SUR LES THÉORÈMES D'ANNULATION ET DE FINITUDE DE T. OHSAWA ET O. ABDELKADER

Jean-Pierre DEMAILLY
Institut Fourier
B.P. 74
38402 – ST MARTIN D'HERES, France

L'objet de cette note est de donner une démonstration aussi simple que possible des théorèmes d'annulation et de finitude dus à T. Ohsawa [7], [8], et des généralisations de ces théorèmes obtenues par O. Abdelkader [1], [2].

Soit X une variété analytique complexe de dimension n . On suppose que X est faiblement 1-complète, c'est-à-dire que X possède une fonction d'exhaustion plurisousharmonique ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on se donne un fibré linéaire holomorphe hermitien E au-dessus de X . Nous redémontrons les résultats suivants.

Théorème d'annulation [1], [8]. — *Si la variété X est kählérienne et si la forme de courbure de E est semi-positive de rang $\geqslant s$ en tout point de X , alors*

$$H^{p,q}(X,E) = 0 \quad pour \quad p+q \geqslant 2n-s+1 \ .$$

Théorème de finitude [2], [7]. — *On suppose que la forme de courbure de E est semi-positive de rang $\geqslant s$ en tout point du complémentaire $X \setminus Y$ d'une partie compacte $Y \subset X$, et que X possède une métrique hermitienne α qui est kählérienne sur $X \setminus Y$. Alors* $\dim H^{p,q}(X,E) < +\infty$ *pour* $p+q \geqslant 2n-s=1$.

Théorème d'isomorphisme [2], [7]. — *Soit ψ une fonction d'exhaustion plurisousharmonique de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X . Notons $X_c = \{x \in X ; \psi(x) < c\}$, $c \in \mathbb{R}$. On suppose que X, Y, E vérifient les hypothèses du théorème de finitude. Si X_c contient le compact Y , alors le morphisme de restriction*

$$H^{p,q}(X,E) \to H^{p,q}(X_c,E)$$

est un isomorphisme pour $p+q \geqslant 2n-s+1$.

Notations. — Dans toute la suite, on se donne une métrique α kählérienne sur X (resp. hermitienne sur X et kählérienne sur $X \setminus Y$) , et une fonction d'exhaustion plurisousharmonique ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X (l'existence de α et ψ résulte des hypothèses). On considère également une métrique hermitienne ω sur X , qui sera construite ultérieurement à l'aide de α et ψ . On désigne par $D = D' + D''$ la connexion canonique de E , par $c(E) = D^2$ sa forme de courbure, par $\delta = \delta' + \delta''$ l'adjoint de D relativement à la métrique ω . On note enfin L l'opérateur de multiplication extérieure par ω , et Λ l'adjoint de L . Si A, B sont des endomorphismes de degrés respectifs a, b de l'espace $\mathcal{C}^\infty_{\bullet,\bullet}(X,E) = \oplus \mathcal{C}^\infty_{p,q}(X,E)$ des formes différentielles sur X à valeurs dans E , on note $[A,B] = AB - (-1)^{ab} BA$. Les opérateurs de Laplace-Beltrami Δ' et Δ'' sont alors définis par

$$\Delta' = [D', \delta'] = D'\delta' + \delta' D' \ , \quad \Delta'' = [D'', \delta''] \ .$$

1. Théorème d'annulation

Nous utiliserons l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne sous la forme énoncée dans [3] (on pourrait en fait se contenter des formules moins précises de P. Griffiths [4] ou de J. Le Potier [6]). Cette identité s'écrit

$$\Delta'' = \Delta'_\tau + [ic(E), \Lambda] + T_\omega \tag{1.1}$$

avec

$$\begin{aligned}\tau &= [\Lambda, d'\omega] \ , \\ \Delta'_\tau &= [D' + \tau, \delta' + \tau^*] \ , \\ T_\omega &= [\Lambda, [\Lambda, \frac{i}{2} d'd''\omega]] - [d'\omega, (d'\omega)^*] \ .\end{aligned}$$

Le symbole $d'\omega$ doit être interprété ici comme étant l'opérateur de multiplication extérieure par la $(2,1)$-forme $d'\omega$; τ est donc un opérateur de type $(1,0)$ et d'ordre 0 . Par définition, Δ'_τ est un opérateur autoadjoint $\geqslant 0$. Par intégration de $\langle \Delta'' u, u\rangle$ relativement à l'élément de volume $dV = \frac{\omega^n}{n!}$, on déduit de (1.1) l'inégalité

$$\int_X (|D''u|^2 + |\delta'' u|^2) dV \geqslant \int_X (\langle [ic(E), \Lambda]u, u\rangle + \langle T_\omega u, u\rangle) dV \tag{1.2}$$

pour toute forme $u \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(X, E)$ à support compact.

Soient $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de $ic(E)$ relativement à ω ; notons $\lambda_I = \sum_{j \in I} \lambda_j$, $I \subset \{1, \ldots, n\}$. Pour toute forme u de type (p,q) à valeurs dans E écrite relativement à une base orthonormée de TX qui diagonalise $ic(E)$, un calcul classique donne (*cf.* par exemple [3]) :

$$\langle [ic(E), \Lambda]u, u\rangle = \sum_{|I|=p, |J|=q} (\lambda_I - \lambda_{\complement J}) |u_{I,J}|^2 \ . \tag{1.3}$$

Soient χ, ρ deux fonctions convexes croissantes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note E_χ le fibré E muni de la métrique déduite de celle de E par multiplication par $\exp(-\chi \circ \psi)$, et on pose

$$\begin{aligned}\omega &= ic(E_\chi) + \exp(-\rho \circ \psi)\alpha \\ &= ic(E) + id'd''(\chi \circ \psi) + \exp(-\rho \circ \psi)\alpha \ .\end{aligned} \tag{1.4}$$

Lemme 1.5. — *La fonction ρ étant fixée, on peut pour tout $\varepsilon > 0$ choisir χ à croissance assez rapide pour que $|T_\omega|_\omega \leqslant \varepsilon$.*

Des calculs triviaux donnent en effet

$$\begin{aligned}d'\omega &= -\rho' \circ \psi \ \exp(-\rho \circ \psi) \ d'\psi \wedge \alpha \ , \\ d'd''\omega &= \exp(-\rho \circ \psi) \left[\left((\rho' \circ \psi)^2 - \rho'' \circ \psi \right) d'\psi \wedge d''\psi - \rho' \circ \psi \ d'd''\psi \right] \wedge \alpha \ ,\end{aligned}$$

et comme

$$\omega \geqslant i(\chi' \circ \psi \ d'd''\psi + \chi'' \circ \psi \ d'\psi \wedge d''\psi) + \exp(-\rho \circ \psi)\alpha \ ,$$

on obtient les majorations

$$\begin{aligned}|d'\omega|_\omega &\leqslant \rho' \circ \psi \ |d'\psi|_\omega \ |\exp(-\rho \circ \psi)\alpha|_\omega \leqslant \rho' \circ \psi \ (\chi'' \circ \psi)^{-\frac{1}{2}} \\ |d'd''\omega|_\omega &\leqslant \frac{(\rho' \circ \psi)^2 + \rho'' \circ \psi}{\chi'' \circ \psi} + \frac{\rho' \circ \psi}{\chi' \circ \psi} \ .\end{aligned}$$

$\square$

Désignons par λ_j^χ (resp. $\lambda_j^{\chi,\rho}$) les valeurs propres de $ic(E_\chi)$ par rapport à α (resp. ω) , rangées par ordre croissant. Le principe du minimax entraîne $\lambda_j^\chi \geqslant \lambda_j^0$, et on a par hypothèse $0 < \lambda_{n-s+1}^0 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}^0 \leqslant \lambda_n^0$. En diagonalisant $ic(E_\chi)$ par rapport à α , on trouve

$$1 \geqslant \lambda_j^{\chi,\rho} = \frac{\lambda_j^\chi}{\lambda_j^\chi + \exp(-\rho\circ\psi)} \geqslant \frac{\lambda_j^0}{\lambda_j^0 + \exp(-\rho\circ\psi)} \ . \tag{1.6}$$

Lemme 1.7. — *Si l'on choisit ρ en sorte que* $\exp(-\rho\circ\psi) \leqslant \frac{1}{n}\lambda_{n-s+1}^0$ *, alors pour tous multi-indices I, J de longueurs p, q telles que $p+q \geqslant 2n-s+1$, on a*

$$\lambda_I^{\chi,\rho} - \lambda_{\complement J}^{\chi,\rho} \geqslant \frac{q}{n+1} \ .$$

En effet d'après (1.6), il vient $\lambda_j^{\chi,\rho} \geqslant \frac{1}{1+1/n}$ si $j \geqslant n-s+1$, d'où

$$\lambda_I^{\chi,\rho} - \lambda_{\complement J}^{\chi,\rho} \geqslant \frac{p-(n-s)}{1+1/n} - (n-q) \geqslant \frac{n-q+1}{1+1/n} - (n-q) = \frac{q}{n+1} \ . \qquad \square$$

Notons $\|\ \|_\chi$ les normes L^2 globales relatives à la métrique de E_χ sur les fibres, et à la métrique hermitienne ω sur X . Avec le choix de ρ donné par le lemme 1.7, les inégalités (1.2, 1.3, 1.5) entraînent pour toute (p,q)-forme u de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans X et à valeurs dans E l'estimation L^2 suivante :

$$\|D''u\|_\chi^2 + \|\delta''u\|_\chi^2 \geqslant \left(\frac{q}{n+1} - \varepsilon\right)\|u\|_\chi^2 \ . \tag{1.8}$$

Notons $\mathcal{C}$ le cône des fonctions convexes croissantes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'après ce qui précède, il existe $\chi_0 \in \mathcal{C}$ telle que pour tout $\chi \in \chi_0 + \mathcal{C}$ l'inégalité (1.8) soit valide et la métrique ω complète. Pour $\chi \in \mathcal{C}$, soit

$$H^{p,q}(X, E_\chi)$$

le groupe de D''-cohomologie en degré q du complexe des $(p,\cdot)$-formes u à coefficients L^2_{loc} à valeurs dans E , telles que u et $D''u$ appartiennent à $L^2_{p,\cdot}(\chi, E_\chi)$. Les méthodes L^2 classiques de Hörmander [5] entraînent alors

$$H^{p,q}(X, E_\chi) = 0 \quad \text{si} \quad \chi \in \chi_0 + \mathcal{C} \ .$$

Lemme 1.9. — *On a la décomposition en réunion filtrante croissante* $L^2_{p,\cdot}(X, E, \mathrm{loc}) = \cup_{\chi\in\mathcal{C}} L^2_{p,\cdot}(X, E_\chi)$.

Preuve. — En tout point $x \in X$, la norme relativement à ω d'une forme scalaire donnée décroît avec ω et donc aussi avec χ ; comme les normes $\|\ \|_\chi$ sont calculées avec l'élément de volume $dV = \frac{\omega^n}{n!}$ et avec le poids $\exp(-\chi\circ\psi)$ sur les fibres, il suffit de voir qu'on peut choisir χ en sorte que la fonction $(\chi'\circ\psi + \chi''\circ\psi)^n \exp(-\chi\circ\psi)$ soit arbitrairement petite à l'infini. Ceci résulte du lemme 3.1 démontré plus loin. $\square$

Du lemme 1.9, on déduit aussitôt par passage à la limite inductive :

$$H^{p,q}(X, E) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \chi\in\chi_0+\mathcal{C}}} \mathrm{ind}\ H^{p,q}(X, E_\chi) = 0 \ .$$

2. Théorème de finitude

Fixons des réels $a < b < c$ tels que $Y \subset X_a = \{x \in X ; \psi(x) < a\}$. Avec la notation (1.4), on peut choisir la fonction $\rho < 0$ de valeur absolue assez grande sur $]-\infty, a]$ pour que la métrique ω soit définie positive sur X_a , et $\rho > 0$ assez grande sur $[b, +\infty[$ pour que l'inégalité (1.6) ait lieu sur $X \setminus X_b$. Le lemme 1.5 s'appliquera de même là où $d\alpha = 0$, donc en particulier sur $X \setminus X_b$. On en déduit l'existence d'une fonction $\chi_0 \in \mathcal{C}$ telle que pour tout $\chi \in \chi_0 + \mathcal{C}$ on ait une inégalité de la forme

$$\|u\|_\chi^2 \leqslant C_1 \left(\|D''u\|_\chi^2 + \|\delta''u\|_\chi^2 + \int_{X_b} |u|_\chi^2 dV \right) \tag{2.1}$$

où C_1 est une constante $\geqslant 0$ indépendante de χ . Dans la suite, on fixera $\chi = \chi_0$ sur $]-\infty, c]$ et on ne fera varier χ que sur l'intervalle $]c, +\infty[$.

Lemme 2.2. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un nombre fini de formes* f_j *dans* $L^2_{p,q}(X_b, E_{\chi_0})$, $1 \leqslant j \leqslant N = N(\varepsilon)$, *telles que pour tout* $u \in \mathrm{Dom}\ (D'') \cap \mathrm{Dom}\ (\delta'')$ *on ait*

$$\int_{X_b} |u|_{\chi_0}^2 dV \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} |\int_{X_b} \langle f_j, u\rangle_{\chi_0} dV|^2 + \varepsilon \int_{X_c} \left(|u|_{\chi_0}^2 + |D''u|_{\chi_0}^2 + |\delta''u|_{\chi_0}^2 \right) dV \ .$$

On sait en effet que l'opérateur Δ'' est elliptique. Le lemme de Rellich entraîne que l'ensemble des restrictions à X_b des (p,q)-formes u vérifiant

$$|\int_{\chi_0} \langle f, u\rangle_{\chi_0} dV|^2 + \varepsilon \int_{X_c} \left(|u|_{\chi_0}^2 + |D''u|_{\chi_0}^2 + |\delta''u|_{\chi_0}^2 \right) dV \leqslant 1$$

est une partie relativement compacte K_f de $L^2_{p,q}(X_b, E_{\chi_0})$. Puisque l'intersection des adhérences $\overline{K}_f$ est réduite à $\{0\}$ lorsque f décrit $L^2_{p,q}(X_b, E_{\chi_0})$, il existe un nombre fini d'éléments f_j tels que l'intersection des K_{f_j} soit contenue dans la boule unité de $L^2_{p,q}(X_b, E_{\chi_0})$. □

Si nous appliquons le lemme 2.2 avec $\varepsilon = 1/2C_1$ en prolongeant f_j par 0 sur $X \setminus X_b$, l'inégalité (2.1) implique

$$\|u\|_\chi^2 \leqslant C_2 \left(\|D''u\|_\chi^2 + \|\delta''u\|_\chi^2 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} |\langle f_j, u\rangle_\chi|^2 \right) \tag{2.3}$$

pour tout $u \in \mathrm{Dom}\ D'' \cap \mathrm{Dom}\ \delta''$. Soit $h \in L^2_{p,q}(X, E_\chi)$ une forme telle que $D''h = 0$. Notons P et P' les projecteurs orthogonaux sur $\ker D''$ et $(\ker D'')^\perp$ respectivement, opérant dans $L^2_{p,q}(X, E_\lambda)$. Comme $(\ker D'')^\perp = \overline{\mathrm{Im}\,\delta''} \subset \ker \delta''$, (2.3) entraîne pour tout $u \in \mathrm{Dom}\ \delta''$ l'estimation

$$\begin{aligned} |\langle h, u\rangle_\chi|^2 = \langle h, Pu\rangle_\chi|^2 &\leqslant C_2 \|h\|_\chi^2 \left(\|\delta''Pu\|_\chi^2 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} |\langle f_j, Pu\rangle_\chi|^2 \right) \\ &= C_2 \|h\|_\chi^2 \left(\|\delta''u\|_\chi^2 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} |\langle Pf_j, u\rangle_\chi|^2 \right) \ . \end{aligned}$$

Le théorème de Hahn-Banach montre alors qu'on peut écrire

$$\langle h, u\rangle_\chi = \langle g, \delta''u\rangle_\chi + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} c_j \langle Pf_j, u\rangle_\chi$$

avec $g \in L^2_{p,q-1}(X, E_\chi)$ et $c_j \in \mathbb{C}$, d'où

$$h = D''g + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} c_j . Pf_j \ .$$

On en déduit par conséquent $\dim H^{p,q}(X, E_\chi) \leqslant N$, d'où par passage à la limite inductive la majoration

$$\dim H^{p,q}(X, E) \leqslant N \ .$$

3. Théorème d'isomorphisme

Nous allons montrer que le morphisme de restriction

$$H^{p,q}(X, E) \to H^{p,q}(X_c, E) \ , \quad p + q \geqslant 2n - s + 1 \ ,$$

est un isomorphisme dès que $X_c \supset Y$. Dans ce but, nous aurons besoin de construire des fonctions convexes d'un type particulier, ayant une croissance rapide mais régulière.

LEMME 3.1. — *Pour toute fonction croissante* $\gamma : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, *il existe une fonction* $\mu \in \mathcal{C}$ *vérifiant les propriétés suivantes sur* $[0, +\infty[$:

(a) $\mu \geqslant \gamma$, $\mu' \geqslant \gamma$, $\mu'' \geqslant \gamma$, μ'' *croissante;*

(b) les fonctions $\mu' \exp(-\frac{1}{n}\mu)$, $\mu'' \exp(-\frac{1}{n}\mu)$ *sont décroissantes;*

(c) $\mu' \exp(-\frac{1}{n}\mu) \leqslant \exp(-\gamma)$, $\mu'' \exp(-\frac{1}{n}\mu) \leqslant \exp(-\gamma)$.

Démonstration. — Les conditions (b) équivalent à $\mu'' - \frac{1}{n}\mu'^2 \leqslant 0$ et $\mu''' - \frac{1}{n}\mu'\mu'' \leqslant 0$; il suffit donc que la fonction $\mu'' - \frac{1}{2n}\mu'^2$ soit $\leqslant 0$ décroissante, ou encore (puisque μ' est > 0 croissante) que $-\frac{\mu''}{\mu'} + \frac{1}{2n}\mu'$ soit $\geqslant 0$ croissante. Ceci équivaut à dire que la fonction

$$\theta = -\log\left[\frac{1}{2n}\mu' \exp(-\frac{1}{2n}\mu)\right]$$

est convexe croissante. Inversement, si on suppose donnée une fonction $\theta \in \mathcal{C}$, toute fonction μ obtenue par ce procédé est telle que $\frac{d}{dt}[\exp(-\frac{1}{2n}\mu)] = -e^{-\theta}$, d'où la solution

$$\mu(t) = -2n \log\left[\int_t^{+\infty} e^{-\theta(u)} du\right] \ . \tag{3.2}$$

Reste à vérifier que les conditions *(a,c)* peuvent être satisfaites pour un choix convenable de θ . Si l'on suppose $\theta'(0) \geqslant 1$, il vient

$$\int_t^{+\infty} e^{-\theta(u)} du \leqslant \frac{1}{\theta'(t)} \int_t^{+\infty} \theta'(u) e^{-\theta(u)} du = \frac{e^{-\theta(t)}}{\theta'(t)} \leqslant e^{-\theta(t)} \tag{3.3}$$

d'où $\mu \geqslant 2n\theta$. D'après (3.2) et (3.3), on obtient d'autre part

$$\mu'(t) = 2n \left[\int_t^{+\infty} e^{\theta(t)-\theta(u)} du\right]^{-1} \geqslant 2n\theta'(t) \ ,$$

$$\mu''(t) = 2n \left[1 - \theta'(t) \int_t^{+\infty} e^{\theta(t)-\theta(u)} du\right] \left[\int_t^{+\infty} e^{\theta(t)-\theta(u)} du\right]^{-2} \ . \tag{3.4}$$

On observe que $\int_t^{+\infty} \theta'(u) e^{\theta(t)-\theta(u)} du = 1$, donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\left[\int_t^{+\infty} e^{\theta(t)-\theta(u)} du\right]^2 \leqslant \int_t^{+\infty} \frac{1}{\theta'(u)} e^{\theta(t)-\theta(u)} du \ . \tag{3.5}$$

Grâce à une intégration par parties, il vient maintenant

$$1-\theta'(t)\int_t^{+\infty} e^{\theta(t)-\theta(u)}du = \theta'(t)\int_t^{+\infty} \frac{\theta''(u)}{\theta'(u)^2} e^{\theta(t)-\theta(u)}du\ . \tag{3.6}$$

En combinant (3.4, 3.5, 3.6) il s'ensuit $\mu''(t) \geqslant 2n\theta''(t)$, si on suppose que la fonction θ''/θ' est croissante. Un dernier calcul fastidieux nous donne

$$\begin{aligned}\mu'''(t) = 2n\Bigg\{ & \left[2-\theta'(t)\int_t^{+\infty} e^{\theta(t)-\theta(u)}du\right]\left[1-\theta'(t)\int_t^{+\infty} e^{\theta(t)-\theta(u)}du\right] \\ & -\theta''(t)\left[\int_t^{+\infty} e^{\theta(t)-\theta(u)}du\right]^2\Bigg\}\left\{\int_t^{+\infty} e^{\theta(t)-\theta(u)}du\right\}^{-3} .\end{aligned}$$

Si on minore $\left[2-\theta'(t)\int_t^{+\infty} e^{\theta(t)-\theta(u)}du\right]$ par 1 et si on utilise l'inégalité $\mu'' \geqslant 2n\theta''$, on voit alors que $\mu''' \geqslant 0$, par suite μ'' est bien croissante. Enfin, par définition de μ :

$$\mu'(t)\exp(-\frac{1}{n}\mu(t)) = 2ne^{-\theta(t)}\int_t^{+\infty} e^{-\theta(u)}du \leqslant 2ne^{-2\theta(t)}\ ,$$

$$\mu''(t)\exp(-\frac{1}{n}\mu(t)) = 2n\left[1-\theta'(t)\int_t^{+\infty} e^{\theta(t)-\theta(u)}du\right]e^{-2\theta(t)} \leqslant 2ne^{-2\theta(t)}\ .$$

Il ne reste donc plus qu'à construire une fonction $\theta \in \mathcal{C}$ telle que $\theta, \theta', \theta'' \geqslant \gamma$, avec $\theta(0) \geqslant \log 2n$, $\theta'(0) \geqslant 1$ et θ''/θ' croissante. Il suffit pour cela de poser

$$\theta(t) = \log 2n + \int_0^{t+1} e^{\eta(u)}du$$

où $\eta \in \mathcal{C}$ a la propriété que $\eta \geqslant \log\gamma$ et $\eta'(0) \geqslant 0$, $\eta'(0) \geqslant 1$. □

Nous introduisons maintenant une nouvelle relation d'ordre sur les fonctions, notée $\lll$, strictement plus fine que la relation $\leqslant$.

DÉFINITION 3.7. — *Si χ_1, χ_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, nous écrirons $\chi_1 \lll \chi_2$ si*

(a) $\chi_1 \leqslant \chi_2\ ,\quad \chi_1' \leqslant \chi_2'\ ,\quad \chi_1'' \leqslant \chi_2''\ ;$

(b) $\chi_1'\exp(-\frac{1}{n}\chi_1) \geqslant \chi_2'\exp(-\frac{1}{n}\chi_2)\ ,\ \chi_1''\exp(-\frac{1}{n}\chi_1) \geqslant \chi_2''\exp(-\frac{1}{n}\chi_2)\ .$

L'intérêt de cette définition réside dans l'observation suivante : si ω_{χ_1} et ω_{χ_2} sont les métriques associées par la formule (1.4) à deux fonctions $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{C}$ telles que $\chi_1 \lll \chi_2$, alors

$$\omega_{\chi_1} \leqslant \omega_{\chi_2}\ ,\quad \omega_{\chi_1}^n \exp(-\chi_1\circ\psi) \geqslant \omega_{\chi_2}^n\exp(-\chi_2\circ\psi)\ ,\quad \|\ \|_{\chi_1} \geqslant \|\ \|_{\chi_2}\ . \tag{3.8}$$

Pour simplifier les calculs qui suivent, nous supposerons que la fonction d'exhaustion ψ est $\geqslant 0$ et que $0 < c < 1$ (on peut toujours se ramener à ce cas en remplaçant ψ par $\varepsilon\psi + \frac{1}{2}$, avec $\varepsilon > 0$).

LEMME 3.9. — *Pour toute fonction croissante $\gamma : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, il existe :*

(a) une fonction convexe $\chi : [0,c[\to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés du lemme 3.1 relativement à la fonction croissante $\gamma_c(t) = \gamma(\frac{1}{c-t})$;

(b) une suite de fonctions $\chi_k \in \mathcal{C}$ vérifiant le lemme 3.1 relativement à γ et convergeant vers χ dans $\mathcal{C}^\infty([0,c[)$, telles que $\chi_k \lll \chi_{k+1}$ sur $[0,+\infty[$ et $\chi_k \lll \chi$ sur $[0,c[$.

Démonstration. — Si μ_γ est la fonction donnée par le lemme 3.1, on pose

$$\begin{aligned}
\chi(t) &= \mu_\gamma(\frac{1}{c-t}) + \frac{4n}{c-t} , \quad t \in [0,c[,\\
P_k(t) &= \sum_{0 \leqslant m \leqslant N_k} (t+1-c-\frac{1}{k})^m , \quad t \in [0,+\infty[,\\
\chi_k(t) &= \mu_\gamma(P_k(t)) + 4nP_k(t) , \quad t \in [0,+\infty[,
\end{aligned}$$

où N_k est une suite strictement croissante d'entiers que nous choisirons ultérieurement. $P_k(t)$ converge vers $1/(1-(t+1-c)) = 1/(c-t)$, donc χ_k converge bien vers χ dans $\mathcal{C}^\infty([0,c[)$. La vérification des inégalités 3.7 *(a)* pour la relation $\chi_k \lll \chi_{k+1}$ est triviale, car l'expression $P_k(t)$ est croissante aussi bien par rapport à k que par rapport à t ; de même les propriétés 3.1 *(a)* pour $\mu = \chi_k$ résultent de ce que $P_k(t) \geqslant t$, $P_k'(t) \geqslant 1$ si $k > 1/(1-c)$. Il est clair aussi que $\mu = \chi$ vérifie 3.1 *(a)*, car $\chi^{(m)}(t) \geqslant \mu_\gamma^{(m)}(\frac{1}{c-t}) \geqslant \gamma(\frac{1}{c-t})$, $0 \leqslant m \leqslant 2$. Pour obtenir 3.1 *(b,c)* avec $\mu = \chi_k$, on observe que

$$(3.10) \qquad \begin{cases}
\chi_k' \exp(-\frac{1}{n}\chi_k) = (4n + \mu_\gamma' \circ P_k) \exp(-\frac{1}{n}\mu_\gamma \circ P_k) P_k' \exp(-4P_k) \\
\chi_k'' \exp(-\frac{1}{n}\chi_k) = (4n + \mu_\gamma' \circ P_k) \exp(-\frac{1}{n}\mu_\gamma \circ P_k) P_k'' \exp(-4P_k) \\
\qquad\qquad + \mu_\gamma'' \circ P_k \exp(-\frac{1}{n}\mu_\gamma \circ P_k) P_k'^2 \exp(-4P_k) .
\end{cases}$$

Quitte à remplacer γ par $\gamma+$ constante, on voit qu'il suffit de montrer que les fonctions $P_k' \exp(-2P_k)$ et $P_k'' \exp(-4P_k)$ sont décroissantes en t . Cela résulte de ce que les polynômes $P_k''-2P_k'^2$ et $P_k'''-4P_k'P_k'' = \frac{d}{dt}(P_k''-2P_k'^2)$ sont à coefficients $\leqslant 0$: le coefficient de $(t+1-c-\frac{1}{k})^m$ dans P_k'' est $(m+1)(m+2)$ si $m \leqslant N_k - 2$, tandis que dans $P_k'^2$ il vaut

$$(m+1) + 2m + 3(m-1) + \cdots \geqslant \frac{(m+1)(m+2)}{2} .$$

Il nous reste seulement à vérifier les inégalités 3.7 *(b)* pour le couple (χ_k, χ_{k+1}) . Pour cela, il suffit de montrer que l'on peut choisir la suite N_k en sorte que les suites $k \mapsto P_k' \exp(-2P_k)$, $k \mapsto P_k'' \exp(-4P_k)$ soient décroissantes. Considérons pour k fixé la limite

$$L_k(t) = \lim_{N_k \to +\infty} P_k'(t) \exp(-2P_k(t)) ,$$

$$L_k(t) = \begin{cases}
(c+\frac{1}{k}-t)^{-2} \exp(-2(c+\frac{1}{k}-t)^{-1}) & \text{si} \quad t < c+\frac{1}{k} \\
0 & \text{si} \quad t \geqslant c+\frac{1}{k} .
\end{cases}$$

La fonction $t \mapsto (c-t)^{-2}\exp(-2(c-t)^{-1})$ est décroissante sur $[0,c[$. On en déduit que $L_k(t) < L_{k-1}(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant c + \frac{1}{k-\frac{1}{2}}$, tandis que pour $t \geqslant c + \frac{1}{k-\frac{1}{2}} > c + \frac{1}{k}$ il vient :

$$P_{k-1}'(t) \exp(-2P_{k-1}(t)) \geqslant \exp\left(-2(N_{k-1}+1)\left(t+1-c-\frac{1}{k}\right)^{N_{k-1}}\right) ,$$

$$P_k'(t)\exp(-2P_k(t)) \leqslant N_k^2\left(t+1-c-\frac{1}{k}\right)^{N_k-1}\exp\left(-2\left(t+1-c-\frac{1}{k}\right)^{N_k}\right)\ .$$

Par conséquent $P_{k-1}'\exp(-2P_{k-1}) > P_k'\exp(-2P_k)$ si N_{k-1} , N_k et N_k/N_{k-1} sont assez grands. Même raisonnement pour la suite $P_k''\exp(-4P_k)$. □

Fixons maintenant des fonctions χ, χ_k vérifiant le lemme 3.9, telles que la métrique ω_χ (resp. ω_{χ_k}) soit complète sur X_c . On suppose désormais que $p+q \geqslant 2n-s+1$. Alors $H^{p,q}(X_c, E_\chi)$ et $H^{p,q}(X, E_{\chi_k})$ sont de dimension finie (théorème de finitude).

Nous allons montrer que le morphisme de restriction

$$H^{p,q}(X, E_{\chi_k}) \to H^{p,q}(X_c, E_\chi) \tag{3.11}$$

est un isomorphisme pour k assez grand; simultanément, nous prouverons les estimations L^2 suivantes, qui précisent les propriétés de surjectivité et d'injectivité. La première exprime en fait une propriété de densité asymptotique.

Proposition 3.12. — *Pour toute forme D''-fermée $h \in L^2_{p,q}(X_c, E_\chi)$, il existe une suite de formes D''-fermées $h_k \in L^2_{p,q}(X_c, E_{\chi_k})$ telles que*

(a) $\lim\limits_{k\to+\infty} \|h-h_k\|_\chi = 0$ *sur* X_c ;

(b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a = a(\varepsilon) < c$ et un indice $k_0(\varepsilon)$ tels que

$$\|\mathbb{I}_{X\setminus X_a} h_k\|_{\chi_k} \leqslant \varepsilon \quad \textit{pour} \quad k \geqslant k_0(\varepsilon)\ .$$

Proposition 3.13. — *Il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de k et un entier k_1 tels que la propriété suivante soit réalisée pour tout $k \geqslant k_1$. Soit $h \in L^2_{p,q}(X, E_{\chi_k})$ une forme D''-fermée dont la classe de cohomologie est nulle en restriction à $H^{p,q}(X_c, E_\chi)$. Alors il existe $g \in L^2_{p,q}(X, E_{\chi_k})$ telle que $D''g = h$ et $\|g\|_{\chi_k} \leqslant C_2\|h\|_{\chi_k}$.*

Nous démontrons les propositions 3.12, 3.13 et la propriété d'isomorphisme par récurrence sur q , le résultat étant trivial pour $q > n$. Supposons les résultats vrais en degré $q+1$, et démontrons-les en degré q . Le schéma du raisonnement est le suivant :

$(3.13_{q+1}) \Longrightarrow (3.12_q) \Longrightarrow (3.13_q)$;
(3.12_q) et th. de finitude $\Longrightarrow$ surjectivité du morphisme (3.11);
$(3.13_q) \Longrightarrow$ injectivité du morphisme (3.11) (implication évidente).

• *Preuve de :* $(3.13_{q+1}) \Longrightarrow (3.12_q)$.

Par construction de χ_k , il existe une suite croissante $b_k \in [0, c[$ convergeant vers c telle que sur X_{b_k} on ait l'encadrement

$$\|\ \|_\chi \leqslant \|\ \|_{\chi_k} \leqslant 2\|\ \|_\chi\ .$$

Puisque la métrique ω_χ est supposée complète sur X_c , il existe une suite $a_k \in [0, b_k[$ convergeant vers c et une suite de fonctions $\theta_k \in \mathcal{C}^\infty(X_c)$ telles que

$$0 \leqslant \theta_k \leqslant 1\ ,\quad \theta_k = 1 \quad \text{sur} \quad X_{a_k}\ ,\quad \mathrm{Supp}(\theta_k) \subset X_{b_k}\ ,\quad \max_{X_c}|d\theta_k|_\chi \leqslant 1\ .$$

Soit $h \in L^2_{p,q}(X_c, E_\chi)$ une forme D''-fermée sur X_c . La forme $\theta_k h$ prolonge h à X , mais elle n'est pas fermée. On est donc amené à résoudre l'équation

$$D''g = D''(\theta_k h) = d''\theta_k \wedge h \tag{3.14}$$

en bidegré $(p,q+1)$. Posons $\eta_k = \|\mathbb{1}_{X\setminus X_{a_k}} h\|_\chi$; η_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Le choix de b_k implique

$$\|d''\theta_k \wedge h\|_{\chi_k} \leqslant 2\|d''\theta_k \wedge h\|_\chi \leqslant 2\eta_k \ ,$$

et la classe de cohomologie de $d''\theta_k \wedge h = D''(\theta_k h)$, restreinte à $H^{p,q}(X_c, E_\chi)$, est nulle par définition. D'après la proposition 3.13 appliquée en bidegré $(p,q+1)$, l'équation (3.14) admet pour k assez grand une solution $g_k \in L^2_{p,q}(X, E_{\chi_k})$ telle que $\|g_k\|_{\chi_k} \leqslant 2C_2\eta_k$. Posons $h_k = \theta_k h - g_k$. La forme h_k est alors D''-fermée sur X ; comme $\| \ \|_\chi \leqslant \| \ \|_{\chi_k}$ sur X_c , il vient :

$$\|h - h_k\|_\chi \leqslant \|g_k\|_{\chi_k} + \|(1-\theta_k)h\|_\chi \longrightarrow 0 \ ,$$

$$\|\mathbb{1}_{X\setminus X_{a_m}} h_k\|_{\chi_k} \leqslant \|g_k\|_{\chi_k} + 2\|\mathbb{1}_{X_{b_k}\setminus X_{a_m}} h\|_\chi \leqslant 2C_2\eta_k + 2\eta_m$$

pour $k \geqslant m$. La proposition (3.12_q) est donc démontrée. □

• *Preuve de :* $(3.12_q) \Longrightarrow$ *surjectivité du morphisme* (3.11).

Rappelons le lemme classique suivant :

LEMME 3.15. — *Sous l'hypothèse* $\dim H^{p,q}(X_c, E_\chi) < +\infty$, *l'opérateur*

$$D''_{p,q-1} : L^2_{p,q-1}(X_c, E_\chi) \supset \mathrm{Dom}\ D''_{p,q-1} \to \ker D''_{p,q} \subset L^2_{p,q}(X_c, E_\chi)$$

est d'image fermée, et on a la somme directe orthogonale

$$\ker D''_{p,q} = \mathrm{Im}\, D''_{p,q-1} \oplus \mathcal{H}$$

où $\mathcal{H}$ *est l'espace des formes harmoniques* $f \in L^2_{p,q}(X_c, E_\chi)$ *(i.e. telles que* $D''f = \delta'' f = 0$*)* .

En effet $\ker D''_{p,q}$ est fermé, et par définition on a

$$\mathcal{H} = \ker \mathcal{D}''_{\surd,\mathrm{II}} \cap \ker \delta''_{\surd,\mathrm{II}} = \ker \mathcal{D}''_{\surd,\mathrm{II}} \cap (\mathrm{Im}\, \mathcal{D}''_{\surd,\mathrm{II}-\infty})^\perp \ .$$

Il suffit donc de voir que $\mathrm{Im}\, D''_{p,q-1}$ est fermée. Or, l'opérateur $D''_{p,q-1} : \mathrm{Dom}\ D''_{p,q-1} \to \ker D''_{p,q}$ peut être considéré comme un opérateur borné entre espaces de Hilbert si Dom $D''_{p,q-1}$ est muni de la norme du graphe (lequel graphe est fermé dans $L^2_{p,q-1} \times L^2_{p,q}$). Comme l'image de $D''_{p,q-1}$ est de codimension finie dans $\ker D''_{p,q}$, elle admet un supplémentaire S de dimension finie. Le théorème d'isomorphisme de Banach appliqué au morphisme bijectif

$$D''_{p,q-1} \oplus i_S : (\mathrm{Dom}\ D''_{p,q-1} / \ker D''_{p,q-1}) \oplus S \to \ker D''_{p,q}$$

implique que $\mathrm{Im}\, D''_{p,q-1}$ est fermée. Le lemme 3.15 est démontré.

Soit $(f^1, \ldots, f^N)$ une base orthonormée de $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^{\surd,\mathrm{II}}(\mathcal{X}_\rfloor, \mathcal{E}_\chi)$. D'après (3.12_q) , on peut trouver des suites de formes D''-fermées $f^1_k, \ldots, f^N_k \in L^2_{p,q}(X, E_{\chi_k})$, telles que $\|f^j_k - f^j\|_\chi$ tende vers 0 quand k tend vers $+\infty$, et vérifiant de plus 3.12 *(b)*. La projection de f^j_k sur $\mathcal{H}$ converge donc vers f^j , par suite les restrictions de $f^1_k, \ldots, f^N_k$ à $H^{p,q}(X_c, E_\chi)$ forment une base de cet espace pour k assez grand. □

• *Preuve de* : $(3.12_q) \Longrightarrow (3.13_q)$.

Fixons $b < c$ tel que $Y \subset X_b$. Nous allons d'abord établir le lemme suivant :

LEMME 3.16. — *Pour tout* $\eta > 0$, *il existe un entier* $k_1(\eta)$ *et une constante* $C_3 = C_3(\eta)$ *tels que pour tout* $k \geqslant k_1(\eta)$ *et tout* $u \in \mathrm{Dom}\ D'' \cap \mathrm{Dom}\ \delta''$ *on ait l'inégalité*

$$\int_{X_b} |u|^2_{\chi_k} dV \leqslant \eta \|u\|^2_{\chi_k} + C_3 \left(\|D''u\|^2_{\chi_k} + \|\delta'' u\|^2_{\chi_k} + \sum_{j=1}^N |\langle f^j_k, u\rangle_{\chi_k}|^2 \right) \ .$$

Démonstration. — Si le lemme était faux, on pourrait trouver une partie infinie $A \subset \mathbb{N}$ et une suite de fonctions $u_k \in L^2_{p,q}(X, E, \mathrm{loc})$, $k \in A$, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\int_{X_b} |u_k|^2_{\chi_k} dV \geqslant 1 \ ; \tag{3.17}$$

$$\|u_k\|_{\chi_k} \leqslant \frac{1}{\eta} \ ; \tag{3.18}$$

$$\|D''u_k\|^2_{\chi_k} + \|\delta''u_k\|^2_{\chi_k} + \sum_{j=1}^{N} |\langle f^j_k, u_k\rangle_{\chi_k}|^2 \to 0 \ . \tag{3.19}$$

Comme χ_k converge vers χ dans $\mathcal{C}^\infty([0,c[)$, les propriétés (3.18, 3.19) et le lemme de Rellich montrent que la suite u_k est relativement compacte dans $L^2_{p,q}(X_c, E, \mathrm{loc})$. On peut donc trouver une sous-suite infinie u_k , $k \in B \subset A$, convergeant en norme L^2 sur tout compact de X_c vers une forme u . De (3.18, 3.19) on déduit $\|u\|_\chi \leqslant 1/\eta$ et $D''u = \delta''u = 0$, donc $u \in \mathcal{H}$. La propriété 3.12 *(b)* relative à la suite (f^j_k) implique également $\langle f^j, u\rangle_\chi = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Par suite $u = 0$ sur X_c , ce qui est en contradiction avec (3.17). Le lemme 3.16 est donc démontré. □

On a maintenant une estimation a priori analogue à (2.1), du type

$$\|u\|^2_{\chi_k} \leqslant C_1 \left(\|D''u\|^2_{\chi_k} + \|\delta''u\|^2_{\chi_k} + \int_{\chi_b} |u|^2_{\chi_k} dV \right) \tag{3.20}$$

où C_1 est une constante > 0 indépendante de k . Si nous appliquons le lemme 3.16 pour $\eta = 1/2C_1$ et si nous le combinons avec (3.20), il vient pour tout $k \geqslant k_1$ et tout $u \in \mathrm{Dom}\, D'' \cap \mathrm{Dom}\, \delta''$ l'inégalité

$$\|u\|^2_{\chi_k} \leqslant C_4 \left(\|D''u\|^2_{\chi_k} + \|\delta''u\|^2_{\chi_k} + \sum_{j=1}^{N} |\langle f^j_k, u\rangle_{\chi_k}|^2 \right) \ .$$

Soit $h \in L^2_{p,q}(X, E_{\chi_k})$ une forme D''-fermée sur X . Avec des notations analogues à celles du §2, on obtient pour tout $u \in \mathrm{Dom}\, \delta''$:

$$\begin{aligned} |\langle h, u\rangle_{\chi_k}|^2 = |\langle h, Pu\rangle_{\chi_k}|^2 &\leqslant C_4 \|h\|^2_{\chi_k} \left(\|\delta''Pu\|^2_{\chi_k} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} |\langle f^j_k, Pu\rangle_{\chi_k}|^2 \right) \\ &\leqslant C_4 \|h\|^2_{\chi_k} \left(\|\delta''u\|^2_{\chi_k} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} |\langle f^j_k, u\rangle_{\chi_k}|^2 \right) \ . \end{aligned}$$

Le théorème de Hahn-Banach implique l'existence d'une forme $g \in L^2_{p,q-1}(X, E_{\chi_k})$ et de scalaires $c_j \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, tels que

$$h = D''g + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} c_j f^j_k \ ,$$

et

$$\|g\|^2_{\chi_k} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} |c_j|^2 \leqslant C_4 \|h\|^2_{\chi_k} \ .$$

La restriction à $H^{p,q}(X_c, E_\chi)$ de la classe de cohomologie de h coïncide avec celle de $\sum c_j f^j_k$. Si cette classe est nulle, on a donc $c_1 = \cdots = c_N = 0$, par suite $h = D''g$. □

Comme les fonctions convexes χ et χ_k peuvent être choisies à croissance arbitrairement rapide, l'isomorphisme de restriction $H^{p,q}(X,E_{\chi_k}) \xrightarrow{\sim} H^{p,q}(X_c,E_\chi)$ donne par passage à la limite inductive un isomorphisme $H^{p,q}(X,E) \xrightarrow{\sim} H^{p,q}(X_c,E)$ si $p+q \geqslant 2n-s+1$.

Bibliographie

[1] O. ABDELKADER. — *Annulation de la cohomologie d'une variété kählérienne faiblement 1-complète à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe semi-positif*, C. R. Acad. Sc. Paris, **290** (1980), 75-78 et Thèse de 3e cycle à l'Université Paris VI (1980).

[2] O. ABDELKADER. — *Théorèmes de finitude pour la cohomologie d'une variété faiblement 1-complète à valeurs dans un fibré en droites semi-positif*, Thèse de Doctorat d'Etat à l'Université Paris VI, 1985.

[3] J.P. DEMAILLY. — *Sur l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne*, Séminaire P. Lelong - P. Dolbeault - H. Skoda (Analyse) 1983/84, Lecture Notes in Maths., Springer-Verlag, **1198** (1984), 88-97.

[4] P.A. GRIFFITHS. — *The extension problem in complex analysis II*, Amer. J. of Math, **88** (1966), 366-446.

[5] L. HÖRMANDER. — *An introduction to Complex Analysis in several variables*, North-Holland Publishing Company, 2nd edition, 1973.

[6] J. LE POTIER. — *Problèmes d'extension de classes de cohomologie*, Thèse de Doctorat d'Etat à l'Université de Poitiers, 1974.

[7] T. OHSAWA. — *Finiteness theorems on weakly 1-complete manifolds*, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. n° 3, **15** (1979), 853-870.

[8] T. OHSAWA. — *On $H^{p,q}(X,B)$ of weakly 1-complete manifolds*, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., **17** (1981), 113-126.