

Séminaire P.LELONG, H.SKODA
(Analyse)
17e année, 1976/77.

DIFFÉRENTS EXEMPLES DE FIBRÉS HOLOMORPHES NON DE STEIN

par J.-P.DEMAILLY

Introduction.

Le présent travail se rattache au problème posé en 1953 par J.-P.SERRE (cf. [3]) de savoir si un espace fibré analytique dont la base et la fibre sont des variétés de Stein est lui-même une variété de Stein.

Depuis lors de nombreux résultats avaient été obtenus, apportant tous des réponses partielles positives. En 1977, H.SKODA montrait néanmoins par un contre-exemple que la réponse générale était négative ; nous renvoyons à [4] et [5] pour le contre-exemple ainsi que pour une liste complète de références.

Dans ce contre-exemple, la fibre est \mathbb{C}^2 , la base est un ouvert de \mathbb{C} , les automorphismes de transition sont localement constants et à croissance exponentielle.

La démonstration repose essentiellement sur l'inégalité de P.LELONG relative à la croissance des fonctions plurisousharmoniques sur les fibres, que nous rappelons en préliminaires. Il en résulte que s'il existe une fonction holomorphe non triviale sur le fibré, les automorphismes de transition ne peuvent pas être trop déformants et doivent vérifier des conditions assez restrictives à l'infini. Nous reprenons les arguments de H.SKODA [5] dans la deuxième partie.

Une question naturelle posée dans [5] était de savoir si le type exponentiel des automorphismes jouait un rôle fondamental. Nous montrons au paragraphe 3 qu'il suffit en fait de prendre des automorphismes de transition polynomiaux, de degré 2 lorsque la base est bien choisie, le problème se ramenant à un calcul d'enveloppe pseudo-convexe.

Dans la quatrième partie nous examinons par les mêmes méthodes le cas où la base est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , et donnons un exemple de fibré non de Stein à fibre \mathbb{C}^2 au dessus d'une telle base. Les automorphismes de transition sont dans ce cas de type exponentiel, et il nous semble que la croissance polynomiale soit insuffisante pour obtenir le même phénomène.

Je suis heureux de remercier ici le professeur H.SKODA pour la générosité avec laquelle il m'a accordé son temps. Je lui dois en particulier plusieurs améliorations dans la rédaction du manuscrit original, et je lui en suis très reconnaissant.

1. Préliminaires : l'inégalité de P.LELONG.

Soit Ω une variété analytique connexe de dimension p ,

V une fonction plurisousharmonique (en abrégé p.s.h.) sur $\Omega \times \mathbb{C}^n$,

ω un ouvert relativement compact de Ω .

On mesure la croissance de V sur les fibres en posant :

$$M(V, \omega, r) = \sup_{x \in \bar{\omega}, |z| \leq r} V(x, z) \quad (1)$$

où $r \in \mathbb{R}_+$ et où $|z| = \sup_{1 \leq j \leq n} |z_j|$.

D'après P.LELONG [2], $M(V, \omega, r)$ est une fonction convexe croissante de $\log r$, strictement croissante pour r assez grand si V est non constante sur au moins une fibre au-dessus de ω .

LEMME 1. - Si Ω est un ouvert de \mathbb{C}^p , $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega_3$ trois polydisques concentriques de rayons $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ relativement compacts dans Ω , et V une fonction p.s.h. sur $\Omega \times \mathbb{C}^n$, alors :

$$(2) \quad M(V, \omega_2, r) \leq M(V, \omega_1, r^\sigma) + \mu [M(V, \omega_3, 1) - M(V, \omega_1, r^\sigma)]$$

$$(3) \quad \text{avec } \sigma = \frac{\log \rho_3 / \rho_1}{\log \rho_3 / \rho_2} \quad \mu = 1 - \frac{1}{\sigma} = \frac{\log \rho_2 / \rho_1}{\log \rho_3 / \rho_1} .$$

Démonstration. Supposons $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ centrés en 0

$M(\rho, r)$ est une fonction convexe des variables $u = \text{Log } \rho$, $v = \text{Log } r$ (cf. par exemple [2], prop. 2.3.3. et 6.2.1.).

On considère dans le plan des (u, v) les trois points A_1, A_2, A_3 définis par :

$$\begin{aligned} A_1 & : u_1 = \log \rho_1 & v_1 & = \log r \\ A_2 & : u_2 = \log \rho_2 & v_2 & = \lambda \log r \\ A_3 & : u_3 = \text{Log } \rho_3 & v_3 & = 0 . \end{aligned}$$

On choisit le paramètre λ de sorte que $A_2 = \lambda A_1 + (1 - \lambda) A_3$
soit $\lambda = \frac{\log \rho_2 - \log \rho_3}{\log \rho_1 - \log \rho_3} = \frac{\log \rho_3 / \rho_2}{\log \rho_3 / \rho_1}$.

On en déduit par convexité de $(u, v) \mapsto M(e^u, e^v)$:

$$M(\rho_2, r^\lambda) \leq \lambda M(\rho_1, r) + (1 - \lambda) M(\rho_3, 1)$$

soit avec $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ $\mu = 1 - \lambda$ et après remplacement de r par r^σ :

$$M(\rho_2, r) \leq M(\rho_1, r^\sigma) + \mu [M(\rho_3, 1) - M(\rho_1, r^\sigma)]$$

ce qui est bien la relation (2).

COROLLAIRE 1. - Si V est non constante sur au moins une fibre au-dessus de ω_2 , il existe $r_0 > 0$ tel que :

$$M(V, \omega_2, r) \leq M(V, \omega_1, r^\sigma) \text{ pour } r \geq r_0 .$$

En effet $M(V, \omega_2, r)$ est convexe croissante en $\log r$, et non constante pour r assez grand, donc $M(V, \omega_2, r)$ tend vers $+\infty$ quand r tend vers $+\infty$.

D'après (2) $M(V, \omega_1, r)$ tend également vers $+\infty$, d'où la conclusion.

COROLLAIRE 2 (inégalité de P. LELONG). - Soit Ω une variété analytique connexe de dimension p , V une fonction p.s.h. sur $\Omega \times \mathbb{C}^n$ non constante sur au moins une fibre, et ω_1, ω_2 deux ouverts relativement compacts de Ω .

Il existe une constante σ ne dépendant que de $\omega_1, \omega_2, \Omega$ et une

constante r_0 dépendant en outre de V telles que

$$(4) \quad M(V, \omega_2, r) \leq M(V, \omega_1, r^\sigma) \text{ pour } r \geq r_0.$$

Démonstration: immédiate grâce au Corollaire 1 en utilisant la connexité de Ω et des arguments de compacité.

2. Construction du fibré X . Restrictions sur la croissance d'une fonction plurisousharmonique non triviale (H.SKODA [5]) .

On considère maintenant des ouverts $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_N$ de \mathbb{C}^n , connexes, tels que $\Omega_0 \cap \Omega_j$, $1 \leq j \leq N$ ait deux composantes connexes Ω_j' Ω_j'' , et tels que $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ pour $1 \leq j < k \leq N$.

On prend pour base B du fibré l'ouvert $B = \bigcup_{j=0}^N \Omega_j$.

On définit le fibré X en recollant les cartes locales trivialisantes :

$$\tau_j : X|_{\Omega_j} \longrightarrow \Omega_j \times \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \tau_0 : X|_{\Omega_0} \longrightarrow \Omega_0 \times \mathbb{C}^2$$

par les automorphismes de transition $\tau_{j0} = \tau_j \circ \tau_0^{-1}$ suivants :

$$(5) \quad \begin{aligned} \tau_{j0}(x, z) &= (x, g_j(z)) \quad \text{si } x \in \Omega_j' \quad z \in \mathbb{C}^n \\ &= (x, z) \quad \text{si } x \in \Omega_j'' \quad z \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

où les g_j sont des automorphismes analytiques de \mathbb{C}^n ($1 \leq j \leq N$).

Une fonction p.s.h. V sur X est définie par la donnée de fonctions p.s.h.

$$V_j = V \circ \tau_j^{-1} \text{ sur } \Omega_j \times \mathbb{C}^n \text{ pour } 0 \leq j \leq N \text{ telles que}$$

pour $1 \leq j \leq N$, on ait :

$$(6) \quad \begin{aligned} V_0(x, z) &= V_j(x, g_j(z)) \quad \text{quand } x \in \Omega_j' \\ V_0(x, z) &= V_j(x, z) \quad \text{quand } x \in \Omega_j'' . \end{aligned}$$

Si h est un automorphisme de \mathbb{C}^n , nous écrirons abusivement

$$V \circ h(x, z) = V(x, h(z)) .$$

Etant donné deux fonctions φ, ψ sur \mathbb{R}_+ nous noterons $\varphi \sim \psi$ la relation d'équivalence :

"il existe des constantes $\sigma > 0$ et $r_0 > 0$ telles que

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\leq \psi(r^\sigma) \\ \psi(r) &\leq \varphi(r^\sigma) \quad \text{pour } r \geq r_0 . \end{aligned}$$

On se donne alors des ouverts $\omega_0, \omega_j', \omega_j''$ ($1 \leq j \leq N$) relativement compacts respectivement dans $\Omega_0, \Omega_j', \Omega_j''$.

Appliquons trois fois la relation (4) du corollaire 2 dans les cartes, en supposant que V est non constante sur une fibre :

• à la fonction $V_j \circ g_j \circ h$ et au couple d'ouverts $\Omega_j', \Omega_j'' \subset \Omega_j$
 $M(V_j \circ g_j \circ h, \omega_j', r) \sim M(V_j \circ g_j \circ h, \omega_j'', r)$ soit d'après (6)

$$M(V_0 \circ h, \omega_j', r) \sim M(V_0 \circ g_j \circ h, \omega_j'', r)$$

• à la fonction $V_0 \circ h$ et au couple $\omega_0, \omega_j' \subset \Omega_0$:

$$M(V_0 \circ h, \omega_0, r) \sim M(V_0 \circ h, \omega_j', r)$$

• à la fonction $V_0 \circ g_j \circ h$ et au couple $\omega_0, \omega_j'' \subset \Omega_0$:

$$M(V_0 \circ g_j \circ h, \omega_0, r) \sim M(V_0 \circ g_j \circ h, \omega_j'', r) \quad (7)$$

Il vient par transitivité de \sim :

$$M(V_0 \circ g_j \circ h, \omega_0, r) \sim M(V_0 \circ h, \omega_0, r).$$

Prenons pour h un élément du groupe d'automorphismes G engendré par les g_j ; en raisonnant par récurrence sur la longueur de l'écriture formelle de h , on obtient à partir de (7) :

PROPOSITION 1. - Soit h_1, \dots, h_q des automorphismes de \mathbb{C}^n appartenant au groupe G engendré par les g_j . Il existe une constante σ ne dépendant que de ω_0 et de l'écriture formelle des h_j dans G , et une constante r_0 dépendant en outre de V et des h_j telles que :

$$(8) \quad M(V_0 \circ h_j, \omega_0, r) \leq M(V_0, \omega_0, r^\sigma) \quad \text{pour} \quad r \geq r_0.$$

Désignons maintenant par D_r le polydisque $|z| = \sup_{1 \leq j \leq n} |z_j| \leq r$ de \mathbb{C}^n .

L'inégalité (8) s'écrit encore :

$$\sup_{x \in \bar{\omega}_0, z \in \bigcup_{1 \leq j \leq q} h_j(D_r)} V_0(x, z) \leq M(V_0, \omega_0, r^\sigma) \quad \text{pour} \quad r \geq r_0.$$

Notons K_r l'enveloppe pseudo-convexe $\widehat{\bigcup_j h_j(D_r)}$ (c'est aussi l'enveloppe polynomialement convexe d'après HÖRMANDER [1], p. 91, th. 4.3.4.)

et $\hat{r} = \hat{r}(h_1, \dots, h_q)$ le rayon du plus grand polydisque $D_{\hat{r}}$ inclus dans K_r .

Comme V_0 est plurisousharmonique en z , on a par définition de K_r :

$$\sup_{x \in \bar{\omega}_0, z \in \bigcup_j h_j(D_r)} V_0(x, z) = \sup_{x \in \bar{\omega}_0, z \in K_r} V_0(x, z)$$

et a fortiori $M(V_0, \omega_0, \hat{r}) \leq M(V_0, \omega_0, r^\sigma)$ pour $r \geq r_0$.

Si V est non triviale, $M(V_0, \omega_0, r)$ est strictement croissante pour r assez grand, et on en déduit aussitôt :

PROPOSITION 2. - Si le fibré X possède une fonction p.s.h. non constante sur au moins une fibre, il existe des constantes $\sigma > 0$ et $r_0 \geq 0$ telles que :

$$\hat{r}(h_1, \dots, h_q) \leq r^\sigma \quad \text{pour } r \geq r_0 \quad (9)$$

Comme l'a souligné H.SKODA dans son article [5], il est possible de donner une construction plus algébrique du fibré X .

Une autre construction du fibré X :

On choisit la base B de sorte que le groupe fondamental G de B soit un groupe libre à N générateurs $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, opérant sur le revêtement universel \tilde{B} de B .

On fait alors opérer G à gauche sur $\tilde{B} \times \mathbb{C}^n$ proprement et librement en posant :

$$\alpha_j(x, z) = (\alpha_j(x), g_j(z)) \quad \text{où } 1 \leq j \leq N \quad x \in \tilde{B} \quad \text{et } z \in \mathbb{C}^n.$$

L'espace quotient $(\tilde{B} \times \mathbb{C}^n)/G$ est alors un fibré au-dessus de B , à fibre \mathbb{C}^n , et on note

$$p : \tilde{B} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow X \quad \text{la projection.}$$

La donnée d'une fonction p.s.h. V sur X équivaut à la donnée d'une fonction p.s.h. $\tilde{V} = V \circ p$ sur $\tilde{B} \times \mathbb{C}^n$ invariante par l'action de G :

$$(10) \quad \tilde{V}(x, z) = \tilde{V}(\alpha_j(x), g_j(z)) \quad \text{pour } x \in \tilde{B} \quad \text{et } z \in \mathbb{C}^n.$$

On retrouve les résultats de la proposition 1 en considérant pour tout élément (α, h) du groupe libre engendré par les (α_j, g_j) le couple $(\omega_0, \alpha(\omega_0))$ d'ouverts de \tilde{B} .

D'après (10) on a $M(\tilde{V}, \omega_0, r) = M(\tilde{V} \circ h, \alpha(\omega_0), r)$, et d'après (4), \tilde{B} étant connexe :

$$M(\tilde{V}, \omega_0, r) \sim M(\tilde{V} \circ h, \omega_0, r)$$

pour tout h dans le groupe engendré par les g_j , c'est-à-dire l'équivalent de (8).

3. Estimation de \hat{r} , et contre-exemple.

On prend $n = 2$, $N = 1$, autrement dit la fibre est \mathbb{C}^2 , et la base B réunion de deux ouverts Ω_0, Ω_1 .

Définissons $g = g_1$ par $g(z_1, z_2) = (z_1^k - z_2, z_1)$ $k \in \mathbb{N}$ (11)

g est évidemment un automorphisme de \mathbb{C}^2 , et $g^{-1}(z_1, z_2) = (z_2, z_2^k - z_1)$.

Il est clair que $g(D_r) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_2| \leq r \text{ et } |z_2^k - z_1| \leq r\}$
 $g^{-1}(D_r) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_1| \leq r \text{ et } |z_1^k - z_2| \leq r\}$.

Soit V_α la surface de \mathbb{C}^2 définie par l'équation :

$$P(z_1, z_2) = (z_1^k - z_2)(z_2^k - z_1) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

L'ensemble des valeurs α pour lesquelles V_α possède des singularités (« valeurs critiques de P ») est fini : cela résulte du fait général qu'un polynôme n 'a qu'un nombre fini de valeurs critiques, mais nous le vérifierons de façon élémentaire par des calculs explicites.

Soit L_α la partie compacte de V_α définie par :

$$|z_1| \leq \frac{1}{2}r^k \quad |z_2| \leq \frac{1}{k}r^k.$$

• Supposons d'abord que V_α est lisse

Le bord ∂L_α de L_α dans V_α est l'ensemble des points tels que :

$$\text{ou} \quad \begin{array}{ll} |z_1| = \frac{1}{2}r^k & |z_2| \leq \frac{1}{2}r^k \\ |z_1| \leq \frac{1}{2}r^k & |z_2| = \frac{1}{2}r^k \end{array}$$

(∂L_α fait évidemment partie de cet ensemble, et lui est précisément égal car les coordonnées z_1, z_2 définissent des applications ouvertes

$V_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$)

pour $|z_1| = \frac{1}{2}r^k$ $|z_1^k - z_2^k| \geq \frac{1}{2}kr^{k^2} - \frac{1}{2}r^k \geq \frac{1}{2^{k+1}}r^{k^2}$ pourvu que $r^{k-1} \geq 2$.

Cette condition sera assurée si $k \geq 2$, $r \geq 2$, ce qu'on suppose désormais

Sur la partie de ∂L_α définie par $|z_1| = \frac{1}{2}r^k$, on a donc :

$$|z_2^k - z_1^k| \leq \frac{|\alpha|}{r^{k^2/2^{k+1}}}$$

Prenons $|\alpha| \leq \frac{r^{k^2+1}}{2^{k+1}}$; alors $|z_2^k - z_1^k| \leq r$ et comme $|z_1| \leq \frac{1}{2}r^k$ on a $|z_2| \leq r$ (sinon $|z_2^k - z_1^k| > \frac{1}{2}r^k > r$) d'où $(z_1, z_2) \in g(D_r)$.

Par conséquent $\partial L_\alpha \subset g(D_r) \cup g^{-1}(D_r)$ et le principe du maximum appliqué sur V_α donne : $L_\alpha \subset K_r = (g(D_r) \cup g^{-1}(D_r))^\wedge$.

• Cherchons maintenant les valeurs de α pour lesquelles V_α est singulière ; elles sont obtenues pour $dP = 0$:

$$\begin{cases} P = z_1^k z_2^k - z_1^{k+1} - z_2^{k+1} + z_1 z_2 = \alpha & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial P / \partial z_1 = k z_1^{k-1} z_2^k - (k+1)z_1^k + z_2 = 0 & (13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial P / \partial z_2 = k z_1^k z_2^{k-1} - (k+1)z_2^k + z_1 = 0 & (14). \end{cases}$$

En multipliant l'équation (13) par z_1 et (14) par z_2 on voit que :

$$z_1^{k+1} = z_2^{k+1}, \text{ soit } \begin{cases} z_1 = t \\ z_2 = \zeta t \end{cases} \text{ avec } \zeta^{k+1} = 1.$$

Remplaçons dans (12) et (13) :

$$\begin{cases} \zeta^k t^{2k} - 2t^{k+1} + \zeta t^2 = \alpha \\ k \zeta^k t^{2k-1} - (k+1)t^k + \zeta t = 0. \end{cases}$$

Ces équations se résolvent explicitement ; on trouve :

$$t = 0, \quad \alpha = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0$$

$$t = \eta, \quad \alpha = 0, \quad z_1 = \eta, \quad z_2 = \eta^k$$

$$t = \eta/k, \quad \alpha = \eta^{k+1} k^{-\frac{2}{k-1}} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2, \quad z_1 = \eta^k k^{-\frac{1}{k-1}}, \quad z_2 = \eta^k k^{-\frac{1}{k-1}}$$

avec $\eta^{k^2-1} = 1$, $\xi = \eta^{k-1}$.

En particulier les valeurs critiques sont de module $\leq 1 \leq r^2$.

Or pour $|\alpha| \leq r^2$ et $(z_1, z_2) \in L_\alpha$, on a

$$|z_1^k - z_2^k| \leq r \quad \text{ou} \quad |z_2^k - z_1^k| \leq r ,$$

conditions qui impliquent l'une et l'autre $(z_1, z_2) \in K_r$, comme vu au point précédent.

Dans tous les cas , on a $L_\alpha \subset K_r$ pour $|\alpha| \leq \frac{r^{k^2+1}}{2^{k+1}}$ (15)

REMARQUE 1. - En fait le principe du maximum est vrai même sur une surface à singularités ; nous aurions donc pu nous dispenser des calculs précédents, mais il nous a paru intéressant d'étudier les singularités de V_α .

D'après (15) K_r contient l'ensemble :

$$\left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C} ; |z_1| \leq \frac{1}{2}r^k , |z_2| \leq \frac{1}{2}r^k , |z_1^k - z_2^k| \leq \frac{r^{k^2+1}}{2^{k+1}} \right\} .$$

Si maintenant $|z_1|$ et $|z_2| \leq \frac{1}{2}r^{k/2+1/2k}$, on a, par des calculs faciles :

$$|z_1^k - z_2^k| \leq \frac{1}{2^k} r^{\frac{k^2+1}{2}} + \frac{1}{2} r^k \leq \left[\frac{r^{k^2+1}}{2^{k+1}} \right]^{1/2} \quad \text{dès que } r \geq 4 .$$

LEMME 2. - Si $k \geq 2$, $r \geq 4$ $\hat{r}(g, g^{-1}) \geq \frac{1}{2}r^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2k}$.

Si k est assez grand (par exemple $k \geq 2\sigma$ avec la constante σ de la proposition 2), on obtient la contradiction désirée.

THÉORÈME 1. - Le fibré X construit au paragraphe 2 à l'aide de l'automorphisme de \mathbb{C}^2 défini par (11) et avec $k \geq 2\sigma$ ne possède aucune fonction plurisousharmonique et aucune fonction holomorphe non constante sur les fibres ; en particulier X n'est pas une variété de Stein.

Remarquons que si $k = 0$ (resp. $k = 1$) X est un fibré affine (resp. vectoriel) au-dessus d'un ouvert B de Stein (car $B \subset \mathbb{C}$) donc X est lui-même une variété de Stein.

Nous allons maintenant donner un contre-exemple précis pour lequel on pourra prendre $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} \text{Choisissons } B &= \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \Omega_0 &= \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \\ \Omega_1 &= \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[\\ \Omega'_1 &= \{x \in \mathbb{C} ; \text{Im } x < 0\} \\ \Omega''_1 &= \{x \in \mathbb{C} ; \text{Im } x > 0\} \end{aligned}$$

(l'automorphisme g étant toujours défini par (11)).

Explicitons la construction de X comme espace quotient indiquée au paragraphe 1.

Soit $p : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow X$ l'application définie par :

$$\begin{aligned} p(x, z) &= \tau_0^{-1}(e^x, g^{-m}(z)) \text{ pour } (2m-1)\pi < \text{Im } x < (2m+1)\pi \\ &= \tau_1^{-1}(e^x, g^{-m}(z)) \text{ pour } 2m\pi < \text{Im } x < (2m+2)\pi \end{aligned}$$

(on vérifie aisément que les conditions de compatibilité sont satisfaites).

X s'identifie donc à travers p au quotient de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ par le groupe d'automorphismes $G = \{\alpha^m ; m \in \mathbb{Z}\}$ où $\alpha(x, z) = (x + 2i\pi, g(z))$.

Une fonction V sur X est caractérisée par la donnée de $\tilde{V} = V \circ p$ sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ vérifiant

$$(16) \quad \tilde{V}(x+2i\pi, g(z)) = \tilde{V}(x, z) .$$

Notons $\omega_{(a, \rho)} = \{x \in \mathbb{C} ; |x - a| < \rho\}$, où $a \in \mathbb{C}$ et $\rho > 0$

$$\begin{aligned} \text{D'après (16)} \quad M(\tilde{V} \circ g, \omega_{(0,1)}, r) &= M(\tilde{V}, \omega_{(-2i\pi, 1)}, r) \\ M(\tilde{V}, \omega_{(2i\pi, 1)}, r) &= M(\tilde{V} \circ g^{-1}, \omega_{(0,1)}, r) . \end{aligned}$$

En vertu du corollaire 1, avec $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1+2\pi$, ρ_3 grand, il existe pour tout $\sigma > 1$ une constante $r_0(\sigma)$ telle que

$$M(\tilde{V}, \omega_{(-2i\pi, 1)}, r) \leq M(\tilde{V}, \omega_{(0, 1+2\pi)}, r) \leq M(\tilde{V}, \omega_{(0,1)}, r^\sigma)$$

$M(\tilde{V}, \omega_{(2i\pi, 1)}, r) \leq M(\tilde{V}, \omega_{(0, 1+2\pi)}, r) \leq M(\tilde{V}, \omega_{(0,1)}, r^\sigma)$ pour $r \geq r_0(\sigma)$ pourvu que \tilde{V} soit non constante sur au moins une fibre; en posant $\omega = \omega_{(0,1)}$

$$\text{il vient} \quad M(\tilde{V} \circ g, \omega, r) \leq M(\tilde{V}, \omega, r^\sigma)$$

$$M(\tilde{V} \circ g^{-1}, \omega, r) \leq M(\tilde{V}, \omega, r^\sigma) \text{ pour } r \geq r_0(\sigma) .$$

En répétant le raisonnement précédant la proposition 2, on obtient :

LEMME 3. - Si le fibré X possède une fonction plurisousharmonique non constante sur au moins une fibre, il existe pour tout $\sigma > 1$ un nombre $r_0(\sigma) > 0$ tel que :

$$\hat{r}(g, g^{-1}) \leq r^\sigma \quad \text{pour } r \geq r_0(\sigma).$$

Lorsque $k \geq 2$ les lemmes 2 et 3 montrent que X n'a pas de fonction plurisousharmonique non constante sur les fibres (prendre $1 < \sigma < \frac{5}{4}$).

4. Exemple de fibré holomorphe non de Stein à fibre \mathbb{C}^2 au-dessus d'un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} .

Soit B un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} (cette hypothèse n'étant d'ailleurs pas nécessaire dans ce qui suit) contenant les six points :

$$a_1 = 1, a_2 = 1+2i, a_3 = 1-2i, a_4 = -1, a_5 = -1+2i, a_6 = -1-2i.$$

$$\text{On note } \Omega_0 = B \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

$$\Omega_k = \Omega_0 \cup \{a_k\} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 6.$$

On construit un fibré X à fibre \mathbb{C}^2 au-dessus de B par les cartes locales trivialisantes :

$\tau_k : X \rightarrow \Omega_k \times \mathbb{C}^2$ au-dessus de Ω_k ($0 \leq k \leq 6$) avec les automorphismes de transition $\tau_{k\ell} = \tau_k \circ \tau_\ell^{-1}$

$\tau_{k\ell} : \Omega_0 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \Omega_0 \times \mathbb{C}^2$ (si $k \neq \ell$ $\Omega_k \cap \Omega_\ell = \Omega_0$) définis par :

$$\begin{array}{lll} \tau_{01}(x, z) = (x, w) & w_1 = z_1 & w_2 = z_2 \exp(z_1 \varphi(x)) \\ \tau_{02}(x, z) = (x, w) & w_1 = z_1 & w_2 = z_2 \exp(z_1 j \varphi(x)) \\ \tau_{03}(x, z) = (x, w) & w_1 = z_1 & w_2 = z_2 \exp(z_1 j^2 \varphi(x)) \\ \tau_{04}(x, z) = (x, w) & w_1 = z_1 \exp(z_2 \varphi(x)) & w_2 = z_2 \\ \tau_{05}(x, z) = (x, w) & w_1 = z_1 \exp(z_2 j \varphi(x)) & w_2 = z_2 \\ \tau_{06}(x, z) = (x, w) & w_1 = z_1 \exp(z_2 j^2 \varphi(x)) & w_2 = z_2 \end{array}$$

$$\text{avec } x \in \Omega_0 \quad z, w \in \mathbb{C}^2 \quad j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{(x-2i)^2 - 1} + \frac{1}{(x+2i)^2 - 1}\right)$$

et $\tau_{k\ell} = \tau_{ok}^{-1} \circ \tau_{o\ell}$ pour tout $k, \ell = 1, \dots, 6$.

REMARQUE 2. - Pour définir X, il n'est pas indispensable d'utiliser la carte $\Omega_o \times \mathbb{C}^2$; nous la conserverons néanmoins par souci de symétrie, et pour simplifier les calculs.

LEMME 4. - Pour $-1 < \operatorname{Re} x < 1$, on a $|\varphi(x)| < 1$.

Démonstration. En effet $\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$ et $\frac{1}{1+x}, \frac{1}{1-x}$ ont tous deux une partie réelle positive donc

$$\operatorname{Re} \frac{1}{x^2-1} < 0 \quad \text{et de même} \quad \operatorname{Re} \frac{1}{(x-2i)^2-1} < 0,$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{(x+2i)^2-1} < 0 \quad \text{pour} \quad -1 < \operatorname{Re} x < 1.$$

Soit maintenant V une fonction plurisousharmonique continue sur X représentée dans la carte $\Omega_k \times \mathbb{C}^2$ par la fonction plurisousharmonique continue $v_k = v \circ \tau_k^{-1}$.

On a donc $v_k \circ \tau_{k\ell} = v_\ell$ sur $\Omega_o \times \mathbb{C}^2$ $k, \ell = 1, \dots, 6$.

Désignons par $\omega(a, \rho)$ le disque ouvert de centre a et de rayon ρ ($a \in \mathbb{C}, \rho > 0$) et par b_k $1 \leq k \leq 6$ la projection orthogonale $i \operatorname{Im} a_k$ de a_k sur l'axe imaginaire.

Nous supposons de plus que B contient le disque ouvert de centre 0 et de rayon 4 afin que tous les disques considérés dans la démonstration du lemme 5 soient contenus et relativement compacts dans B.

LEMME 5. - Si V est non constante sur la fibre $\{a_k\} \times \mathbb{C}^2$, il existe des constantes C, $r_o > 0$ telles que pour $r \gg r_o$:

$$M(V_o \circ \tau_{ok}, \omega(b_k, \frac{1}{2}), r) \ll M(V_o, \omega(b_k, \frac{1}{2}), \exp(C(\log r)^4)).$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, on suppose par exemple $k = 1$, $a_k = 1$, $b_k = 0$.

V_1 étant non constante par hypothèse sur la fibre $\{1\} \times \mathbb{C}^2$

$\sup_{|z| \leq r} V_1(1, z)$ tend vers $+\infty$ quand r tend vers $+\infty$.

Grâce à la continuité de V_1 , il existe pour tout nombre $A > 0$ une constante r_A et un voisinage U_A de 1 tels que :

$$\sup_{|z| \leq r_A} V_1(x, z) \geq A \text{ pour tout } x \in U_A.$$

Prenons $A = M(V_1, \omega_{(1, 7/4)}, 1)$.

D'après la relation (2), si $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega_3$ sont trois disques concentriques contenus dans $\omega_{(1, 7/4)}$, de rayon $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, ω_1 rencontrant U_A , alors avec la constante σ précisée dans le lemme 1 (3) :

$$M(V_1, \omega_2, r) \leq M(V_1, \omega_1, r^\sigma) \text{ pour } r \geq r_A \quad (17)$$

(utiliser le fait que $\sigma > 1$).

Sur Ω_0 , $V_1 = V_0 \circ \tau_{01}$, donc

$$\begin{aligned} M(V_0 \circ \tau_{01}, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, r) &= M(V_1, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, r) \\ &\leq M(V_1, \omega_{(1-t, \frac{3}{2-t})}, r) \end{aligned} \quad (18)$$

puisque $\omega_{(0, \frac{1}{2})} \subset \omega_{(1-t, \frac{3}{2-t})}$.

(t est un nombre réel compris entre 0 et 1).

Choisissons t assez petit pour que $1 - t \in U_A$ et appliquons (17) à :

$$\omega_1 = \omega_{(1-t, \frac{t}{2})}, \omega_2 = \omega_{(1-t, \frac{3}{2-t})}, \omega_3 = \omega_{(1-t, \frac{7}{4-t})} \subset \omega_{(1, \frac{7}{4})}.$$

Il vient pour $r \geq r_A$:

$$M(V_1, \omega_{(1-t, \frac{3}{2-t})}, r) \leq M(V_1, \omega_{(1-t, \frac{t}{2})}, r^\sigma) \quad (19)$$

avec $\sigma = \frac{\log 3/t}{\log \frac{7-4t}{6-4t}} \leq C_1 \log \frac{1}{t}$

r étant fixé $\geq r_A$ choisissons t pour que

$$r^\sigma \cdot \sup_{x \in \omega_{(1-t, \frac{t}{2})}} |\varphi(x)| \leq 1.$$

Le transformé de $\omega_{(1-t, \frac{t}{2})}$ par l'homographie $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est le disque de diamètre :

$$(t + \frac{t}{2})^{-1} = \frac{2}{3t}, \quad (t - \frac{t}{2})^{-1} = \frac{2}{t}$$

de sorte que pour $x \in \omega_{(1-t, \frac{t}{2})}$ on a $\operatorname{Re} \frac{1}{1-x} \gg \frac{2}{3t}$ et
 $|\varphi(x)| \leq \exp(-\frac{1}{3t})$ (voir la démonstration du lemme 4).

Il suffit de prendre $\exp(\frac{1}{3t}) \gg r^{C_1 \log \frac{1}{t}}$

$$\text{soit } \frac{1}{t \log \frac{1}{t}} \gg 3C_1 \log r$$

ou encore $\frac{1}{t} \gg C_2 \log r \cdot \log \log r$

avec C_2 constante $> 3 C_1$ et r assez grand.

Avec ce choix de t l'image réciproque par τ_{01} du polydisque :

$|w_1|, |w_2| \leq e r^{C_1 \log \frac{1}{t}}$ contient le polydisque : $|z_1|, |z_2| \leq r^{C_1 \log \frac{1}{t}}$ lorsque $x \in \omega_{(1-t, \frac{t}{2})}$

On a donc :

$$\begin{aligned} M(V_1, \omega_{(1-t, \frac{t}{2})}, r^{C_1 \log \frac{1}{t}}) &\leq M(V_1 \circ \tau_{01}^{-1}, \omega_{(1-t, \frac{t}{2})}, e r^{C_1 \log \frac{1}{t}}) \\ &= M(V_0, \omega_{(1-t, \frac{t}{2})}, e r^{C_1 \log \frac{1}{t}}) \\ &\leq M(V_0, \omega_{(1-t, \frac{t}{2})}, r^{C_3 \log \log r}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{en prenant } C_2 \log r \cdot \log \log r \leq \frac{1}{t} < C_4 \log r \cdot \log \log r \quad (21)$$

C_3, C_4 sont des constantes, avec $C_4 > C_2$ à préciser par la suite.

En combinant (18), (19) et (20), il vient :

$$(22) \quad M(V_0 \circ \tau_{01}, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, r) \leq M(V_0, \omega_{(1-t, \frac{t}{2})}, r^{C_3 \log \log r})$$

pour $r \gg r_0$ et t vérifiant (21).

Définissons maintenant une suite de disques concentriques

$\omega_1^n \subset \omega_2^n \subset \omega_3^n$ de centre $1-t_n$ ($n \in \mathbb{N}$) et de rayons

$$\rho_1^n = \frac{1}{4}t_n, \quad \rho_2^n = \frac{1}{2}t_n, \quad \rho_3^n = \frac{3}{4}t_n.$$

On veut que $\omega_1^n \subset \omega_2^{n-1}$, ce qui équivaut à

$$t_{n-1} - t_n \leq \frac{1}{2}t_{n-1} - \frac{1}{4}t_n \quad \text{ou encore } t_n \geq \frac{2}{3}t_{n-1}.$$

$$\text{On prendra } t_n = \frac{2}{3}t_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{et } C_4 = \frac{3}{2}C_2.$$

Pour $n = n(r)$ bien déterminé on a alors :

$$C_2 \log r \log \log r \leq \frac{1}{t_n} < C_4 \log r \cdot \log \log r$$

et d'après (22)

$$M(V_0 \circ \tau_{01}, \omega_{(0, \frac{1}{2})}^n, r) \ll M(V_0, \omega_2^{n(r)}, r^{C_3 \log \log r}) \text{ si } r \gg r_0 \quad (23)$$

Choisissons maintenant $A = M(V_1, \omega_{(1, \frac{7}{4})}^n, e)$ une constante r_A et un voisinage U_A correspondants (voir le début de la démonstration).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega_3^n \subset \omega_{(1, \frac{7}{4})}^n$, et si $n \gg n_0$, ω_1^n rencontre U_A .

D'après (2), lemme 1, on a :

$$(24) \quad M(V_0, \omega_2^n, r) \ll M(V_0, \omega_1^n, r^\sigma) + \mu \left[M(V_0, \omega_3^n, 1) - M(V_0, \omega_1^n, r^\sigma) \right]$$

avec $\sigma = \frac{\log 3}{\log 3/2}$.

Or $M(V_0, \omega_3^n, 1) = M(V_1 \circ \tau_{02}^{-1}, \omega_3^n, 1) \ll M(V_1, \omega_3^n, e) \ll A$ car dans ω_3^n on a

$$|\varphi(x)| < 1 \text{ (lemme 4) et } \omega_3^n \subset \omega_{(1, \frac{7}{4})}^n ;$$

de plus $M(V_0, \omega_1^n, r) = M(V_1 \circ \tau_{01}^{-1}, \omega_1^n, r^\sigma)$

$$\gg M(V_1, \omega_1^n, \frac{\sigma}{2} \log r)$$

car si $|z_1|, |z_2| \ll \frac{\sigma}{2} \log r$ l'image (w_1, w_2) par τ_{01} vérifie

$$|w_1| \ll \frac{\sigma}{2} \log r \ll r^{\sigma/2} = \exp\left(\frac{\sigma}{2} \log r\right) \ll r^\sigma \quad (r \gg 1)$$

$$|w_2| \ll \frac{\sigma}{2} \log r \cdot r^{\sigma/2} \text{ grâce au lemme 4 } (\omega_1^n \subset \{x \in \mathbb{C} ; -1 < \operatorname{re} x < 1\})$$

d'où $|x_2| \leq r^\sigma$.

En prenant $n \gg n_0$ et $\frac{\sigma}{2} \log r \gg r_A$ (24) donne

$$\begin{aligned} M(V_0, \omega_2^n, r) &\ll M(V_0, \omega_1^n, r^\sigma) \\ &\ll M(V_0, \omega_2^{n-1}, r^\sigma) \text{ puisque } \omega_1^n \subset \omega_2^{n-1}. \end{aligned}$$

Pour r assez grand $n(r) > n_0$, donc de proche en proche

$$M(V_0, \omega_0^{n(r)}, r) \ll M(V_0, \omega_2^{n_0}, r^{\sigma n(r) - n_0}) \text{ pour } \frac{\sigma}{2} \log r \gg r_A \quad (25).$$

Il ne reste qu'un nombre fini d'étapes à accomplir (n_0 précisément) pour obtenir

$$(26) \quad M(V_0, \omega_2^{n_0}, r) \ll M(V_0, \omega_2^0, r^{\sigma n_0}) \quad r \gg r_1$$

(23), (25) et (26) entraînent, puisque $\omega_2^0 = \omega_{(0, \frac{1}{2})}^0$:

$M(V_0 \circ \tau_{01}, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, r) \leq M(V_0, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, r^{C_3 \sigma^{n(r)}, \log \log r})$ pourvu que
 $r \geq \sup(r_0, r_1, e^{2rA/\sigma})$.

Mais $\sigma = (\frac{3}{2})^\alpha$ avec $\alpha = 2,458333 \dots < 3$ d'où

$\sigma^{-n(r)} = \frac{1}{t_n^\alpha(r)} \leq C_4^\alpha (\log r)^\alpha (\log \log r)^\alpha$ et $C_3 \sigma^{n(r)} \log \log r \leq C_5 (\log r)^3$
 pour r assez grand.

On a donc pour $r \geq r_2$ convenable :

$$M(V_0 \circ \tau_{01}, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, r) \leq M(V_0, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, r^{C_5 (\log r)^3})$$

et la démonstration du lemme 5 est achevée.

Nous pouvons enfin énoncer le résultat essentiel de ce paragraphe :

THÉORÈME 2. - Le fibré X construit ci-dessus au moyen des 7 cartes $\Omega_k \times \mathbb{C}^2$ et des automorphismes de transition $\tau_{k\ell}$ a la propriété suivante :
il existe une fibre $\{a_k\} \times \mathbb{C}^2$, $k = 1, \dots, 6$ où toutes les fonctions plurisousharmoniques continues sur X sont constantes ; en particulier X n'est pas de Stein, et n'est pas isomorphe au fibré trivial $B \times \mathbb{C}^2$.

Démonstration. Supposons que pour tout $k = 1, \dots, 6$ il existe un fonction $V_{(k)}$ plurisousharmonique et continue sur X non constante sur la fibre $\{a_k\} \times \mathbb{C}^2$.

Posons $V = \sum_{k=1}^6 \lambda_k V_{(k)}$ où les λ_k sont des scalaires réels > 0 .

Lorsque les λ_k sont bien choisis V est non constante sur les six fibres $\{a_k\} \times \mathbb{C}^2$ (il y a au plus un hyperplan de $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6$ pour lesquels V soit constante sur l'une des six fibres).

On peut alors appliquer le lemme 5 à chacune des fibres $\{a_k\} \times \mathbb{C}^2$:

$$M(V_0 \circ \tau_{ok}, \omega_{(b_k, \frac{1}{2})}, r) \leq M(V_0, \omega_{(b_k, \frac{1}{2})}, \exp(C(\log r)^4)) \text{ pour } r \geq r_0.$$

En appliquant aux deux membres le corollaire 2 dans Ω_0 , on obtient pour $r \geq r_1$ assez grand et $C_1 > 0$ convenable

$$M(V_0 \circ \tau_{ok}, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, r) \leq M(V_0, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, \exp(C_1 (\log r)^4)) \text{ d'où avec les}$$

notations du § 3, et $K_{x,r} = \left(\bigcup_{1 \leq k \leq 6} \tau_{ok}(\{x\} \times D_r) \right)^\wedge$

$$\sup_{x \in \bar{\omega}_{(0, \frac{1}{2})}} V_0(x, z) \leq M(V_0, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, \exp(C_1(\log r)^4))$$

Or il est clair que

$$\tau_{01}(\{x\} \times D_r) \supset \left\{ (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2; |w_1| \leq r, |w_2| \leq r \exp\left(\frac{r}{2} |\varphi(x)|\right) \text{ et } -\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg } w_1 \varphi(x) \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

et de même pour $\tau_{02}(\{x\} \times D_r)$ $\tau_{03}(\{x\} \times D_r)$ en remplaçant la dernière condition par

$$-\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg } w_1 j \varphi(x) \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } -\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg } w_1 j^2 \varphi(x) \leq \frac{\pi}{3}; \text{ donc } \bigcup_{1 \leq k \leq 3} \tau_{ok}(\{x\} \times D_r) \text{ contient :}$$

$$\left\{ (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2; |w_1| \leq r, |w_2| \leq r \exp\left(\frac{r}{2} |\varphi(x)|\right) \right\} \text{ et de même } \bigcup_{4 \leq k \leq 6} \tau_{ok}(\{x\} \times D_r) \text{ contient :}$$

$$\left\{ (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2; |w_1| \leq r \exp\left(\frac{r}{2} |\varphi(x)|\right), |w_2| \leq r \right\}.$$

Le principe du disque (cf. par exemple HÖRMANDER [1], p. 34, th. 2.4.3.) montre que $K_{x,r}$ contient le polydisque de rayon "moyenne géométrique" :

$$r \exp\left(\frac{r}{4} |\varphi(x)|\right).$$

Mais pour $x \in \bar{\omega}_{(0, \frac{1}{2})}$ $|\varphi(x)| \geq C_2 > 0$ d'où

$$M(V_0, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, r \exp\left(\frac{C_2 r}{4}\right)) \leq M(V_0, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, \exp(C_1(\log r)^4)).$$

Comme V est non constante sur au moins une fibre de X

$M(V_0, \omega_{(0, \frac{1}{2})}, r)$ est une fonction strictement croissante de r pour r assez grand ; on en conclut $r \exp\left(\frac{C_2 r}{4}\right) \ll \exp(C_1(\log r)^4)$ pour tout r assez grand, ce qui est contradictoire.

5. Nature du fibré X selon la valeur de la constante de Lelong.

Nous nous proposons de montrer par un exemple que la nature du fibré X est intimement liée à la valeur de la constante de Lelong (et donc à la géométrie de la base).

Prenons pour base une couronne

$$B = \{x \in \mathbb{C}; \rho_1 < |x| < \rho_2\} \quad 0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq +\infty.$$

Le revêtement universel de B s'identifie à la bande

$$\tilde{B} = \{x \in \mathbb{C} ; \log \rho_1 < \operatorname{Re} x < \log \rho_2\}$$

au moyen de l'exponentielle $\exp : \tilde{B} \rightarrow B$.

Soit g un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^n de degré k au plus ainsi que g^{-1} et G le groupe d'automorphismes $\{\alpha^j ; j \in \mathbb{Z}\}$ de $\tilde{B} \times \mathbb{C}^n$ où

$$\alpha(x, z) = (x + 2i\pi, g(z)).$$

Considérons le fibré $X = \tilde{B} \times \mathbb{C}^n / G$ (voir § 2).

Cherchons à construire une fonction ϕ plurisousharmonique sur $\tilde{B} \times \mathbb{C}^n$ et invariante par G qui induise une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique sur X .

Si $\frac{\rho_2}{\rho_1} < +\infty$ on peut toujours supposer $\rho_1 \rho_2 = 1$ quitte à appliquer une homothétie à B .

La bande \tilde{B} , qui a pour largeur $a = \operatorname{Log} \frac{\rho_2}{\rho_1}$, est alors centrée en 0.

Posons $\varphi_i(x, z) = \exp(x^2 \cos \frac{\pi x}{a}) z_i$ si $\frac{\rho_2}{\rho_1} < +\infty$

$$= \exp(x^2) z_i \quad \text{sinon, } 1 \leq i \leq n$$

$$\text{puis } \phi(x, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{1 \leq i \leq n} |\varphi_i \circ \alpha^j(x, z)|^2$$

$$\psi(x, z, x', z') = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{1 \leq i \leq n} \varphi_i \circ \alpha^j(x, z) \overline{\varphi_i \circ \alpha^j(x', z')}.$$

Cherchons à quelle condition cette dernière série converge uniformément sur tout compact de $(\tilde{B} \times \mathbb{C}^n)^2$.

Il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$1 + |g(z)| \leq C(1 + |z|)^k$$

$$1 + |g^{-1}(z)| \leq C(1 + |z|)^k$$

d'où par récurrence

$$1 + |g^j(z)| \leq C^{1+k+\dots+k} |j|^{-1} (1 + |z|)^k |j|$$

$$\text{et } |g^j(z)| \leq (C^{|j|} (1 + |z|))^k |j| = \exp(k |j| (\log C + \log(1 + |z|)))$$

$$\cos \frac{\pi(x+2ij\pi)}{a} = \cos \frac{\pi \operatorname{Re} x}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi(\operatorname{Im} x + 2j\pi)}{a} - i \sin \frac{\pi \operatorname{Re} x}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi(\operatorname{Im} x + 2j\pi)}{a} .$$

On a $-\frac{a}{2} < \operatorname{Re} x < \frac{a}{2}$ donc $\cos \frac{\pi \operatorname{Re} x}{a} > 0$ sur \tilde{B} de sorte que $\cos \frac{\pi(x+2ij\pi)}{a}$ a un argument en valeur absolue \leq constante $< \frac{\pi}{2}$ lorsque x décrit un compact de \tilde{B} .

Pour tout compact $K \subset \tilde{B}$, il existe donc une constante C_K telle que :

$$\operatorname{Re}(x + 2ij\pi)^2 \cos \frac{\pi(x + 2ij\pi)}{a} \leq - C_K j^2 \exp \frac{2|j|\pi^2}{a}$$

d'où $|\varphi_i \circ \alpha^j(x, z)| \leq \exp(k|j|) (|j| \log C + \operatorname{Log}(1 + |z|)) - C_K j^2 \exp \frac{2|j|\pi^2}{a}$.

Les séries précédentes convergent donc uniformément sur tout compact de $\tilde{B} \times \mathbb{C}^n$ pourvu que :

$$k \leq \exp\left(\frac{2\pi^2}{a}\right)$$

ψ définit alors une fonction continue holomorphe en (x, z) et antiholomorphe en (x', z') de sorte que ϕ est analytique réelle.

ϕ n'est pas nécessairement propre à cause de la dépendance en x , mais tend uniformément vers $+\infty$ quand z tend vers $+\infty$, x décrivant un compact de \tilde{B} .

Soit φ la fonction induite sur X par ϕ , $\psi: B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique sur B , et $q: X \rightarrow B$ la projection sur la base.

$\chi = \varphi + \psi \circ q$ est alors une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique sur X .

Montrons en effet que la forme de Levi $\mathcal{H}(\chi)$ de χ (i.e. la forme hermitienne associée à la $(1,1)$ -forme réelle $i\partial\bar{\partial}\chi$) est définie positive.

Pour tout vecteur tangent ξ à X on a :

$$\mathcal{H}(\chi)(\xi) = \mathcal{H}(\varphi)(\xi) + \mathcal{H}(\psi)(dq(\xi)) .$$

Comme les deux termes du membre de droite sont ≥ 0 , $\mathcal{H}(\chi)(\xi)$ est ≥ 0 et ne peut s'annuler que si $\mathcal{H}(\varphi)(\xi) = \mathcal{H}(\psi)(dq(\xi)) = 0$ d'où $dq(\xi) = 0$ (ψ est strictement plurisousharmonique sur la base) puis $\xi = 0$ (φ est strictement plurisousharmonique sur les fibres).

PROPOSITION 3. - Le fibré X est de Stein pour $k \leq \exp\left(\frac{2\pi^2}{\log \rho^2 / \rho_1}\right)$.
Si g est l'automorphisme de \mathbb{C}^2 défini par $g(z_1, z_2) = (z_1^k - z_2, z_1)$ et
si $k > \exp\left(\frac{2\pi^2}{\log \rho^2 / \rho_1}\right)$ toutes les fonctions plurisousharmoniques sur X
sont constantes sur les fibres.

Démonstration. La première assertion vient d'être prouvée; pour obtenir la deuxième il suffit de réexaminer les arguments du paragraphe 3.

. Estimation de la constante de Lelong.

$\theta: x \mapsto \operatorname{tg} \pi \frac{x}{2a}$ est une application conforme de la bande
 $\tilde{B} = \left\{ x \in \mathbb{C}; -\frac{a}{2} < \operatorname{Re} x < \frac{a}{2} \right\}$ sur le disque unité.

Soit $\omega_\rho = \left\{ x \in \tilde{B}; |\theta(x)| < \operatorname{th} \rho \right\}$ $\rho > 0$.

Montrons que $\omega_\rho + ib \subset \omega_{\rho'}$, $\rho' = \rho + \frac{\pi|b|}{2a}$

Si $x \in \omega_\rho$ $\theta(x + ib) = \frac{\theta(x) + \theta(ib)}{1 - \theta(x)\theta(ib)}$ par suite $\theta(\omega_\rho + ib)$ est le transformé du disque $|x| < \operatorname{th} \rho$ par l'homographie :

$$x \mapsto \frac{x + i \operatorname{th} \frac{\pi b}{2a}}{1 - ix \operatorname{th} \frac{\pi b}{2a}}$$

Ce transformé est le disque de diamètre :

$$\frac{i \operatorname{th} \rho + i \operatorname{th} \frac{\pi b}{2a}}{1 + \operatorname{th} \rho \operatorname{th} \frac{\pi b}{2a}} = i \operatorname{th} \left(\rho + \frac{\pi b}{2a} \right)$$

$$\frac{-i \operatorname{th} \rho + i \operatorname{th} \frac{\pi b}{2a}}{1 - \operatorname{th} \rho \operatorname{th} \frac{\pi b}{2a}} = -i \operatorname{th} \left(\rho - \frac{\pi b}{2a} \right)$$

et il est bien contenu dans le disque de centre 0 et de rayon

$$\operatorname{th} \left(\rho + \frac{\pi|b|}{2a} \right) = \operatorname{th} \rho'$$

Si V est une fonction plurisousharmonique non triviale sur X et \tilde{V} son relèvement à $\tilde{B} \times \mathbb{C}^2$, on a, pour tout entier $j \geq 1$ et r assez grand :

$$M(\tilde{V} \circ g^{\pm j}, \omega_\rho, r) = M(\tilde{V}, \omega_{\rho \mp 2ij\pi}, r)$$

$$\leq M(\tilde{V}, \omega_{\rho_j}, r)$$

$$\leq M(\tilde{V}, \omega_\rho, r^{\sigma_j})$$

avec $\rho_j = \rho + j \frac{\pi^2}{a}$

$$\sigma_j \text{ arbitraire} > \frac{\log \frac{1}{\text{th } \rho}}{\log \frac{1}{\text{th } \rho_j}} = \frac{\log \coth \rho}{\log \coth(\rho + j \frac{\pi^2}{a})}$$

(d'après le corollaire 1 appliqué sur le disque unité ; σ_j est donné par la relation (3) avec $\rho_1 = \text{th } \rho$ $\rho_2 = \text{th } \rho_j$ $\rho_3 < 1$ arbitraire).

Un calcul élémentaire fournit :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\log \coth \rho}{\log \coth(\rho + j \frac{\pi^2}{a})} = \exp\left(\frac{2j \pi^2}{a}\right).$$

On peut donc énoncer, en prenant $a = \log \frac{\rho_2}{\rho_1}$ si $\frac{\rho_2}{\rho_1} < +\infty$, et a arbitrairement grand sinon :

LEMME 6. - Pour tout $\sigma > \exp\left(\frac{2j \pi^2}{\log \rho_2 / \rho_1}\right)$, il existe un ouvert $\omega \subset \mathbb{C}^{\tilde{B}}$ et une constante r_0 dépendant de j , σ tels que
 $M(V \circ g^{\pm j}, \omega, r) \ll M(\tilde{V}, \omega, r^\sigma)$ pour tout $r \gg r_0$.

En prenant $j = 1$, les résultats du § 3 (lemme 2) montrent déjà que X n'est pas de Stein si :

$$\frac{k}{2} + \frac{1}{2k} > \exp\left(\frac{2\pi^2}{\log \rho_2 / \rho_1}\right).$$

. Calcul d'enveloppe pseudo-convexe.

Il s'agit donc d'évaluer l'enveloppe $(g^j(D_r) \cup g^{-j}(D_r))^\wedge$.

Soit $p_i : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ $i = 1, 2$ les fonctions coordonnées, V_α la surface de \mathbb{C}^2 définie par l'équation

$(z_1, z_2) \mapsto z_i$

$$p_1 \circ g^j(z) \cdot p_2 \circ g^{-j}(z) = \alpha \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

et L_α la partie compacte de V_α définie par $|z| = \sup(|z_1|, |z_2|) \leq r^{kj}$.

Pour $|z_1| = r^{kj}$ et r assez grand $|p_1 \circ g^j(z)| \gg \frac{1}{2} r^{k^2 j}$

($p_1 \circ g^j$ est un polynôme de degré k^j admettant $z_1^{k^j}$ comme seul monôme de degré k^j).

On prend $|\alpha| \leq \frac{1}{2} r^{k^2 j + 1}$ et on a donc $|p_2 \circ g^{-j}(z)| \leq r$.

Vérifions par récurrence sur j que les inégalités $|z| \leq r^{kj}$ et $|p_2 \circ g^{-j}(z)| \leq r$

entraînent $|p_1 \circ g^{-j}(z)| \leq C_j r$ où C_j est une constante $\gg 1$ assez grande.

Pour $j = 1$ $|z_2^k - z_1| \leq r$ et $|z_1| \leq r^k$ par hypothèse donc

$$|z_2|^k \leq r^k + r \leq 2r^k \quad \text{et} \quad |z_2| \leq 2^{1/k} r.$$

Si $j > 1$ $|p_2 \circ g^{-j}(z)| = |p_2 \circ g^{-(j-1)}(w)| \leq r \leq 2r^{k^2}$ avec $w = g^{-1}(z)$

$$\text{et } |w| \leq 2r^{k^{j+1}} \leq (2r^{k^2})^{k^{j-1}}.$$

Par hypothèse de récurrence (appliquée en remplaçant z, g^{-j}, r par $w, g^{-(j-1)}, 2r^{k^2}$)

$$|p_1 \circ g^{-j}(z)| = |p_1 \circ g^{-(j-1)}(w)| \leq 2C_{j-1} r^{k^2}.$$

Mais $p_1 \circ g^{-j}(z) = p_2 \circ g^{-(j-1)}(z)$ et $|z| \leq r^{k^j} \leq (2C_{j-1} r^{k^2})^{k^{j-1}}$

donc $|p_1 \circ g^{-(j-1)}(z)| \leq 2C_{j-1}^2 r^{k^2}$ (hypothèse de récurrence).

Or $p_2 \circ g^{-j}(z) = [p_2 \circ g^{-(j-1)}(z)]^k - p_1 \circ g^{-(j-1)}(z)$ est de module $\leq r$

d'où $|p_2 \circ g^{-(j-1)}(z)| \leq C' r^k$ où C' est une constante $\gg 1$.

$$|p_1 \circ g^{-(j-1)}(z)| \leq C' C_{j-1} r^k \quad (\text{hypothèse de récurrence})$$

$$|p_1 \circ g^{-j}(z)| = |p_2 \circ g^{-(j-1)}(z)| \leq C_j r \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Par suite $|g^{-j}(z)| \leq C_j r$ i.e. $z \in g^j(D_{C_j r})$ et le bord de L_α est contenu dans $g^j(D_{C_j r}) \cup g^{-j}(D_{C_j r})$.

Des calculs analogues à ceux du § 3 donnent alors :

LEMME 7. - Pour $r \gg r_0$ et ϵ_j assez petit

$(g^j(D_r) \cup g^{-j}(D_r))^\wedge$ contient le polydisque de rayon $\epsilon_j r^{k^j/2 + 1/2k^j}$.

Si $k > \exp\left(\frac{2\pi^2}{\log e_2/e_1}\right)$, on a $k^j \gg 2 \exp\left(\frac{2j\pi^2}{\log e_2/e_1}\right)$ pour j assez grand,

par conséquent $\frac{k^j}{2} + \frac{1}{2k^j} > \exp\left(\frac{2j\pi^2}{\log e_2/e_1}\right)$ et les propositions 1 et 2

permettent d'achever la démonstration de la proposition 3.

6. Topologie de $H^1(X, \mathcal{O})$.

Soit X l'un des fibrés construits aux paragraphes 2, 3, 4 et 5, \mathcal{O} le faisceau des germes de fonctions analytiques sur X .

Par l'isomorphisme de Dolbeault $H^1(X, \mathcal{O})$ s'identifie au quotient Z^1/B^1 où

$Z^1 = \{ \text{formes différentielles de bidegré } (0,1) \bar{\partial} \text{-fermées sur } X \}$

$B^1 = \{ \text{formes différentielles de bidegré } (0,1) \bar{\partial} \text{-exactes sur } X \} .$

Z^1 est muni de la topologie de la convergence C^∞ sur tout compact, $H^1(X, \mathcal{O})$ de la topologie quotient.

Soit $q : X \rightarrow B$ la projection sur la base, et x_0 un point de B tel que toute fonction holomorphe sur X soit constante sur la fibre $q^{-1}(x_0)$ (x_0 peut être choisi arbitrairement dans les exemples des § 3,5).

Soit U un ouvert de B contenant x_0 , f une fonction holomorphe sur $q^{-1}(U)$, φ une fonction de classe C^∞ sur B à support dans U , égale à 1 au voisinage de x_0 .

Cherchons une fonction u de classe C^∞ sur X telle que

$h = f \cdot \varphi \circ q - (q - x_0)u$ soit holomorphe sur X .

$h(x_0, z) = f(x_0, z)$ donc le problème précédent n'a pas de solution si f est non constante sur la fibre $q^{-1}(x_0)$.

La condition $\bar{\partial}h = 0$ équivaut à :

$$\bar{\partial}u = \frac{f \cdot q^* \bar{\partial}\varphi}{q - x_0} .$$

Lorsqu'on prend pour U un domaine de carte trivialisant et f du type $f(x, z) = F(z)$ où F est entière, on obtient ainsi des formes $\bar{\partial}$ -fermées $f \frac{q^* \bar{\partial}\varphi}{q - x_0}$ qui ne sont $\bar{\partial}$ -cohomologues que si les F correspondantes diffèrent d'une constante.

Ceci montre déjà que $H^1(X, \mathcal{O})$ est de dimension infinie ; plus précisément il possède un sous-espace isomorphe à $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) / \mathbb{C}$ ($\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ = fonctions entières de n variables).

. Non séparation de $H^1(X, \mathcal{O})$.

Nous allons voir de plus que B^1 n'est pas fermé dans Z^1 , ce qui prouvera que $H^1(X, \mathcal{O})$ n'est pas séparé.

Soit en effet x_1 un point frontière de B tel que $d(x_0, x_1) = d(x_0, \partial B)$ (on prendra $x_1 = \infty$ si $B = \mathbb{C}$).

Le segment $[x_0, x_1[$ est donc inclus dans B .

Dans le cas des exemples des § 2 et 3, il existe un voisinage ouvert U de $[x_0, x_1[$ dans B sur lequel le fibré X est trivial.

(car les automorphismes de transition sont localement constants).

Dans l'exemple du § 4, x_0 appartient à une certaine carte

$$\Omega_j = B \setminus \left\{ \text{nombre fini de points } a_i \right\}.$$

Si par malchance $[x_0, x_1[$ passe par certains des a_i , on peut trouver un chemin γ joignant x_0 à x_1 dans Ω_j en contournant les a_i par de petits demi-cercles.

Dans tous les cas, il existe un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $\gamma([0, 1[) \subset B$
 $\gamma(0) = x_0$ $\gamma(1) = x_1$ et un ouvert U contenant $\gamma([0, 1[)$ sur lequel X est trivial.

On prend $f: q^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}$ non constante sur $q^{-1}(x_0)$ (par exemple l'une des fonctions coordonnées z_1, \dots, z_n de la fibre).

Soit $\varphi \in C^\infty(B)$ à support dans U et égale à 1 au voisinage de $\gamma([0, 1[)$.

D'après le théorème de Runge, $x \mapsto \frac{1}{x - x_0}$ est limite uniforme sur tout compact de $B \setminus \gamma([0, 1[)$ d'une suite v_ν de fonctions holomorphes sur B (cf. HÖRMANDER [1], p. 9, th. 1.3.4. b/ ; $\gamma([0, 1[)$ est connexe et non compact).

Comme $\bar{\partial} \varphi = 0$ au voisinage de $\gamma([0, 1[)$, la suite $v_\nu \circ q.f.q^* \bar{\partial} \varphi$ converge uniformément sur tout compact de X ainsi que ses dérivées vers

$\frac{f \cdot q^* \bar{\partial} \varphi}{q - x_0}$ qui est $\bar{\partial}$ -fermée mais non $\bar{\partial}$ -exacte.

Cependant $v_\nu \circ q.f.q^* \bar{\partial} \varphi = \bar{\partial}(v_\nu \circ q.f.\varphi \circ q)$.

. Si X est le fibré du § 5, $H^1(X, \mathcal{O})$ est grossier.

Soit $p: \tilde{B} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow X$ la projection de $\tilde{B} \times \mathbb{C}^2$ sur son quotient par le groupe

$$G = \left\{ \alpha^m; m \in \mathbb{Z} \right\} \text{ avec } \tilde{B} = \left\{ x \in \mathbb{C}; \log \rho_1 < \operatorname{Re} x < \log \rho_2 \right\}$$

$$\alpha(x, z) = (x + 2i\pi, g(z))$$

Soit f une forme fermée de bidegré $(0,1)$ et de classe C^∞ sur X .

$$\bar{\partial}(p^*f) = p^*\bar{\partial}f = 0.$$

Puisque $\tilde{B} \times \mathbb{C}^2$ est de Stein, il existe une fonction h de classe C^∞ sur $\tilde{B} \times \mathbb{C}^2$ telle que

$$\bar{\partial}h = p^*f$$

et il est immédiat que $u = h - h \circ \alpha$ est holomorphe sur $\tilde{B} \times \mathbb{C}^2$.

Montrons que u peut être approchée uniformément sur tout compact par des fonctions du type $v - v \circ \alpha$ où v est holomorphe sur $\tilde{B} \times \mathbb{C}^2$.

Soit ϵ un nombre > 0 et K un compact de $\tilde{B} \times \mathbb{C}^2$ de la forme $L \times D$ où L est un rectangle de \tilde{B} et D un bidisque.

Il existe un entier $j \in \mathbb{N}$ tel que $L \cap (L + 2ij\pi) = \emptyset$ et un bidisque D' contenant $D \cup g^j(D)$.

Avec les choix précédents $K \subset L \times D'$

$$\alpha^j(K) \subset (L + 2ij\pi) \times D'$$

$LU(L + 2ij\pi)$ ne sépare pas le plan, donc est polynomialement convexe, et il en est de même du produit $[LU(L + 2ij\pi)] \times D'$.

D'après HÖRMANDER [1], th. 2.7.7., p. 55, il existe un polynôme Q tel que :

$$|Q - u| < \epsilon \text{ sur } K \subset L \times D'$$

$$|Q| < \epsilon \text{ sur } \alpha^j(K) \subset (L + 2ij\pi) \times D'$$

d'où $|Q - Q \circ \alpha^j - u| < 2\epsilon$ sur K , et en posant $v = Q + Q \circ \alpha + \dots + Q \circ \alpha^{j-1}$
 $v - v \circ \alpha = Q - Q \circ \alpha^j$ approche u à 2ϵ près sur K .

Remplaçons h par $h - v$; on voit qu'il existe une suite h_n de fonctions C^∞ sur $\tilde{B} \times \mathbb{C}^2$ telles que :

$$\bar{\partial}h_n = p^*f, \text{ et si } u_n = h_n - h_n \circ \alpha \quad \lim u_n = 0.$$

Soit maintenant φ_+, φ_- une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $]-1, +\infty[,]-\infty, 1[$ de \mathbb{R} .

On définit une fonction $k_n \in C^\infty$ sur $\tilde{B} \times \mathbb{C}^2$ par

$$k_n(x, z) = \sum_{j \geq 0} u_n \circ \alpha^j(x, z) \cdot \varphi_-(\operatorname{Im}(x + 2ij\pi))$$

$$- \sum_{j < 0} u_n \circ \alpha^j(x, z) \varphi_+(\operatorname{Im}(x + 2ij\pi))$$

$$(k_n - k_n \circ \alpha)(x, z) = u_n(x, z) \varphi_-(\operatorname{Im} x) + u_n(x, z) \varphi_+(\operatorname{Im} x)$$

d'où $k_n - k_n \circ \alpha = u_n$, et de plus k_n tend uniformément vers 0 sur tout compact ainsi que ses dérivées.

$h_n - k_n$ est invariante par α , et induit sur X une fonction C^∞ notée w_n

$$p^* \bar{\partial} w_n = \bar{\partial} h_n - \bar{\partial} k_n = p^* f - \bar{\partial} k_n$$

d'où $\lim \bar{\partial} w_n = f$ pour la topologie C^∞ .

Par conséquent B^1 est dense dans Z^1 , ce qui signifie que $H^1(X, \mathcal{O})$ a la topologie grossière.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] HÖRMANDER (L.). - An introduction to complex analysis in several variables. Second Edition. North Holland Publishing Company, 1973.
- [2] LELONG (P.). - Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables). Montréal, les Presses de l'Université de Montréal, 1968, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Été 1967, n° 28.
- [3] SERRE (J.-P.). - Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 1953.
- [4] SKODA (H.). - Fibrés holomorphes à base et à fibre de Stein. C.R.Acad. Sc.de Paris, 16 Mai 1977, A. 1159-1202.
- [5] SKODA (H.). - Fibrés holomorphes à base et à fibre de Stein . Preprint, Université de Paris VI, Juin 1977, à paraître aux Inventiones Math.

J.-P. DEMAILLY
 École Normale Supérieure
 45, rue d'Ulm

et

L.A. au C.N.R.S. N° 213
 "Analyse complexe et Géométrie"
 Université de Paris VI