0	0.28	0.0	0.25
Simulation 3	0.0	0.484	0.0	0.386	0.0	0.317	0.0	0.26	0.0	0.253
Simulation 4	0.0	0.503	0.0	0.37	0.0	0.293	0.0	0.271	0.0	0.25
Simulation 5	0.0	0.499	0.0	0.389	0.0	0.317	0.0	0.26	0.0	0.242

Démonstration

1. Déterminer les probabilités de réaliser les événements A_2, A_4 et A_6.
   Appeler l'examinateur pour une verification.
   Réponses

   – Pour avoir l'événement A_2, il faut avoir pour les deux premiers tirages(pile,face) ou (face,pile) donc

$$p(A_4) = 2\frac{1}{2^2} = 0.5$$

– Pour avoir l'événement A_4, il faut avoir eu autant de piles que de faces pour les quatre premiers tirages i.e. 2 piles et 2 faces donc :

$$p(A_2) = C_4^2 * \frac{1}{2^4} = \frac{3}{8} \approx 0.375$$

– Pour avoir l'événement A_6, il faut avoir eu 3 piles et 3 faces lors des six premiers tirages donc :

$$p(A_6) = C_6^3 * \frac{1}{2^6} = \frac{5}{16} \approx 0.3125$$

2. Donner une expression de $p(A_n)$ en fonction de la parité de n.

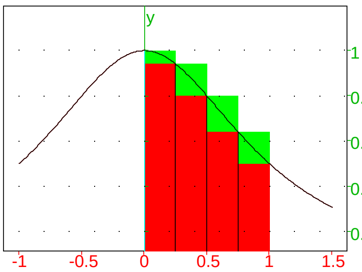
Réponses
On sait d'après la question 1/ que $p(A_{2k+1}) = 0$
Pour avoir l'événement A_{2k}, il faut avoir eu k piles et k faces lors des $2k$ premiers tirages donc :

$$p(A_{2k}) = C_{2k}^k * \frac{1}{2^{2k}}$$

Par exemple, on tape `comb(8,4)/2^8` et on obtient `35/128`≈ 0.2734375
Ou on tape `comb(8,4)/2^8` et on obtient `63/256`≈ 0.24609375

XX - Sujet 071

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$, ou la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
I est une intégrale dont on ne sait pas, en terminale S, calculer la valeur exacte.
Le but de l'exercice consiste donc à en déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
Pour cela on convient d'appliquer une méthode dite des « rectangles » et de partager l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de même amplitude, n étant un entier naturel non nul.



1. Dans cette question on donne à n la valeur 4. Quel encadrement de l'integrale I le dessin ci-dessous suggère-t-il ? Quelle est l'amplitude de cet encadrement ? Faire calculer cet encadrement par la calculatrice ou le tableur.
Appeler l'examinateur pour une vérification de l'encadrement trouvé.

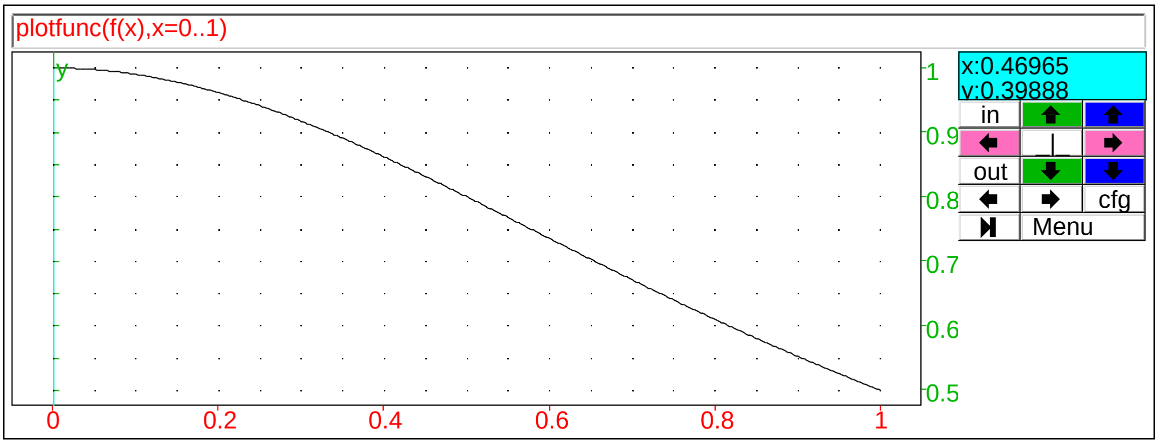
Réponses
On définit la fonction f, on tape

```
f(x) :=1/(1+x^2
```

Puis, on trace son graphe sur $[0;1]$, on tape :

```
plotfunc(f(x),x=0..1)
```

On obtient le graphe d'une fonction décroissante :



On remplit la colonne A avec les entiers, pour cela on tape `0` dans `A0` et `=A0+1` dans `A1`, puis on recopie cette formule vers le bas.
On met l'assignation $n := 4$ dans `B0`, pour cela on tape `=(n :=4)`
On met `0` dans `C0` et dans `C1` on tape

```
=(f((A0)/($B$0)))/($B$0)+C0
```

formule que l'on recopie vers le bas. Ainsi dans :

- `C1` il y a : $\frac{f(0/n)}{n}+0$
- `C2` il y a : $\frac{f(1/n)}{n}+\frac{f(0/n)}{n}+0$
- `C3` il y a : $\frac{f(2/n)}{n}+\frac{f(1/n)}{n}+\frac{f(0/n)}{n}+0$
- `C4` il y a : $\frac{f(3/n)}{n}+\frac{f(2/n)}{n}+\frac{f(1/n)}{n}+\frac{f(0/n)}{n}+0$

Donc `C4` donnera la valeur supérieur de l'encadrement cherché.
On met `0` dans `D0` et dans `D1` on tape :

```
=(f((A1)/($B$0)))/($B$0)+D0
```

formule que l'on recopie vers le bas. Ainsi dans :

- `D1` il y a : $\frac{f(1/n)}{n}+0$
- `D2` il y a : $\frac{f(2/n)}{n}+\frac{f(1/n)}{n}+0$
- `D3` il y a : $\frac{f(3/n)}{n}+\frac{f(2/n)}{n}+\frac{f(1/n)}{n}+0$
- `D4` il y a : $\frac{f(4/n)}{n}+\frac{f(3/n)}{n}+\frac{f(2/n)}{n}+\frac{f(1/n)}{n}+0$

Donc `D4` donnera la valeur inférieure de l'encadrement cherché.
L'encadrement est d'amplitude $(f(0.0)-f(1.0))/n$. On met cette valeur dans `B1`, pour cela on tape :
`=(f(0.0)-f(1.0))/(B0)`

Pour $n = 4.$ on obtient pour `C4 : D4` : [[0.845294117647, 0.720294117647]],donc :

$$0.720294117647 < \mathrm{I} < 0.845294117647$$

L'intervalle est d'amplitude 0.125.

2. On souhaite pouvoir généraliser, à n entier naturel non nul quelconque, l'encadrement obtenu dans le cas où $n = 4$.

   (a) Modifier l'organisation du calcul pour obtenir l'encadrement de I et son amplitude dans le cas où $n = 10$ puis où $n = 20$.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de l'automatisation effectuée.

(b) Conjecturer une valeur de n à partir de laquelle l'encadrement de I obtenu a une amplitude inférieure ou égale à 10^{-2}.
Appeler l'examinateur pour lui indiquer la conjecture émise et lui indiquer les méthodes envisagées pour la question suivante.

Réponses

Pour $n = 10$. on obtient pour `C10 : D10` : [[0.809981497227, 0.759981497227]]
donc :

$$0.759981497227 < \mathrm{I} < 0.809981497227$$

L'intervalle est d'amplitude 0,05

Table Edit Maths | reeval | val | Save | <No filename>

B0 | =(n:=(10.0))

* Spreadsheet <> R101C10 auto down fill

	A	B	C	D	E	F	G
0	0	10.0	0	0	0	0	0
1	1	0.05	0.1	0.09900990099C	0	0	0
2	2	0	0.19900990099	0.195163747144	0	0	0
3	3	0	0.295163747144	0.28690686641	0	0	0
4	4	0	0.38690686641	0.373113762962	0	0	0
5	5	0	0.473113762962	0.453113762962	0	0	0
6	6	0	0.553113762962	0.52664317472€	0	0	0
7	7	0	0.626643174726	0.59375726868€	0	0	0
8	8	0	0.693757268686	0.654732878442	0	0	0
9	9	0	0.754732878442	0.709981497227	0	0	0
10	10	0	0.809981497227	0.759981497227	0	0	0
11	11	0	0.859981497227	0.805230366005	0	0	0
12	12	0	0.905230366005	0.846213972562	0	0	0
13	13	0	0.946213972562	0.883388693752	0	0	0
14	14	0	0.983388693752	0.91717247753€	0	0	0
15	15	0	1.01717247754	0.947941708305	0	0	0
16	16	0	1.04794170831	0.97603159594€	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6

pour $n = 20$. on obtient pour `C20 : D20` [[0.797793996739, 0.772793996739]] donc :

$$0.772793996739 < \mathrm{I} < 0.797793996739$$

L'intervalle est d'amplitude 0.025.
Pour $n = 40$. on obtient pour `C40 : D40` : [[0.791622121731, 0.779122121731]] donc :

$$0.779122121731 < \mathrm{I} < 0.791622121731$$

L'intervalle est d'amplitude 0.0125.

3. Proposer des éléments permettant de justifier que, pour la valeur trouvée en 2.(b), l'amplitude de l'encadrement est bien inférieure ou égale à 10^{-2}.

Réponses

On a $f(0) = 1$ et $f(1) = 1/2$ et on veut avoir $\dfrac{f(0) - f(1)}{n} \geq 10^{-2}$, il faut donc choisir $n \geq 50$.
Pour $n = 50$. on obtient pour `C50 : D50` : [0.790381496731[, 0.780381496731]] donc :

$$0.780381496731 < \mathrm{I} < 0.790381496731$$

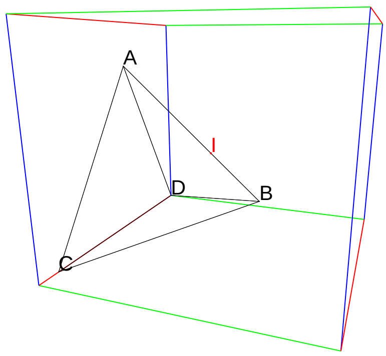
L'intervalle est d'amplitude 0.01.

Remarque

Un prolongement possible est d'utiliser pour l'approximation, les trapèzes et les rectangles du point milieu (colonne `E` et colonne `F` qui donnent de meilleurs approximations.
Avec `Xcas` on peut calculer de façon approchée cette intégrale et la représenter avec les fonctions `plotarea` (calcul approché et représentation), `int` (calcul exact), `romberg` (calcul approché). Par exemple `romberg(f(x),x,0,1)` renvoie `0.785398163397`.

XXI - Sujet 072

On considère un tétraedre ABCD et un point I quelconque du segment [AB].
Le plan parallèle au plan (BCD) passant par I coupe la droite (AC) en J et la droite (AD) en K.
On désigne par L l'isobarycentre des trois points I, J et K. On considère le point H projeté orthogonal du point C sur la droite (BL). Le but de l'exercice est de déterminer le lieu géométrique du point L ainsi que celui du point H, lorsque le point I décrit le segment [AB].



Partie expérimentale

1. Réaliser à l'aide d'un logiciel une figure géométrique correspondant à cette situation.
   On tape :

```
A:=point(3,0,4);
B:=point(2,5,1);
C:=point(4,0,0);
D:=point(0,0,0);
tetraedre(A,B,C,D);
assume(a=[0.63,0,1,0.01]);
I:=element(segment(A,B),a,affichage=1);
P:=parallele(I,plan(B,C,D)):;P;
J:=inter(droite(A,C),P,affichage=1)[0];
K:=inter_unique(P,droite(A,D),affichage=1);
polygone(I,J,K,affichage=3+rempli);
L:=isobarycentre(I,J,K,affichage=2);
H:=projection(droite(B,L),C,affichage=4));
```

2. Visualiser quelques positions du point L pour des positions différentes du point I sur le segment [AB].
   On aura interêt à utiliser le mode « trace » si cette fonction est disponible dans le logiciel utilisé.
   Quel semble être le lieu géométrique du point L ?
   Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture faite.
   Réponses
   On tape :

```
LL:=lieu(L,I,affichage=2);
normal(parameq(LL));
segment(A,G,affichage=2+epaisseur_ligne_4)
```

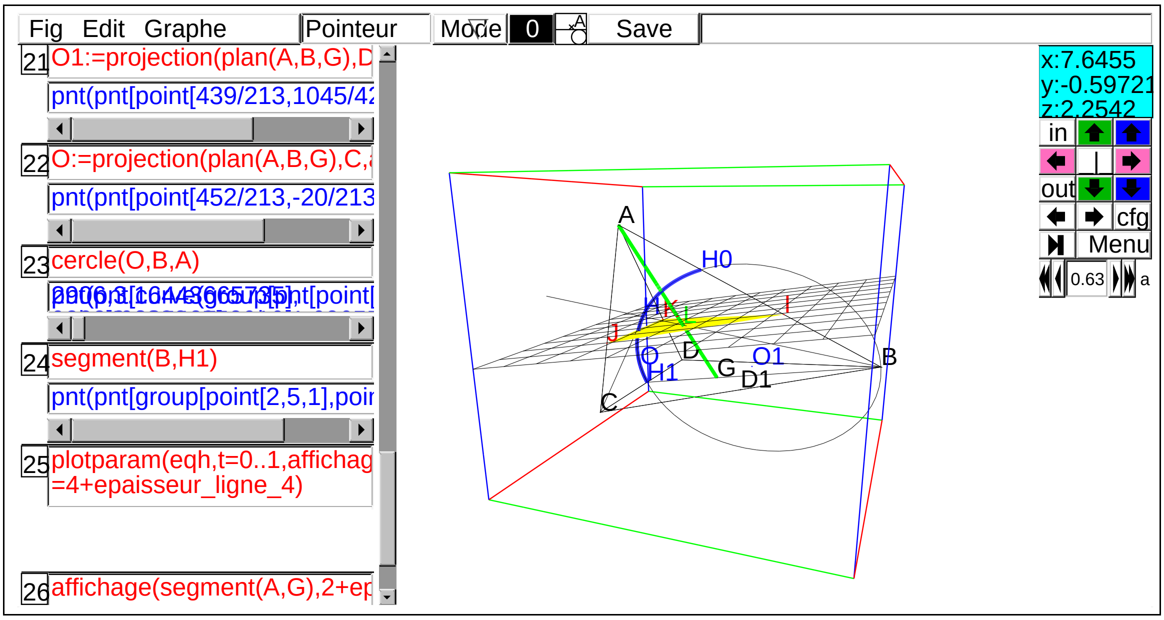
   Le lieu de L est le segment AG.

3. Visualiser quelques positions du point H pour des positions différentes du point I sur le segment [AB].
   Quel semble être le lieu géométrique du point H ?
   Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture faite.
   Réponses

```
LH :=lieu(H,I,affichage=4)
eqh :=normal(parameq(LH))
plotparam(eqh,t=0..1,affichage=4+epaisseur_ligne_4)
```

   Le lieu de H un arc de cercle.

4. **Partie démonstration**
Démontrer une des deux conjectures émises.
Réponses Les calculs ci-dessus sont une démonstration analytique par Xcas. On donne ci-dessous une preuve géométrique.



Soit G l'isobarycentre de B, C, D. Puisque P est parallèle au plan BCD, IJ est parallèle à BC. Le milieu K1 de IJ et le milieu D1 de BC sont alignés avec A. Donc L et G se trouve dans le plan ADD1. On montre de même que L et G se trouvent dans le plan ABB1 (si B1 est le milieu de DC). On en déduit que A, L, G sont alignés puisqu'ils appartiennent à l'intersection de 2 plans.
Donc L se trouve sur la droite (AG). Lorsque I décrit AB, L décrit le segment AG.
Le lieu de H est alors facile puisque CH $\perp$ HB, H se trouve sur la sphère de diamètre BC.
De plus la droite BLH se trouve dans le plan ABG puisque L décrit le segment AG.
Donc le lieu de H se trouve sur le cercle intersection de la sphère de diamètre BC et du plan ABG.
Ce cercle est de diamètre BO si O est la projection de C sur le plan ABG (son centre est O1 projection de D1 sur le plan ABG). Lorsque L décrit le segment AG, le point H décrit l'arc H0H1 avec :

```
H0 :=projection(droite(B,A),C)
H1 :=projection(droite(B,G),C)
```

XXII - Sujet 073

Pour tout entier naturel non nul n on considère les deux nombres entiers $N = 3n^2 - n + 1$ et $D = 2n - 1$.
Le but de l'exercice consiste à déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de N par D.

Partie expérimentale

1. Déterminer, à l'aide d'un logiciel, les valeurs du reste de la division euclidienne de N par D, pour toutes les valeurs de n comprises entre 1 et 50.
Réponses
On définit les fonctions `N(n)` et `D(n)`, on tape dans une ligne de commande :

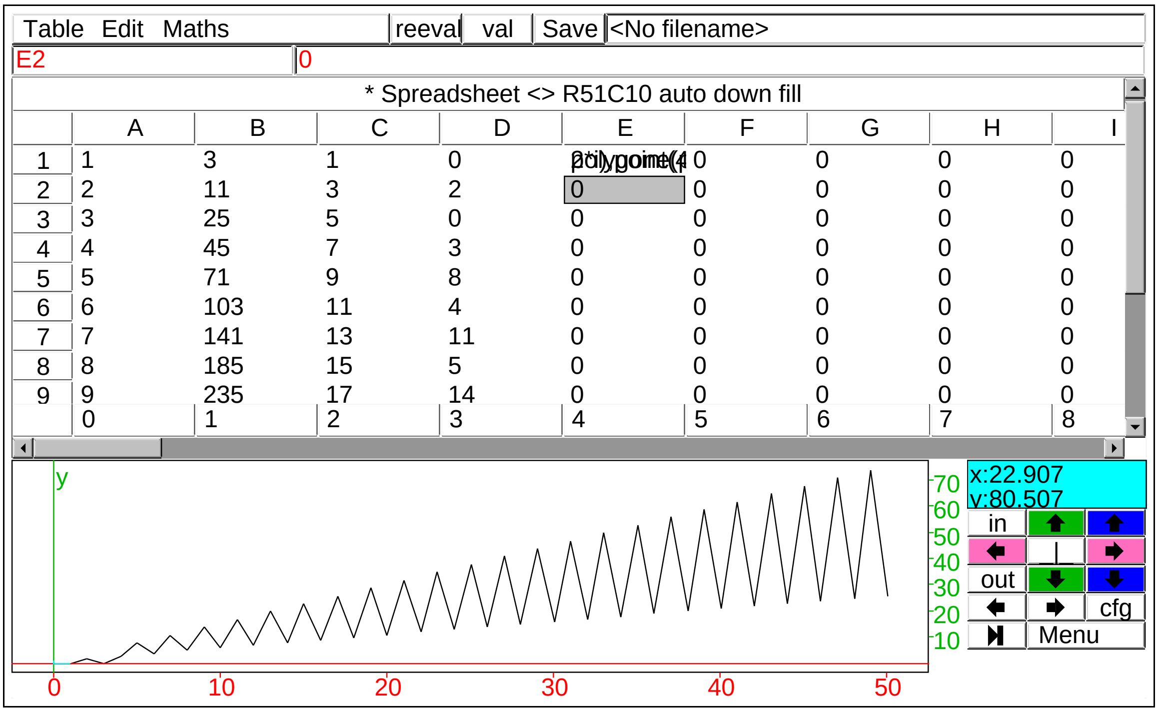
```
N(n) :=3n^2-n+1; D(n) :=2n-1
```

On remplit la colonne `A` avec les entiers `n` (`1` dans `A1` et `=A1+1` dans `A2` recopié vers le bas), la colonne `B` avec `N(n)` (`=N(A1)` dans `B1` recopié vers la bas), et de même la colonne `C` avec `D(n)` et la colonne `D` avec `irem(N(n),D(n))`

2. Représenter graphiquement ce reste en fonction de n.

Réponses

On sélectionne `plotlist` dans le meny `Maths->1-d stats` puis on remplit `plage de cellules` avec `D0 :D50` et on met `E1` dans `cellule cible`. On obtient :



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	3	1	0	polygone(	0	0	0	0
2	2	11	3	2	0	0	0	0	0
3	3	25	5	0	0	0	0	0	0
4	4	45	7	3	0	0	0	0	0
5	5	71	9	8	0	0	0	0	0
6	6	103	11	4	0	0	0	0	0
7	7	141	13	11	0	0	0	0	0
8	8	185	15	5	0	0	0	0	0
9	9	235	17	14	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

On peut aussi mettre en `E1` la formule `=point(A1,D1)` et recopier vers la bas pour avoir un nuage de points.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la représentation obtenue.

3. Conjecturer, suivant les valeurs de n, l'expression du reste R de la division euclidienne de N par D.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture trouvée.

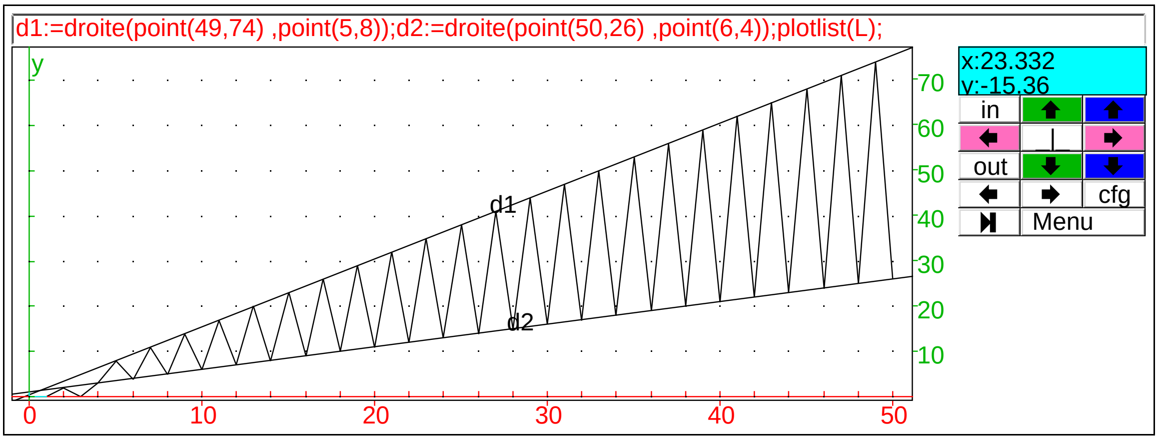
Réponses

Si $n > 3$ les points $2n, R_{2n}$ sont sur une droite et les points $2n+1, R_{2n+}$ sont sur une autre droite.

On sauve `D0 :D50` dans `L` (par exemple en tapant `=(L :=D0 :D50)` dans `F0`) et on tape dans une ligne de commande :

```
d1 :=droite(point(49,74),point(5,8));d2 :=droite(point(50,26),point(6,4));
plotlist(L);
```

On obtient :



On aurait aussi pu remplir la cellule F1 avec `=(d1 :=droite(point(A5,D5),point(A7,D7)))` et la cellule F2 avec `=(d2 :=droite(point(A4,D4),point(A6,D6)))`.
On voit que $n=1$ et $n=3$ ne sont pas sur $d1$. On tape

```
equation(d1);equation(d2);
```

On obtient : `y=((3*x)/2+1/2),y=(x/2+1)`. On conjecture donc pour tout $p>0$:

$$\mathrm{R}(p)=\frac{p}{2}+1, p>0 \text{ pair}, \quad \mathrm{R}(n)=\frac{3n+1}{2}, n>3 \text{ impair}, \quad \mathrm{R}(1)=0, \mathrm{R}(3)=0$$

4. **Partie démonstration** La conjecture formulée est-elle vraie ? Justifier.
Réponses
Pour $p>0$ pair, $p/2+1$ est un entier positif et $p/2+1<2p-1$. De plus

$$\frac{3p^2-p+1-(p/2+1)}{2p-1}=\frac{3p}{2}$$

est entier donc le reste de $\mathrm{N}(p)$ par $\mathrm{D}(p)$ est bien $p/2+1$.
Pour $n>3$ impair, $(3n+1)/2$ est un entier positif et $(3n+1)/2<2n-1$ (égalité en $n=3$). De plus

$$\frac{3n^2-n+1-(3n+1)/2}{2n-1}=\frac{3n-1}{2}$$

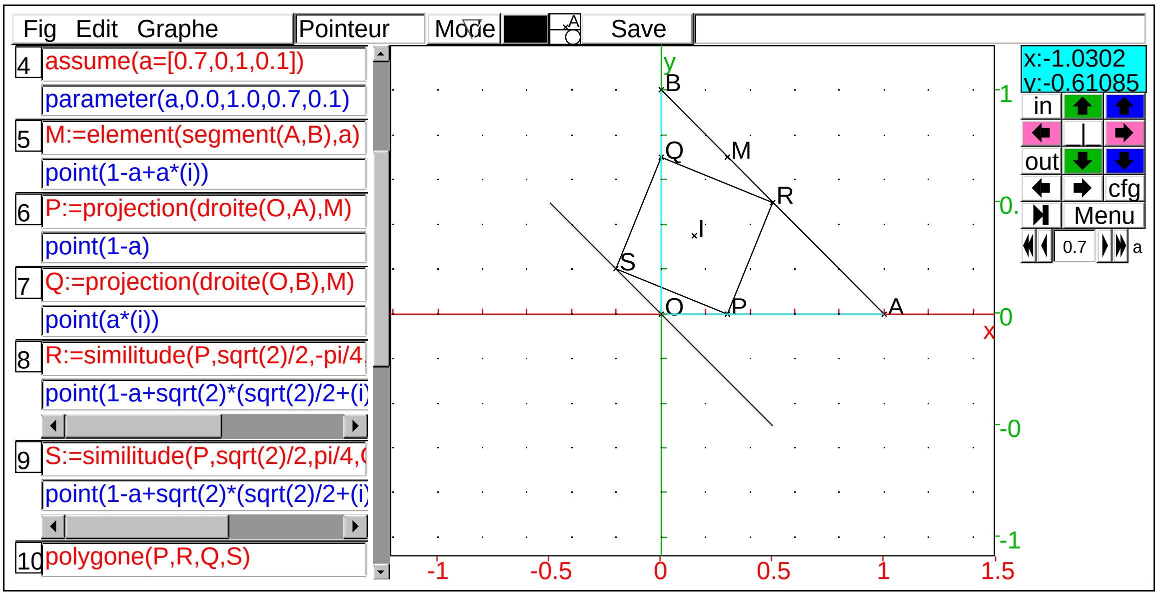
est entier donc le reste de $\mathrm{N}(n)$ par $\mathrm{D}(n)$ est bien $(3n+1)/2$. Il reste les cas $n=1$ et $n=3$ dont le résultat est donné par le tableur. La conjecture formulée est donc vraie.

XXIII - Sujet 090

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(0;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ on considère les points $\mathrm{A}(1;0)$ et $\mathrm{B}(0;1)$. À tout point M du segment [AB], on associe les points P et Q, projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (OA) et (OB), et les points R et S, sommets du carré PRQS de diagonale [PQ] tels que $(\overrightarrow{\mathrm{PR}},\overrightarrow{\mathrm{PS}})=\frac{\pi}{2}$. On note aussi I le milieu du segment [PQ].
Le but de l'exercice est d'étudier les lieux des points R et S lorsque M décrit le segment [AB].

Partie expérimentale

1. (a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
Appeler l'examinateur pour vérification de la figure.
Réponses



(b) Visualiser les lieux des points R et S quand M décrit le segment [AB], puis émettre une conjecture sur la nature de ces lieux.
Appeler l'examinateur pour vérification de la conjecture.
Réponses
Le point R est fixe confondu avec le milieu O1 de AB. Le point S décrit le translaté du segment AB dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O1O}$.
(c) Déterminer de manière expérimentale une équation du lieu du point S.
Appeler l'examinateur pour vérifier la réponse et expliquer les manipulations effectuées.
Réponses
Le point S décrit le translaté du segment AB dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O1O}$, donc son équation est $y = -x$ avec $-0.5 \leq x \leq 0.5$.
On tape : `LS :=lieu(S,M);equation(LS)`
On obtient : `y=(-x)`

2. Dans cette question, on se propose d'étudier ces conjectures en se plaçant dans le plan complexe. On appelle x l'abscisse du point M, avec $x \in [0;1]$.
(a) Montrer que l'affixe de M est : $x + i(1-x)$.
(b) Determiner l'affixe de R ou celle de S. Justifier l'une des conjectures émises à la question 1.
Réponses
(a) M est sur la droite (AB) d'équation $y = -x+1$ donc M a pour affixe $x+i(-x+1)$. On définit le nombre complexe

$$k1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\exp(-i\frac{\pi}{4})$$

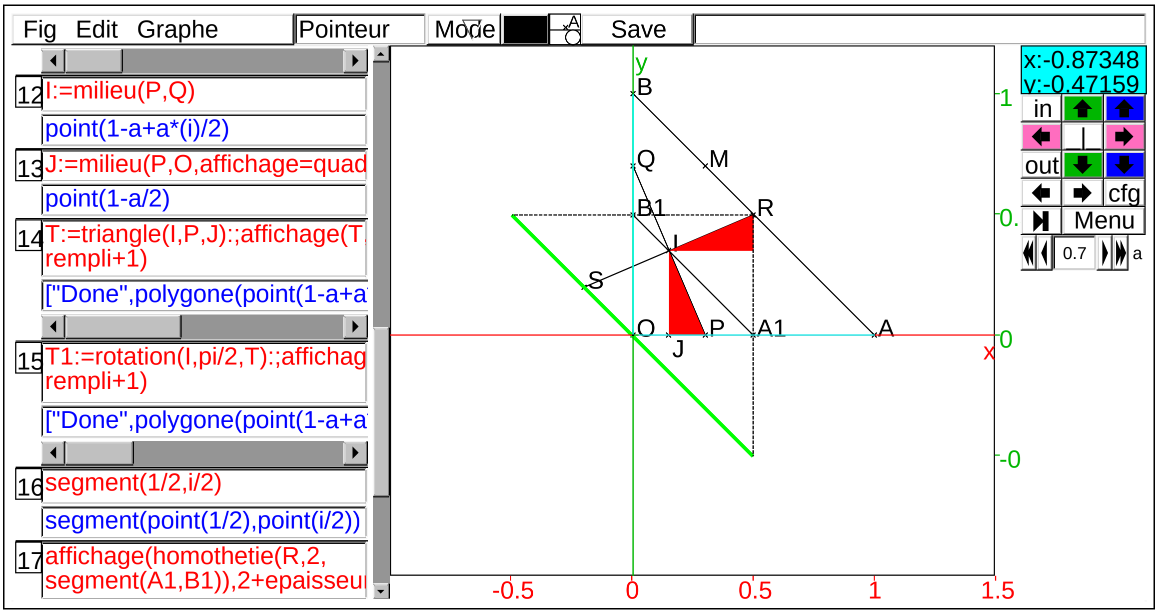
On tape :`k1 :=normal(sqrt(2)/2*exp(-i*pi/4))` qui renvoie `(1-i)/2`
On a $z(\mathrm{R}) - z(\mathrm{P}) = k1 * (z(\mathrm{Q}) - z(\mathrm{P}))$, donc $z(\mathrm{R}) = z(\mathrm{P}) + k1 * (z(\mathrm{Q}) - z(\mathrm{P}))$ avec $z(\mathrm{P}) = x$ et $z(\mathrm{Q}) = i * (1-x)$
On tape `zR :=normal(x+k1*(i*(1- x)-x))` qui renvoie `(1+i)/2`
Le point R est donc le milieu de AB.

On tape `k2 :=normal(sqrt(2)/2*exp(i*pi/4))` qui renvoie `(1-i)/2`
On a : $z(\mathrm{S}) - z(\mathrm{P}) = k2 * (z(\mathrm{Q}) - z(\mathrm{P}))$, donc $z(\mathrm{S}) = z(\mathrm{P}) + k2 * (z(\mathrm{Q}) - z(\mathrm{P}))$ avec $z(\mathrm{P}) = x$ et $z(\mathrm{Q}) = i * (1-x)$
On tape : `zS :=normal(x+k2*(i*(1- x)-x))` qui renvoie `(-1+i)/2+(1-i)*x`

On tape : `re(zS),im(zS)` et on obtient : `1/-2+x,1/2-x`
Donc S est situé sur la droite $Y = -X$ avec $X = x - 1/2$, donc X varie entre -1/2 et 1/2.

3. Partie démonstration géométrique

Réponses



On remarque que I milieu de PQ est aussi le milieu de OM puisque OPMQ est un rectangle. Donc le lieu de I est le segment joignant les milieux A1 et B1 de OA et OB.
La projection J de I sur OA est le milieu de OP et on a :

$$OJ + JI = JP + JI = 1/2$$

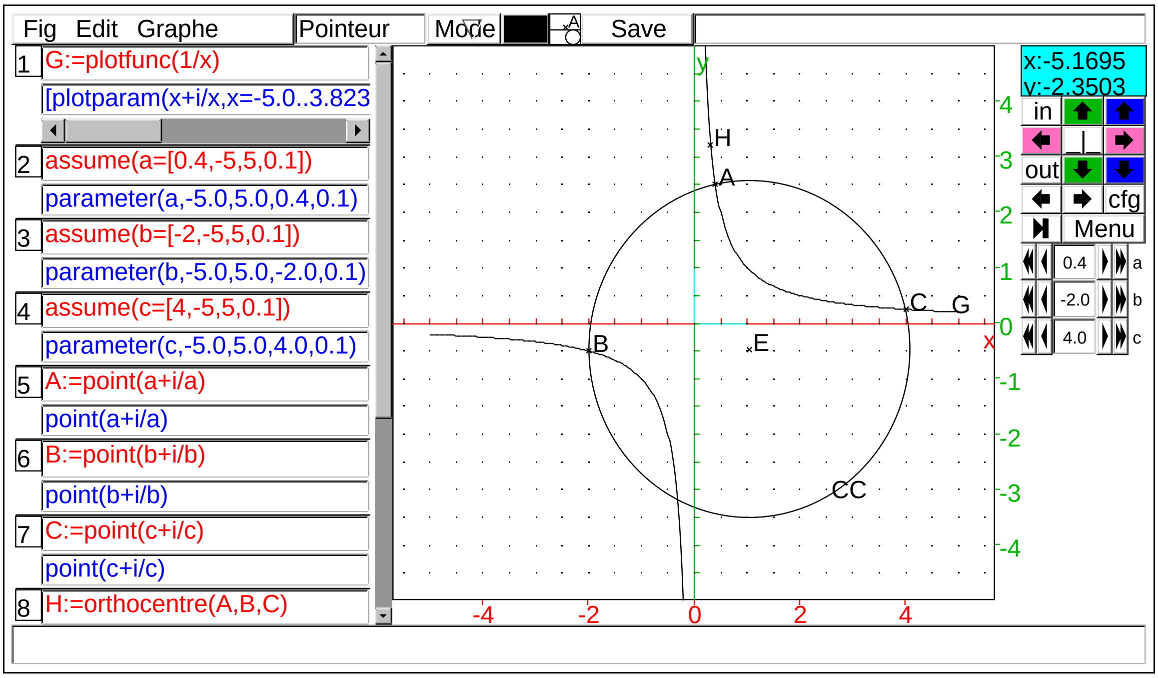
Dans la rotation de centre I et d'angle $\pi/2$, le point P est transformé en le point R. La rotation du triangle IPJ, montre que le point P est transformé en le point d'abscisse $xI + yI = 1/2$ et d'ordonnée $yI + xI = 1/2$ donc en O1 milieu de AB. Donc le point R est le milieu de AB.
Le lieu de S se déduit alors du lieu de I dans l'homothétie de centre R et de rapport 2.

XXIV - Sujet 093

Le plan est rapporté a un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On appelle $\mathscr{G}$ la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.
On désigne par a, b, c trois réels non nuls, deux à deux distincts, puis par A, B, C les points de $\mathscr{G}$ d'abscisses respectives a, b, c. Le point H est l'orthocentre du triangle ABC. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC, son centre est le point E.
Le point D est le symétrique du point H par rapport à O.
Le but de l'exercice est d'observer la position de certains points de la figure et d'étudier celle du point H.

Partie expérimentale

1. (a) Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.
Appeler l'examinateur pour lui montrer la figure construite.
Réponses



(b) Faire varier a, b, c et émettre une ou deux conjectures concernant :
la position du point H,
la position du point D.

Appeler l'examinateur pour vérifier les conjectures.

Réponses

H et D semble sur $\mathscr{G}$ le graphe de $y = 1/x$. De plus D semble être sur le cercle circonscrit.

(c) À l'aide de manipulations appropriées, émettre une conjecture sur les ordonnées des points D et H en fonction de a, b, c, puis sur l'abscisse de H.

Appeler l'examinateur pour vérifier la conjecture.

Réponses

On tape : `simplifier(coordonnees(H))` et on obtient :
`[-(1/(c*b*a)),-a*b*c]`
Donc, l'ordonnée de H vaut $-abc$, l'ordonnée de D vaut abc et l'abscisse de H vaut $-1/(abc)$. H et D sont sur $\mathscr{G}$.

2. Démontrer la conjecture émise sur les coordonnées du point H.

Réponses

Xcas donne déjà une preuve, on peut tout de même vérifier en calculant les coordonnées de l'intersection de deux hauteurs. On a
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0, \quad \overrightarrow{\mathrm{BH}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$
Donc les coordonnées $(h1, h2)$ de H vérifient le système :
$$\begin{cases} (h1-a)(b-c)+(h2-1/a)(1/b-1/c) & = 0 \\ (h1-b)(a-c)+(h2-1/b)(1/a-1/c) & = 0 \end{cases}$$
On peut vérifier en remplaçant $h1$ et $h2$ par les valeurs conjecturées. On peut aussi résoudre le système en tapant :

```
linsolve([(h1-a)*(b-c)+(h2-1/a)*(1/b-1/c),(h1-b)*(a-c)+(h2-1/b)*(1/a-1/c)],[h1,h2])
```

On obtient bien `[-(1/(c*b*a)),-a*b*c]`.

3. Proposer une démarche permettant de démontrer la (ou les) conjecture(s) faite(s) pour le point D (on ne demande pas les calculs mais uniquement le plan proposé).

Réponses
On pourrait calculer le centre du cercle circonscrit, son rayon et vérifier que D est à la bonne distance du centre. On peut aussi tester que le birapport des affixes de A, B, C, D est réel, ou directement demander à Xcas de vérifier la propriété formellement

```
est_cocylique(A,B,C,D)
```

(Xcas utilise le birapport).

XXV - Sujet 097

Le but du probleme est de déterminer tous les entiers naturels n vérifiant la propriete $\mathscr{P}$: « n^2+11 est divisible par $n+11$ ».

Partie expérimentale

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice déterminer tous les entiers naturels n inférieurs ou egaux à $121 = 11^2$ verifiant la propriété $\mathscr{P}$.
   Appeler l'examinateur, lui donner le résultat trouvé et expliquer la méthode utilisée.
   Réponses
   On remplit le tableur :
   – Dans la colonne `A` on met les entiers n,
   – Dans la colonne `B` on met les entiers n^2+11,
   – Dans la colonne `C` on met les entiers $n+11$,
   – Dans la colonne `D` on met `irem(n^2+11,n+11)`
   – Dans la cellule `E` on stocke la colonne `D` sous la forme d'une liste, on tape `=(D :=D0 :D121)`.
   et on cherche les valeurs de n pour lesquelles $D_n = 0$ en parcourant la liste `D`, on trouve : `0,1,11,22,33,55,121`

Table Edit Maths | reeval | val | Save | <No filename>
E0 | =(D:=(D0):(D121))
* Spreadsheet <> R122C10 auto down fill

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	11	11	0	Done	0	0	0	0
1	1	12	12	0	0	0	0	0	0
2	2	15	13	2	0	0	0	0	0
3	3	20	14	6	0	0	0	0	0
4	4	27	15	12	0	0	0	0	0
5	5	36	16	4	0	0	0	0	0
6	6	47	17	13	0	0	0	0	0
7	7	60	18	6	0	0	0	0	0
8	8	75	19	18	0	0	0	0	0
9	9	92	20	12	0	0	0	0	0
10	10	111	21	6	0	0	0	0	0
11	11	132	22	0	0	0	0	0	0
12	12	155	23	17	0	0	0	0	0
13	13	180	24	12	0	0	0	0	0
14	14	207	25	7	0	0	0	0	0
15	15	236	26	2	0	0	0	0	0
16	16	267	27	24	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Plutôt que de parcourir la liste `D`, il est préférable d'écrire un petit programme qui renvoie les indices des éléments nuls d'une liste `L` de longueur `n`. On tape dans un éditeur de programmes (menu Edit->Ajouter->Programme) :

```
sol(L):={
 local j,sol,n;
 n:=size(L);
 sol:=NULL;
 for (j:=0;j<n;j++){
  if (L[j]==0) {sol:=sol,j;}
 }
 return sol;
}:;
```

Puis, on valide le programme avec `OK` et on tape dans une ligne de commandes :

```
sol(D)
```

On obtient `0,1,11,22,33,55,121`

2. On se propose, dans cette partie 2., de démontrer que tout entier naturel n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ est inférieur ou égal à 121.

   (a) Pour tout n entier naturel, calculer $a = n^2 + 11 - (n+11)(n-11)$.

   Appeler l'examinateur, lui donner la valeur trouvée pour a et lui indiquer la méthode prévue pour résoudre la question 2.(b)

   (b) Démontrer que tout n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ est inférieur ou égal à 121.

   Réponses

   (a) On utilise l'identité remarquable ou on tape :

   ```
   a :=normal(n^2+11-(n+11)*(n-11))
   ```

   On obtient `132`.

   (b) Donc $n+11$ divise n^2+11 si et seulement si $n+11$ divise 132. En particulier $n+11 \leq 132$ donc $n \leq 121$.

3. Conclure en donnant l'ensemble des entiers naturels vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

   Réponses

   On prend la liste des diviseurs de 132 dont on retire 11, on enlève les valeurs négatives. On tape `idivis(132)` qui renvoie `[1,2,4,3,6,12,11,22,44,33,66,132]`. D'où la liste des n qui conviennent $1, 0, 11, 33, 22, 55, 121$.