UNE PREUVE SIMPLE DE LA CONJECTURE

DE GRAUERT-RIEMENSCHNEIDER

Jean-Pierre Demailly
Institut Fourier, Université de Grenoble I
B.P. 74, F-38402 Saint-Martin-d'Hères.

Résumé. Soit E un fibré hermitien holomorphe en droites au-dessus d'une variété analytique complexe compacte X. Nous démontrons une majoration asymptotique pour la dimension des groupes de cohomologie des puissances tensorielles E^k assez élevées. Le majorant obtenu s'exprime de manière intrinsèque à l'aide d'une intégrale de la forme de courbure de E. Comme application, nous obtenons une preuve simple de la conjecture de Grauert-Riemenschneider, résolue récemment par Siu : si X possède un fibré en droites E quasi-positif, alors X est de Moishezon ; de plus, l'hypothèse de quasi-positivité a pu être affaiblie ici en une condition intégrale qui n'exige pas la semi-positivité ponctuelle de E.

Abstract. Let E be a hermitian holomorphic line bundle over a compact complex manifold X. We give an asymptotic upper bound for the dimension of cohomology groups of high tensor powers E^k. This bound is invariantly expressed in terms of an integral of the bundle curvature form. As an application, we find a simple proof of the Grauert-Riemenschneider conjecture, recently solved by Siu : if X possesses a quasi-positive line bundle E, then X is a Moishezon space ; furthermore the quasi-positivity hypothesis can be weakened here in an integral condition which does not require the bundle E to be pointwise semi-positive.

0. INTRODUCTION ET NOTATIONS.

Soient X une variété analytique complexe compacte de dimension n, F un fibré vectoriel holomorphe de rang r et E un fibré holomorphe en droites hermitien de classe C^∞ au-dessus de X. Soient $\nabla = \nabla' + \nabla''$ la connexion canonique de E et $c(E) = \nabla^2 = \nabla'\nabla'' + \nabla''\nabla'$ la forme de courbure de E. Désignons par $X(q)$, $0 \leq q \leq n$, l'ouvert de X sur lequel la (1,1)-forme de courbure $ic(E)$ possède exactement q valeurs propres < 0 et $n-q$ valeurs propres > 0. Nous démontrons alors l'estimation asymptotique suivante, qui borne la dimension de l'espace de cohomologie $H^q(X, E^k \otimes F)$ en fonction d'une intégrale de courbure de E sur $X(q)$.

THÉORÈME 0.1. - <u>Pour tout</u> $q = 0, 1, \ldots, n$ <u>on a l'estimation</u>

$$\dim H^q(X, E^k \otimes F) \leq C(n) r k^n \int_{X(q)} |c(E)^n| + o(k^n)$$

<u>où</u> $r = \mathrm{rang}(F)$ <u>et où</u> $C(n) > 0$ <u>ne dépend que de</u> n .

La constante optimale dans l'inégalité du théorème 0.1 est $C(n) = (2\pi)^{-n}/n!$, mais la preuve de ce résultat requiert une analyse beaucoup plus détaillée que celle élémentaire que nous exposons ici (cf. [D2], [D3]). La constante optimale précédente s'obtient en combinant les inégalités de Morse de E. Witten [W] avec un théorème de [D3], qui décrit de manière très précise le spectre de l'opérateur de Schrödinger associé au champ magnétique $B = k\,ic(E)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

Les techniques du présent article sont en fait plus proches des techniques utilisées antérieurement par [Siu 1,2] pour prouver la conjecture de Grauert-Riemenschneider. Indiquons brièvement la méthode de démonstration. Les groupes de cohomologie $H^q(X, E^k \otimes F)$ peuvent être interprétés comme des espaces de formes harmoniques à valeurs dans $E^k \otimes F$, une fois qu'on a muni E et X de métriques hermitiennes. On utilise alors l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne de P. Griffiths [G], relative à la connexion $D_k = D'_k + D''_k$ de $E^k \otimes F$:

$$\Delta''_k = \Delta'_k + [ic(E^k \otimes F), \Lambda] + [D'_k, \theta] - [D''_k, \bar{\theta}] \quad ; \tag{0.2}$$

Δ'_k , Δ''_k désignent ici les Laplaciens holomorphes et antiholomorphes sur $E^k \otimes F$, et θ est un opérateur d'ordre 0 et de bidegré $(-1,0)$ qui dépend uniquement de la torsion de la métrique hermitienne sur X . Il résulte de la présence du terme de courbure $k[ic(E), \Lambda]$ dans (0.2) que toute $(0,q)$-forme harmonique h à valeurs dans $E^k \otimes F$ est nécessairement petite en dehors de l'ensemble $\overline{X(q)}$. Pour majorer h sur $X(q)$, on commence par démontrer un lemme de type Rellich pour opérateur D'_k en bidegré $(0,q)$. Ce lemme repose sur l'ellipticité du $\bar{\partial}$ en degré 0 (cf. § 3, § 4) ; la preuve nécessite l'utilisation d'un pavage de $X(q)$ par des cubes de côté $\sim 1/\sqrt{k}$ de manière à pouvoir contrôler les effets de la courbure (qui sont grosso modo proportionnels à k) lorsque k tend vers $+\infty$.

La dimension de $H^q(X, E^k \otimes F)$ est donc majorée à une constante près par le nombre de cubes du pavage, soit $k^n \,\mathrm{Vol}(X(q))$; il reste alors seulement à choisir la métrique hermitienne sur X de manière adéquate pour en déduire le théorème 0.1.

La méthode de [Siu 1], [Siu 2] était assez différente, et consistait à utiliser l'isomorphisme de Dolbeault en vue d'appliquer le lemme de Schwarz à des cochaînes holomorphes s'annulant en de nombreux points. L'utilisation directe du lemme de Rellich pour les formes harmoniques va entraîner ici un gain de précision considérable dans les estimations recherchées.

Soit maintenant $\chi(E^k \otimes F) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim H^q(X, E^k \otimes F)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré du fibré $E^k \otimes F$. La formule de Hirzebruch-Riemann-Roch donne

$$\chi(E^k \otimes F) = r \frac{k^n}{n!} c_1(E)^n + P_{n-1}(k) \tag{0.3}$$

où $P_{n-1} \in \mathbb{Q}[k]$ est un polynôme de degré $\leq n-1$, et où $c_1(E)$ est la première classe de Chern de E. La forme $c_1(E)$ est représentée en cohomologie de de Rham par la (1,1)-forme $\frac{i}{2\pi} c(E)$, de sorte que la formule précédente se récrit

$$\chi(E^k \otimes F) = r \frac{k^n}{n!} \int_X (\frac{i}{2\pi} c(E))^n + o(k^n) . \tag{0.3'}$$

En combinant (0.3) et le théorème 0.1 pour $q \geq 2$, on en déduit la minoration suivante du H^0.

COROLLAIRE 0.4. - Supposons que $c(E)$ ait au plus 1 valeur propre < 0 en tout point de X. Alors :

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, E^k \otimes F) &\geq \chi(E^k \otimes F) - o(k^n) \\ &\geq r \frac{k^n}{n!} c_1(E)^n - o(k^n) . \blacksquare \end{aligned}$$

Le dernier paragraphe est consacré à l'étude des espaces de Moishezon. Rappelons-en la définition.

DÉFINITION 0.5. - Soit Y un espace analytique compact irréductible. On appelle dimension algébrique de Y, notée $a(Y)$, le degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ du corps $\mathcal{M}(Y)$ des fonctions méromorphes de Y.

D'après un théorème bien connu de Siegel [S], on a toujours l'encadrement $0 \leq a(Y) \leq n$, où $n = \dim_{\mathbb{C}} Y$.

DÉFINITION 0.6. - Y est appelé espace de Moishezon si $a(Y) = n$.

En utilisant le raisonnement de Siegel [S], il n'est pas difficile d'obtenir d'autre part l'estimation suivante (cf. § 6 ; voir aussi [Siu 1]).

THÉORÈME 0.7. - Pour tout fibré holomorphe en droites E au-dessus de X, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\dim H^0(X,E^k) \leq C k^{a(X)} \quad , \quad \forall k \geq 1 .$$

Le fibré E est dit quasi-positif si la forme de courbure $ic(E)$ est définie positive sur un ouvert dense de X. La conjecture [G-R] de Grauert et Riemenschneider peut alors s'énoncer comme suit.

CONJECTURE 0.8. - Pour que Y soit un espace de Moishezon, il faut et il suffit qu'il existe une désingularisation $\pi : X \to Y$ de Y et un fibré holomorphe en droites $E \to X$ quasi-positif.

La condition est trivialement nécessaire, car si Y est de Moishezon on sait d'après [Moi] que Y possède une désingularisation projective X. Le corollaire 0.4 et le théorème 0.7 permettent inversement de résoudre par l'affirmative la conjecture de Grauert et Riemenschneider. Le corollaire 0.4 fournit en fait une condition suffisante plus générale, qui n'exige pas la semi-positivité ponctuelle de E.

THÉORÈME 0.9. - Soit X une variété analytique compacte connexe de dimension n. Pour que X soit de Moishezon, il suffit que X possède un fibré hermitien en droites vérifiant l'une des hypothèses suivantes :

(a) $c_1(E)^n > 0$, et $ic(E)$ a au plus une valeur propre < 0 en tout point de X.

(b) $ic(E)$ est semi-positive sur X et définie positive en au moins un point.

Le théorème 0.9 (b) a été démontré antérieurement par [Siu 1] avec l'hypothèse supplémentaire $ic(E) > 0$ presque partout, puis par [Siu 2] en général. C'est ce résultat qui a constitué la principale motivation de notre travail. Une fois que l'on sait que X est de Moishezon, il n'est pas difficile de démontrer un théorème d'annulation sous hypothèse de semi-positivité de E (cf. §7).

THÉORÈME 0.10. - Soit X une variété complexe compacte et connexe de dimension n, E un fibré hermitien en droites au-dessus de X. Si $ic(E)$ est ≥ 0 sur X et > 0 en au moins un point, alors

$$H^q(X,K_X \otimes E) = 0 = H^{n-q}(X,E^{-1})$$

pour tout $q = 1,\dots,n$.

1. IDENTITÉ DE BOCHNER-KODAIRA-NAKANO EN GÉOMÉTRIE HERMITIENNE.

L'outil essentiel pour la démonstration du théorème 0.1 consiste en une estimation a priori pour les formes harmoniques à valeurs dans le fibré $E^k \otimes F$, dérivée de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano.

Pour obtenir cette estimation, on munit la variété X d'une métrique hermitienne arbitraire ω de type $(1,1)$ et de classe C^∞, et on introduit de même une métrique hermitienne C^∞ sur les fibres de F. L'espace $C_{p,q}(X,F)$ des (p,q)-formes de classe C^∞ à valeurs dans F se trouve alors muni d'une structure préhilbertienne naturelle. On note $D = D' + D''$ la connexion hermitienne canonique (i.e. telle que $D'' = \overline{\partial}$) de F, $\delta = \delta' + \delta''$ l'adjoint formel de D considéré comme opérateur différentiel sur $C^\infty_{\bullet,\bullet}(X,F)$, et Λ l'adjoint de l'opérateur de multiplication extérieure par ω. Si A, B sont des opérateurs différentiels sur $C^\infty_{\bullet,\bullet}(X,F)$ de degrés respectifs a, b, on définit leur anti-commutateur $[A,B]$ par la formule

$$[A,B] = AB - (-1)^{ab} BA .$$

Pour un troisième opérateur C de degré c, l'identité de Jacobi s'écrit alors :

$$(-1)^{ca}[A,[B,C]] + (-1)^{ab}[B,[C,A]] + (-1)^{bc}[C,[A,B]] = 0 . \qquad (1.1)$$

Avec ces notations, les opérateurs de Laplace-Beltrami Δ', Δ'' du fibré F sont définis par

$$\Delta' = [D',\delta'] = D'\delta' + \delta' D' \quad , \qquad \Delta'' = [D'',\delta''] .$$

LEMME 1.2. - <u>On a les relations de commutation</u>

$$[\Lambda, D'] = i(\delta'' + \overline{\theta}) \quad , \qquad [\Lambda, D''] = -i(\delta' + \theta) \ ,$$

<u>où</u> θ (resp. $\overline{\theta}$) <u>est un opérateur d'ordre</u> 0 <u>et de bidegré</u> $(-1,0)$ (resp. $(0,-1)$) <u>ne dépendant que de la torsion de la métrique</u> ω <u>sur</u> X.

<u>Démonstration</u>. - Les relations sont vraies dans $\mathbb{C}^n$ pour la métrique canonique (et plus généralement pour toute métrique kählérienne) : on a alors $\theta = 0$. Pour une métrique hermitienne ω quelconque, l'égalité a donc bien lieu au niveau des symboles principaux.

On peut montrer que $\theta^* = [\Lambda, d'\omega]$ (cf. [D1]), mais nous aurons besoin ici seulement de savoir que θ est indépendant de F ; or, ceci est évident, car pour tout $x \in X$ le fibré F admet localement une trivialisation par un repère holomorphe qui est orthonormé et D-parallèle au point x. ∎

L'utilisation du lemme 1.2 et de l'identité (1.1) donne

$$\begin{aligned}\Delta'' &= [D'', -i[\Lambda, D'] - \overline{\theta}] \\ &= -i([D',[D'',\Lambda]] + [\Lambda,[D',D'']]) - [D'',\overline{\theta}] \\ &= \Delta' + [D',\theta] + [i[D',D''],\Lambda] - [D'',\overline{\theta}] \ ,\end{aligned}$$

ce qui implique la formule suivante, connue sous le nom d'identité de Bochner-Kodaira-Nakano.

COROLLAIRE 1.3. - $\Delta'' = \Delta' + [ic(F),\Lambda] + [D',\theta] - [D'',\overline{\theta}]$.■

Pour $u \in C^{\infty}_{p,q}(X,F)$ on note $|u(x)|$ la norme de u en chaque point $x \in X$ et $\|u\|$ la norme L^2 globale :

$$\|u\|^2 = \int_X |u|^2 dV \quad , \qquad dV = \frac{1}{2^n n!}\,\omega^n \ .$$

Par adjonction, on obtient les égalités

$$\langle \Delta' u, u\rangle = \|D'u\|^2 + \|\delta' u\|^2 \ , \qquad \langle \Delta'' u, u\rangle = \|D''u\|^2 + \|\delta'' u\|^2 \ ,$$

$$\langle [D',\theta]u,u\rangle = \langle \theta u, \delta' u\rangle + \langle D'u, \theta^* u\rangle \ ,$$

$$\langle [D'',\overline{\theta}]u,u\rangle = \langle \overline{\theta} u, \delta'' u\rangle + \langle D''u, \overline{\theta}^* u\rangle \ .$$

Grâce à l'inégalité

$$|\langle \theta u, \delta' u\rangle| \leq \tfrac{1}{2}(\|\delta' u\|^2 + \|\theta u\|^2)$$

et ses 3 analogues, on déduit alors du corollaire 1.3 l'estimation

$$\frac{3}{2}\langle \Delta'' u,u\rangle \geq \frac{1}{2}\langle \Delta' u,u\rangle + \langle [ic(F),\Lambda]u,u\rangle - C_0\|u\|^2 \ , \tag{1.4}$$

où C_0 est une constante ≥ 0 dépendant de $d'\omega$, mais pas de F .

Soit maintenant ∇ la connexion de E , $D_k = D'_k + D''_k$ celle de $E^k \otimes F$, δ_k l'adjoint de D_k , et Δ'_k, Δ''_k les laplaciens associés.

La courbure de $E^k \otimes F$ se calcule par la formule

$$c(E^k \otimes F) = kc(E) \otimes Id_F + c(F) \ .$$

Pour tout $u \in C^{\infty}_{p,q}(X, E^k \otimes F)$, l'estimation (1.4) implique

$$3(\|D''_k u\|^2 + \|\delta''_k u\|^2) \geq \|D'_k u\|^2 + \|\delta'_k u\|^2 + 2k\langle [ic(E),\Lambda]u,u\rangle - C_1\|u\|^2 \tag{1.5}$$

où $C_1 \geq 0$ dépend de $d'\omega$ et de F , mais pas de k . Nous aurons donc besoin d'évaluer le terme en courbure $[ic(E),\Lambda]$. En tout point $x \in X$, notons

$$\alpha_1(x) \le \alpha_2(x) \le \dots \le \alpha_n(x)$$

les valeurs propres de la (1,1)-forme réelle $ic(E)(x)$, et pour tout multi-indice $I \subset \{1,\dots,n\}$ notons

$$\alpha_I = \sum_{j\in I} \alpha_j .$$

Les α_j sont donc des fonctions continues sur X .
Choisissons une base orthonormée $(\xi_j)_{1\le j\le n}$ de $\Lambda^{1,0}T^*_x X$ qui diagonalise $ic(E)(x)$ sous la forme

$$ic(E)(x) = i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\, \xi_j \wedge \bar{\xi}_j$$

et une base orthonormée $(f_1,\dots,f_m)$ de la fibre $(E^k \otimes F)_x$. Alors pour toute forme $u \in \Lambda^{p,q}T^*_x X$ telle que

$$u = \sum u_{I,J,m}\, \xi_I \wedge \bar{\xi}_J \otimes f_m ,$$

où $|I| = p$, $|J| = q$, $1 \le m \le r$, on a l'égalité classique (cf. par exemple [D1]) :

$$\langle [ic(E),\Lambda]u,u\rangle = \sum_{I,J,m} \Big(\alpha_I + \alpha_J - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\Big) |u_{I,J,m}|^2 . \tag{1.6}$$

2. ESTIMATIONS A PRIORI POUR LES FORMES HARMONIQUES.

D'après la théorie de Hodge, l'espace de cohomologie $H^q(X,E^k\otimes F)$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{H}^q_k$ des (0,q)-formes Δ''_k-harmoniques à valeurs dans $E^k\otimes F$. Toute forme $u \in C^\infty_{0,q}(X,E^k\otimes F)$ peut également être interprétée comme une (n,q)-forme $\tilde{u}$ à valeurs dans le fibré $E^k\otimes\tilde{F}$, où $\tilde{F} = F\otimes\Lambda^n TX$; de plus, l'isomorphisme $u \mapsto \tilde{u}$ est une isométrie

$$C^\infty_{0,q}(X,E^k\otimes F) \xrightarrow{\sim} C^\infty_{n,q}(X,E^k\otimes\tilde{F}) .$$

Si on écrit $u = \sum u_{J,m}\, \bar{\xi}_J \otimes e_m$, l'égalité (1.6) donne

$$\langle [ic(E),\Lambda]u,u\rangle = \sum_{J,m} -\alpha_{\complement J} |u_{J,m}|^2 \ge -(\alpha_{q+1}+\dots+\alpha_n)|u|^2 , \tag{2.1}$$

$$\langle [ic(E),\Lambda]\tilde{u},\tilde{u}\rangle = \sum_{J,m} \alpha_J |u_{J,m}|^2 \ge (\alpha_1+\dots+\alpha_q)|u|^2 . \tag{$\tilde{2.1}$}$$

L'estimation a priori (1.5) appliquée aux formes $u \in C^\infty_{0,q}(X,E^k\otimes F)$ et $\tilde{u} \in C^\infty_{n,q}(X,E^k\otimes\tilde{F})$ entraîne alors les trois inégalités suivantes :

$$\frac{1}{k}\|D'_k u\|^2 - 2B\|u\|^2 \le \epsilon_k(u) , \tag{2.2}$$

$$2\int_X -(\alpha_{q+1}+\dots+\alpha_n)|u|^2 dV \le \epsilon_k(u) , \tag{2.3}$$

$$2\int_X (\alpha_1+\ldots+\alpha_q)|u|^2 dV \le \varepsilon_k(u) \ , \tag{2.$\tilde{3}$}$$

avec

$$B = \max_{x\in X} (\alpha_{q+1}(x)+\ldots+\alpha_n(x)) \ , \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_k(u) = \frac{3}{k}(\|D''_k u\|^2 + \|\delta''_k u\|^2 + C_2\|u\|^2) \ , \quad C_2 \ge 0 \ . \tag{2.5}$$

Soit maintenant h une $(0,q)$-forme harmonique à valeurs dans $E^k\otimes F$ et soit ψ une fonction C^∞ arbitraire sur X. On a $D''_k h = \delta''_k h = 0$, donc

$$D''_k(\psi h) = d''\psi\wedge h \ , \qquad \delta''_k(\psi h) = -d'\psi \lrcorner h \tag{2.6}$$

où $\lrcorner$ désigne le produit intérieur. Considérons le recouvrement de X par les intérieurs des compacts

$$K_+ = \{x\in X \ ; \ \alpha_1(x)+\ldots+\alpha_q(x) \ge \tfrac{1}{2}\} \ ,$$

$$K_- = \{x\in X \ ; \ \alpha_{q+1}(x)+\ldots+\alpha_n(x) \le -\tfrac{1}{2}\} \ ,$$

$$K = \{x\in X \ ; \ \alpha_1(x)+\ldots+\alpha_q(x) \le 1 \ \text{ et } \ \alpha_{q+1}(x)+\ldots+\alpha_n(x) \ge -1\} \ ,$$

et soit (ψ_+,ψ_-,ψ) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, telle que $\psi_+^2+\psi_-^2+\psi^2 = 1$. Les estimations (2.3), (2.$\tilde{3}$), (2.5), (2.6) appliquées à $u = \psi_\pm h$ fournissent alors

$$\|\psi_\pm h\|^2 \le \frac{C_3}{k}\|h\|^2 \ ,$$

de sorte qu'il suffit de savoir contrôler ψh. Ceci sera possible grâce à l'inégalité (2.2), moyennant un lemme de Rellich convenable pour l'opérateur D'_k.

3. UN LEMME DE RELLICH POUR L'OPÉRATEUR $\bar\partial$ DANS $\mathbb{C}^n$.

Soit φ une fonction de classe C^∞ à valeurs réelles dans $\mathbb{C}^n$ (φ de classe C^2 suffirait). On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$ et par $\|w\|_{k\varphi}$ la norme L^2 d'une fonction mesurable complexe w, avec poids $\exp(-k\varphi)$:

$$\|w\|^2_{k\varphi} = \int_{\mathbb{C}^n} |w|^2 \exp(-k\varphi)d\lambda \ .$$

Soit $N(\rho)$ le nombre de points du réseau $\mathbb{Z}[i]^n = (\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^n$ situés dans la boule fermée de centre 0 et de rayon ρ. Nous démontrons alors le lemme de Rellich explicite suivant pour l'opérateur $\bar\partial$.

THÉORÈME 3.1. - Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}^n$ et $A > 0$ un majorant sur K des valeurs propres du Hessien de φ , i.e.

$$\left|\sum \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial z_j \partial \bar{z}_\ell} \xi_j \bar{\xi}_k\right| \leq A|\xi|^2 \ , \quad x \in K \ , \quad \xi \in \mathbb{C}^n \ .$$

Soit σ un réel > 0 quelconque. Pour tout réel $k > 0$ il existe alors un entier

$$\gamma(k) = N(\sqrt{\sigma + 2n}) A^n k^n \lambda(K) + o(k^n) \tag{3.2}$$

et des fonctions $f_{j,k} \in C^0(\mathbb{C}^n)$, $1 \leq j \leq \gamma(k)$, ayant la propriété suivante : pour toute fonction $w \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ à support dans K , on a l'inégalité

$$\|w\|^2_{k\varphi} \leq \frac{1}{\sigma A k} \|\bar{\partial} w\|^2_{k\varphi} + \sum_{1 \leq j \leq \gamma(k)} |\langle w, f_{j,k}\rangle_{k\varphi}|^2 \ . \tag{3.3}$$

Démonstration. - Observons d'abord que le problème est, en un certain sens, local sur K . Soient en effet $K_1, \ldots, K_s$ des compacts dont les intérieurs $\overset{\circ}{K}_\ell$ recouvrent K et soient ψ_ℓ des fonctions réelles C^∞ à support dans K_ℓ , telles que $\sum \psi_\ell^2 = 1$ sur K . L'égalité $2\sum \psi_\ell \bar{\partial}\psi_\ell = 0$ donne

$$\sum_{\ell=1}^{s} |\bar{\partial}(\psi_\ell w)|^2 = \sum_{\ell=1}^{s} |\psi_\ell \bar{\partial}_w + w\bar{\partial}\psi_\ell|^2 = |\bar{\partial} w|^2 + \left(\sum_{\ell=1}^{s} |\bar{\partial}\psi_\ell|^2\right)|w|^2 \ . \tag{3.4}$$

Supposons (3.3) vraie sur chaque K_ℓ ; il suffira alors de sommer les inégalités (3.3) relatives aux fonctions $\psi_\ell w$ pour obtenir celle relative à w , car la constante $\sum |\bar{\partial}\psi_\ell|^2$ figurant dans (3.4) se trouve multipliée par le facteur $1/k$ tendant vers 0 .

Pour démontrer l'inégalité (3.3) on va utiliser un pavage de K par des cubes de côté assez petit. On considère pour cela le pavé "modèle" P de côté 2 défini par

$$P = \{z = (x_j + iy_j)_{1 \leq j \leq n} \ ; \ |x_j| \leq 1 \ , \ |y_j| \leq 1\} \ . \tag{3.5}$$

On définit une fonction $\psi \in C^0(\mathbb{C}^n)$, à support dans P , en posant

$$\psi(z) = \prod_{1 \leq j \leq n} \cos\frac{\pi}{2} x_j \cdot \cos\frac{\pi}{2} y_j \ , \quad z \in P \ , \tag{3.6}$$

de sorte que la fonction ψ s'annule sur ∂P . Des relations $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(\cos\frac{\pi}{2} x_j \cdot \cos\frac{\pi}{2} y_j) = -\frac{\pi}{4}(\sin\frac{\pi}{2} x_j \cos\frac{\pi}{2} y_j + i\cos\frac{\pi}{2} x_j \sin\frac{\pi}{2} y_j)$, on tire aussitôt :

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}[i]^n} \psi(z-\nu)^2 = 1 \ , \tag{3.7}$$

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}[i]^n} |\bar{\partial}\psi(z-\nu)|^2 = n\frac{\pi^2}{8} \ . \tag{3.8}$$

L'inégalité (3.3) va alors se déduire du lemme crucial suivant par un argument de partition de l'unité.

LEMME 3.9. - Soit ρ un réel > 0 et v, χ des fonctions complexes de classe C^∞ sur P, avec $v_{|\partial P} = 0$. Alors il existe des fonctions $f_j \in C^\infty(P)$, $1 \leq j \leq N = N(2\rho/\pi)$, telles que

$$\int_P |v|^2 \exp(-\mathrm{Re}\,\chi) d\lambda \leq \frac{2}{\rho^2} \int_P (|\bar\partial v|^2 + \frac{1}{4} |\bar\partial \chi|^2 |v|^2) \exp(-\mathrm{Re}\,\chi) d\lambda + \sum_{j=1}^{N} |\langle v, f_j \rangle_\chi|^2 .$$

Démonstration. - Posons $g = v \exp(-\chi/2)$. On a alors

$$\bar\partial g = (\bar\partial v - \frac{1}{2} v \bar\partial \chi) \exp(-\chi/2) ,$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$|\bar\partial g|^2 \leq 2(|\bar\partial v|^2 + \frac{1}{4} |\bar\partial \chi|^2 |v|^2) \exp(-\mathrm{Re}\,\chi) .$$

L'inégalité du lemme 3.9 est donc une conséquence de l'inégalité

$$\int_P |g|^2 d\lambda \leq \frac{1}{\rho^2} \int_P |\bar\partial g|^2 d\lambda + \sum_j |\langle g, f_j \exp(-\chi/2) \rangle|^2 . \tag{3.10}$$

Identifions l'espace mesuré $(P, d\lambda)$ au tore $(\mathbb{R}/2\mathbb{Z})^{2n}$ et considérons les coefficients de Fourier de g définis par

$$\hat g(\nu) = \int_P g(z) \exp(-i\pi \,\mathrm{Re}\langle \nu, z \rangle) d\lambda(z) , \qquad \nu \in \mathbb{Z}[i]^n .$$

Comme g s'annule sur ∂P, on obtient après intégration par parties l'égalité

$$\widehat{\frac{\partial g}{\partial z_j}}(\nu) = \frac{i\pi}{2} \nu_j \hat g(\nu) .$$

La formule de Parseval-Plancherel donne alors les identités

$$\int_P |g|^2 d\lambda = 2^{-2n} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}[i]^n} |\hat g(\nu)|^2 ,$$

$$\int_P |\bar\partial g|^2 d\lambda = 2^{-2n} \frac{\pi^2}{4} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}[i]^n} |\nu|^2 |\hat g(\nu)|^2 .$$

Pour assurer la validité de (3.10), il suffit donc de prendre pour fonctions f_j les fonctions $z \mapsto 2^{-n} \exp(i\pi \,\mathrm{Re}\langle \nu, z \rangle + \chi/2)$ avec $|\nu| < \frac{2\rho}{\pi}$. Le lemme est démontré. ■

On considère maintenant le recouvrement du compact K par la famille de pavés

$$P_\nu = \frac{1}{\sqrt{Ak}} (P + \nu) , \qquad \nu \in \mathbb{Z}[i]^n \tag{3.11}$$

de côté $2/\sqrt{Ak}$ et de centre $a_\nu = \nu/\sqrt{Ak}$. Posons

$$\psi_\nu(z) = \psi(\sqrt{Ak}\, z - \nu) \tag{3.12}$$

de sorte que $\mathrm{Supp}\, \psi_\nu \subset P_\nu$. D'après (3.7), (3.8) et (3.4), il vient

$$\|w\|^2_{k\varphi} = \sum_\nu \|\psi_\nu w\|^2_{k\varphi} \tag{3.13}$$

$$\sum_\nu \|\bar\partial(\psi_\nu w)\|^2_{k\varphi} = \|\bar\partial w\|^2_{k\varphi} + n\frac{\pi^2}{8}Ak\|w\|^2_{k\varphi} . \tag{3.14}$$

On va maintenant appliquer le lemme 3.9 aux fonctions $\psi_\nu w$ sur chaque cube P_ν. On cherche pour cela un poids $\chi = \chi_\nu$ tel que $\operatorname{Re}\chi_\nu = \varphi$, qui minimise $\bar\partial\chi$ sur P_ν. Dans toute la suite, nous conviendrons de noter $C_1, C_2, \ldots$ des constantes dépendant éventuellement de K et de φ, mais indépendantes de k, ε, ν. Pour tout $z \in P_\nu$ la formule de Taylor donne

$$\varphi(z) = \operatorname{Re} F_\nu(\zeta) + \sum_{1\le j,\ell\le n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \bar z_\ell}(a_\nu)\zeta_j\bar\zeta_\ell + \eta(\zeta)$$

où $\zeta = z - a_\nu$, $\eta(\zeta) \le C_1|\zeta|^3$, et où F_ν est le polynôme holomorphe défini par

$$F_\nu(\zeta) = \varphi(a_\nu) + 2\sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(a_\nu)\zeta_j + \sum_{j,\ell}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial z_\ell}(a_\nu)\zeta_j\zeta_\ell .$$

On pose alors

$$\chi_\nu(z) = \varphi(z) + i\operatorname{Im} F_\nu(\zeta) ,$$

de sorte que

$$\frac{\partial\chi_\nu}{\partial\bar z_\ell} = \sum_{1\le j\le n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar z_\ell}(a_\nu)\zeta_j + \frac{\partial\eta}{\partial\bar z_\ell}(\zeta) , \qquad \left|\frac{\partial\eta}{\partial\bar z_\ell}(\zeta)\right| \le C_2|\zeta|^2 .$$

Puisque les valeurs propres de $i\partial\bar\partial\varphi$ sont majorées par A et puisque $|\zeta_j|^2 \le 2/Ak$ sur P_ν, nous obtenons :

$$|\bar\partial\chi_\nu|^2 \le A^2|\zeta|^2 + C_3|\zeta|^3 \le 2nA/k + C_4 k^{-3/2} . \tag{3.15}$$

Appliquons maintenant le lemme 3.9 au poids $\chi(z) = k\chi_\nu((z+\nu)/\sqrt{Ak})$ et à la fonction $v(z) = \psi(z)w((z+\nu)/\sqrt{Ak}) = (\psi_\nu w)((z+\nu)/\sqrt{Ak})$, $z \in P$.

L'estimation (3.15) entraîne $|\bar\partial\chi|^2 \le 2n + C_5 k^{-\frac12}$, d'où

$$\|\psi_\nu w\|^2_{k\varphi} \le \frac{2}{\rho^2}\left[\frac{1}{Ak}\|\bar\partial(\psi_\nu w)\|^2_{k\varphi} + \left(\frac{n}{2} + C_5 k^{-\frac12}\right)\|\psi_\nu w\|^2_{k\varphi}\right] + \sum_{j=1}^N |\langle w, \psi_\nu f_j\rangle_{k\varphi}|^2 . \tag{3.16}$$

Pour achever la démonstration, il ne reste plus qu'à sommer les inégalités (3.16) sur les cubes P_ν qui rencontrent K. En utilisant (3.13) et (3.14) on obtient alors

$$\|w\|^2_{k\varphi} \le \frac{2}{\rho^2}\left[\frac{1}{Ak}\|\bar\partial w\|^2_{k\varphi} + \left(n\left(\frac12 + \frac{\pi^2}{8}\right) + C_5 k^{-\frac12}\right)\|w\|^2_{k\varphi}\right]$$
$$+ \sum_{1\le j\le \gamma(k)} |\langle w, f_{j,k}\rangle_{k\varphi}|^2 \tag{3.17}$$

où les fonctions $(f_{j,k})$ ne sont autres que les fonctions $\psi_\nu f_j$ après réindexation. L'inégalité (3.17) implique (3.3) en faisant passer le terme $\|w\|^2_{k\varphi}$ du membre de droite dans le membre de gauche ; il suffit pour cela que

$$\sigma < \frac{1-(1+\pi^2/4)n/\rho^2}{2/\rho^2} = \frac{\rho^2}{2} - \left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8}\right)n ,$$

ce qui est réalisé par exemple pour $\rho = \frac{\pi}{2}\sqrt{\sigma+2n}$. L'entier $\gamma(k)$ est alors donné par

$$\gamma(k) = N\,\mathrm{card}\{\nu \,;\, P_\nu \cap K \neq \emptyset\}$$

avec $N = N\left(\frac{2\rho}{\pi}\right) = N(\sqrt{\sigma+2n})$. Comme la maille du réseau des translations définissant les cubes P_ν a pour volume $(Ak)^{-n}$, il vient

$$\mathrm{card}\{\nu \,;\, P_\nu \cap K \neq \emptyset\} = A^n k^n \lambda(K) + o(k^n) ,$$

et l'estimation (3.2) s'ensuit. ■

4. <u>LEMME DE RELLICH POUR L'OPÉRATEUR</u> D_k' .

Comme l'estimation (3.3) est <u>locale</u>, elle peut s'étendre sans difficulté au cas de l'opérateur D_k' agissant sur une section $u \in C^\infty_{0,q}(X, E^k \otimes F)$. Pour cela, il suffit d'appliquer le théorème 3.1 aux composantes de u dans des coordonnées locales convenables.

THÉORÈME 4.1. - <u>Soit</u> K <u>une partie compacte de</u> X <u>et</u> $\mathrm{Vol}(K)$ <u>son volume relativement à la métrique</u> ω . <u>Soit</u> A <u>un réel</u> > 0 <u>tel que</u>

$$\sup_{x\in K} \max_{1\le j\le n} |\alpha_j(x)| \le A ,$$

<u>où</u> $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n$ <u>sont les valeurs propres de</u> $ic(E)$, <u>et</u> σ <u>un réel</u> >0 <u>quelconque. Pour tout entier</u> $k>0$, <u>il existe alors un entier</u>

$$\nu(k) = \binom{n}{q} r\, N(\sqrt{\sigma+2n})\, A^n k^n\, \mathrm{Vol}(K) + o(k^n) \tag{4.3}$$

<u>et des formes</u> $v_{j,k} \in C^0_{0,q}(X, E^k \otimes F)$, $1 \le j \le \nu(k)$, <u>telles que pour tout</u> $u \in C^\infty_{0,q}(X, E^k\otimes F)$ <u>à support dans</u> K <u>on ait</u>

$$\|u\|^2 \le \frac{1}{\sigma A k}\|D_k' u\|^2 + \sum_{1\le j\le \nu(k)} |\langle u, v_{j,k}\rangle|^2 . \tag{4.4}$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $\varepsilon \in \,]0,1[$ un réel fixé. On va d'abord démontrer que l'inégalité (4.4) a lieu a un facteur multiplicatif $1+\varepsilon$ près dès que K est assez petit. On suppose que K est contenu dans un ouvert de carte $\Omega \subset X$ qui trivialise les fibrés E et F . Pour simplifier les notations, on identifiera $E_{|\Omega}$ au fibré trivial $\Omega \times \mathbb{C}$; la métrique de E est alors donnée par un poids $e^{-\varphi}$, et la

courbure de E est telle que

$$ic(E) = i\partial\bar{\partial}\varphi \quad \text{sur } \Omega . \tag{4.5}$$

Soit d'autre part $(f_1,\ldots,f_m)$ un repère orthonormé C^∞ de $F_{|\Omega}$. Quitte à rétrécir Ω, on peut supposer que Ω est muni de coordonnées locales holomorphes $(z_1,\ldots,z_n)$ approximativement orthonormées, telles que

$$(1+\varepsilon)^{-1}\, i \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j \leq \omega_{|\Omega} \leq (1+\varepsilon)\, i \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j . \tag{4.6}$$

Via l'identification $E_{|\Omega} \simeq \Omega \times \mathbb{C}$, toute forme $u \in C^\infty_{0,q}(X, E^k \otimes F)$ peut s'écrire

$$u = \sum_{J,m} u_{J,m}\, d\bar{z}_J \otimes f_m , \quad |J| = q , \quad 1 \leq m \leq r .$$

LEMME 4.7. - <u>L'opérateur</u> D'_k <u>est défini par la formule</u>

$$D'_k u = \sum_{J,m} \sum_{1\leq \ell \leq n} e^{k\varphi} \frac{\partial}{\partial z_\ell}(e^{-k\varphi} u_{J,m}) dz_\ell \wedge d\bar{z}_J \otimes f_m$$
$$+ (-1)^q \sum_{J,m} u_{J,m}\, d\bar{z}_J \otimes D' f_m .$$

<u>Démonstration</u>. - En utilisant la formule de différentiation d'un produit tensoriel, on se ramène au cas où le fibré F est trivial (la métrique de F étant elle aussi triviale). Soit

$$(\cdot|\cdot)_k : C^\infty_{p,q}(X, E^k) \times C^\infty_{s,t}(X, E^k) \longrightarrow C^\infty_{p+t,\, q+s}(X, \mathbb{C})$$

l'accouplement sesquilinéaire induit par la métrique de E^k. Relativement à la trivialisation $E^k_{|\Omega} \simeq \Omega \times \mathbb{C}$, cet accouplement est défini par

$$(v|w)_k = v \wedge \bar{w}\, e^{-k\varphi} .$$

Comme la connexion D_k est hermitienne et holomorphe, on a la formule

$$\partial(v|w)_k = (D'_k v|w)_k + (-1)^{\deg v}(v|\bar{\partial} w)_k .$$

Ceci implique $D'_k = e^{k\varphi}\partial(e^{-k\varphi}\,\cdot)$, d'où le lemme. ∎

Posons $w_{J,m} = u_{J,m} e^{-k\varphi}$. D'après (4.6) on a l'inégalité

$$\|u\|^2 \leq (1+\varepsilon)^{n+q} \sum_{J,m} \int_K |w_{J,m}|^2 e^{k\varphi} d\lambda \tag{4.8}$$

car $\operatorname{Supp} u \subset K \subset \Omega$; le coefficient $(1+\varepsilon)^n$ provient de l'inégalité $dV \leq (1+\varepsilon)^n d\lambda$, le coefficient $(1+\varepsilon)^q$ de la métrique du fibré $\Lambda^{0,q}T^*X$. Le lemme 4.7 peut se récrire par ailleurs

$$e^{k\varphi/2}\sum_{J,m}\partial(w_{J,m})\wedge d\bar z_J\otimes f_m = e^{-k\varphi/2}\Big[D'_k u-(-1)^q\sum_{J,m}u_{J,m}d\bar z_J\otimes D'f_m\Big] .$$

Grâce à l'inégalité $(a+b)^2 \leq (1+\varepsilon)(a^2+\varepsilon^{-1}b^2)$, il vient :

$$\sum_{J,m}\int_K|\partial w_{J,m}|^2 e^{k\varphi}d\lambda \leq (1+\varepsilon)^{n+q+2}\Big[\|D'_k u\|^2 + \frac{C_1}{\varepsilon}\|u\|^2\Big] , \tag{4.9}$$

où C_1 est un majorant de $(|D'f_1|+\ldots+|D'f_r|)^2$ sur K .

Les valeurs propres de $ic(E) = i\partial\bar\partial\varphi$ sont d'autre part majorées sur K par $(1+\varepsilon)A$. Appliquons alors le théorème 3.1 aux fonctions $\bar w_{J,m}$, où φ est remplacé par $-\varphi$ et A par $(1+\varepsilon)^{2n+2q+3}A$. Il vient

$$\|w_{J,m}\|^2_{-k\varphi} \leq \frac{(1+\varepsilon)^{-2n-2q-3}}{\sigma Ak}\|\partial w_{J,m}\|^2_{-k\varphi} + \sum_{1\leq j\leq\gamma(k)}|\langle w_{J,m},f_{j,k}\rangle_{-k\varphi}|^2 . \tag{4.10}$$

En combinant (4.8), (4.9) et (4.10) on obtient après sommation sur J,m :

$$\|u\|^2 \leq \frac{(1+\varepsilon)^{-1}}{\sigma Ak}\Big[\|D'_k u\|^2 + \frac{C_1}{\varepsilon}\|u\|^2\Big] + \sum_{1\leq j\leq\nu(k)}|\langle u,v_{j,k}\rangle|^2 , \tag{4.11}$$

et comme $\lambda(K) \leq (1+\varepsilon)^n\,\mathrm{Vol}(K)$ il vient

$$\nu(k) = \binom{n}{q}r\,\gamma(k) \leq \binom{n}{q}r\,N(\sqrt{\sigma+2n})(1+\varepsilon)^{C_2}A^n k^n\,\mathrm{Vol}(K) + o(k^n) . \tag{4.12}$$

Ceci suppose que $\mathrm{Supp}\,u \subset K$ et que le compact K soit assez petit. Dans le cas général, soient $K_1,\ldots,K_s$ des compacts dont les intérieurs $\overset{\circ}{K}_\ell$ recouvrent K , tels que (4.11) et (4.12) soient réalisés sur chaque K_ℓ et tels que

$$\mathrm{Vol}(K_1) +\ldots+ \mathrm{Vol}(K_s) < \mathrm{Vol}(K) + \varepsilon .$$

Soient ψ_ℓ des fonctions réelles C^∞ à support dans K_ℓ vérifiant $\sum\psi_\ell^2 = 1$ sur K . On a alors l'estimation suivante, analogue à (3.4) :

$$\sum_{\ell=1}\|D'_k(\psi_\ell u)\|^2 \leq \|D'_k u\|^2 + C_3\|u\|^2 , \tag{4.13}$$

où C_3 est un majorant pour $\sum|\partial\psi_\ell|^2$. Les inégalités (4.11) et (4.12) relatives aux formes $\psi_\ell u$ impliquent

$$\|u\|^2 \leq \frac{(1+\varepsilon)^{-1}}{\sigma Ak}\Big[\|D'_k u\|^2 + \Big(\frac{C_1}{\varepsilon}+C_3\Big)\|u\|^2\Big] + \sum_{1\leq j\leq\nu(k)}|\langle u,v_{j,k}\rangle|^2$$

avec

$$\nu(k) = \binom{n}{q}r\,N(\sqrt{\sigma+2n})(1+\varepsilon)^{C_2}A^n k^n(\mathrm{Vol}(K)+\varepsilon) + o(k^n) .$$

Le théorème 4.1 s'ensuit si l'on fait tendre ε vers 0 . ■

5. MAJORATION ASYMPTOTIQUE DE LA DIMENSION DES GROUPES DE COHOMOLOGIE.

Pour illustrer la méthode, nous commencerons d'abord par étudier le cas particulièrement simple où $ic(E) \geq 0$.

THEOREME 5.1. - On suppose $ic(E) \geq 0$ sur X . Alors $\dim H^q(X, E^k \otimes F) = o(k^n)$ si $q \geq 1$.

Ce résultat est dû à Y.T. Siu [Siu 2] (avec une preuve différente) ; grâce à la formule de Riemann-Roch (0.3), on en déduit la minoration suivante du H^0 :

$$\dim H^0(X, E^k \otimes F) \geq r \frac{k^n}{n!} c_1(E)^n - o(k^n) . \tag{5.2}$$

En utilisant le théorème 0.7 on voit que la proposition 5.1 entraîne déjà la conjecture de Grauert-Riemenschneider dans sa formulation 0.9 (b).

Démonstration du théorème 5.1. - Soit Ω_+ l'ouvert des points de X où $ic(E)$ est définie > 0 (c'est-à-dire où $(ic(E))^n > 0$), et K un voisinage compact de $X \setminus \Omega_+$. Pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir K tel que

$$\int_K (ic(E))^n < \epsilon .$$

Si $K_+ \subset \Omega_+$ est un voisinage compact de $\overline{X \setminus K}$, il existe des fonctions $\psi, \psi_+ \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ à support dans K, K_+ respectivement, telles que $\psi^2 + \psi_+^2 = 1$ sur X .

Soit $\tilde{\omega}$ une métrique hermitienne arbitraire sur X , η un réel > 0 et $\omega = ic(E) + \eta\tilde{\omega}$. Puisque $K_+ \subset \Omega_+$, $ic(E)$ est définie > 0 sur K_+ . Les valeurs propres α_j de $ic(E)$ relativement à la métrique ω vérifient donc $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq 1$ sur X , et sur K_+ on aura

$$\frac{1}{2} \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq 1 \tag{5.3}$$

dès que η est assez petit ; pour $\eta < \eta_0$ suffisamment petit, on aura de plus

$$\mathrm{Vol}(K) = \int_K \frac{\omega^n}{2^n n!} < \epsilon .$$

Soit alors h une $(0,q)$-forme harmonique à valeurs dans $E^k \otimes F$, $q \geq 1$. Les estimations $(2.\tilde{3})$, (2.5), (2.6) pour $u = \psi_+ h$ donnent

$$\|\psi_+ h\|^2 \leq \frac{C_3}{k} \|h\|^2 , \tag{5.4}$$

tandis que les inégalités (2.2), (2.4) pour $u = \psi h$ impliquent

$$\frac{1}{k}\,\|D'_k(\psi h)\|^2 - (2n-2)\|\psi h\|^2 \leq \frac{C_4}{k}\,\|h\|^2 . \tag{5.5}$$

Utilisons maintenant le théorème 4.1 avec $u = \psi h$, $A = 1$, $\sigma = 2n-1$. Il vient

$$(2n-1)\|\psi h\|^2 - \frac{1}{k}\|D'_k(\psi h)\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\nu(k)} |\langle h, \psi v_{j,k}\rangle|^2 . \tag{5.6}$$

Par addition de (5.4), (5.5), (5.6), on en déduit

$$\|h\|^2 = \|\psi h\|^2 + \|\psi_+ h\|^2 \leq \frac{C_5}{k}\|h\|^2 + \sum_{j=1}^{\nu(k)} |\langle h, \psi v_{j,k}\rangle|^2 ,$$

ce qui entraîne $h = 0$ dès lors que $k > C_5$ et $\langle h, \psi v_{j,k}\rangle = 0$, $1 \leq j \leq \nu(k)$. Il vient donc

$$\dim H^q(X, E^k \otimes F) \leq \nu(k) \leq \binom{n}{q} r\, N(\sqrt{4n-1})k^n \epsilon + o(k^n)$$

pour k assez grand, et le théorème 5.1 est démontré. ■

Démonstration du théorème 0.1. - L'idée est analogue est celle du théorème 5.1 : elle consiste à combiner l'estimation a priori du Δ''_k avec le lemme de Rellich pour l'opérateur D'_k . Nous aurons besoin pour cela de construire une métrique hermitienne adéquate sur X .

Désignons par S l'ensemble des points $x \in X$ en lesquels la forme de courbure $ic(E)(x)$ est dégénérée. Avec les notations de l'introduction, posons

$$\Omega_+ = X(0) \cup \ldots \cup X(q-1) , \quad \Omega_- = X(q+1) \cup \ldots \cup X(q) .$$

On a alors une partition de X :

$$X = S \cup X(q) \cup \Omega_+ \cup \Omega_- .$$

L'ensemble $S \cup X(q)$ est compact, et $c(E)^n = 0$ sur S . Pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc un voisinage compact K de $S \cup X(q)$ tel que

$$\int_{K \setminus X(q)} |c(E)^n| < \epsilon / 2n^n . \tag{5.7}$$

On choisit d'autre part des compacts $K_+ \subset \Omega_+$, $K_- \subset \Omega_-$ tels que

$$X = \mathring{K} \cup \mathring{K}_+ \cup \mathring{K}_- .$$

On va maintenant construire une métrique hermitienne ω sur X qui sera intimement reliée à la forme de courbure $ic(E)$. Soit $\tilde{\omega}$ une métrique hermitienne fixée une fois pour toutes et $\tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\alpha}_2 \leq \ldots \leq \tilde{\alpha}_n$ les valeurs propres de $ic(E)$ relativement à $\tilde{\omega}$.

On définit trois formes hermitiennes ω_η , ω_+ , ω_- semi-positives en tout point $x \in X$ en posant

$$\left\{\begin{aligned} \omega_\eta &= i \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\tilde{\alpha}_j(x)^2+\eta^2}\ \zeta_j \wedge \bar{\zeta}_j \quad , \quad \eta > 0 \\ \omega_+ &= i \sum_{\alpha_j<0} n|\tilde{\alpha}_j(x)|\zeta_j \wedge \bar{\zeta}_j + i \sum_{\alpha_j>0} \tilde{\alpha}_j(x)\zeta_j \wedge \bar{\zeta}_j \\ \omega_- &= i \sum_{\alpha_j<0} |\tilde{\alpha}_j(x)|\zeta_j \wedge \bar{\zeta}_j + i \sum_{\alpha_j>0} n\tilde{\alpha}_j(x)\zeta_j \wedge \bar{\zeta}_j \end{aligned}\right. \tag{5.8}$$

relativement à une base $(\zeta_j)_{1\leq j\leq n}$ de $T^*_x X$, orthonormée pour $\tilde{\omega}$ et orthogonale pour $ic(E)$, telle que

$$ic(E) = i \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j(x)\zeta_j \wedge \bar{\zeta}_j \ . \tag{5.9}$$

LEMME 5.10. - ω_η (resp. ω_+ , ω_-) <u>est définie</u> > 0 <u>de classe</u> C^∞ <u>sur</u> X (resp. sur $X \setminus S$) .

<u>Démonstration</u>. - Soit M la matrice de $ic(E)$ dans un repère $\tilde{\omega}$-orthonormé de classe C^∞ de TX et $|M| = \sqrt{M^2}$ la valeur absolue de M . Les matrices de ω_η , ω_+ , ω_- sont données par

$$M_\eta = \sqrt{M^2+\eta^2 I} \ , \qquad M_+ = \frac{n+1}{2}|M| - \frac{n-1}{2}M \ , \qquad M_- = \frac{n+1}{2}|M| + \frac{n-1}{2}M \ .$$

M_η est donc de classe C^∞ sur X , et M_+ , M_- le sont sur $X \setminus S$. ∎

En recollant ω_η , ω_+ , ω_- à l'aide d'une partition de l'unité, on peut construire une métrique C^∞ définie positive ω sur X telle que

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= \omega_\eta \quad \text{sur} \quad S \cup X(q) \ , \\ \omega &= \omega_+ \quad \text{sur} \quad K_+ \ , \\ \omega &= \omega_- \quad \text{sur} \quad K_- \ . \end{aligned}\right. \tag{5.11}$$

Comme les 3 métriques ω_η , ω_+ , ω_- majorent $|ic(E)|$ et comme $\omega_\pm \leq n\omega_\eta$ on a l'encadrement

$$|ic(E)| \leq \omega \leq n\omega_\eta \ . \tag{5.12}$$

Puisque ω_η converge vers $|ic(E)|$ quand η tend vers 0 , (5.7), (5.11), (5.12) entraînent pour $\eta < \eta_0$ assez petit :

$$\int_{K\setminus X(q)} \omega^n < \epsilon/2 \ , \qquad \int_{X(q)} \omega^n < \int_{X(q)} |c(E)^n| + \epsilon/2 \ ,$$

d'où l'inégalité

$$\int_K \omega^n < \int_{X(q)} |c(E)^n| + \epsilon \ . \tag{5.13}$$

Si $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$ sont les valeurs propres de $ic(E)$ relativement à ω, (5.12) implique $|\alpha_j| \leq 1$ sur X, tandis que (5.8), (5.9) et (5.11) donnent

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_j = -\frac{1}{n} \ , \quad \alpha_{j+1} = \ldots = \alpha_n = 1 \quad \text{sur} \quad K_+ \cap X(j) \ , \quad j < q \ ,$$

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_j = -1 \ , \quad \alpha_{j+1} = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n} \quad \text{sur} \quad K_- \cap X(j) \ , \quad j > q \ .$$

En particulier, on en déduit

$$\begin{cases} \alpha_1 + \ldots + \alpha_q \geq 1 - \dfrac{q-1}{n} \geq \dfrac{1}{n} & \text{sur } K_+ \ , \\ -(\alpha_{q+1} + \ldots + \alpha_n) \geq 1 - \dfrac{n-q-1}{n} \geq \dfrac{1}{n} & \text{sur } K_- \ . \end{cases} \tag{5.14}$$

Soient ψ, ψ_+, $\psi_- \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ des fonctions à support dans K, K_+, K_- respectivement, telles que $\psi^2 + \psi_+^2 + \psi_-^2 = 1$ sur X. Pour toute $(0,q)$-forme harmonique h à valeurs dans $E^k \otimes F$, les estimations (2.2) pour $u = \psi h$, (2.3) pour $u = \psi_- h$, $(2.\tilde{3})$ pour $u = \psi_+ h$ entraînent respectivement

$$\frac{1}{k} \|D_k'(\psi h)\|^2 - 2n\|\psi h\|^2 \leq \frac{C_6}{k} \|h\|^2 \ , \tag{5.15}$$

$$\|\psi_\pm h\|^2 \leq \frac{C_7}{k} \|h\|^2 \ . \tag{5.16}$$

Utilisons maintenant le théorème 4.1 avec $u = \psi h$, $A = 1$, $\sigma = 2n+1$. Il vient

$$(2n+1)\|\psi h\|^2 - \frac{1}{k}\|D_k'(\psi h)\|^2 \leq \sum_{1 \leq j \leq \nu(k)} |\langle h, \psi v_{j,k}\rangle|^2 \ . \tag{5.17}$$

Par addition de (5.15), (5.16), (5.17) on en déduit

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \|\psi h\|^2 + \|\psi_+ h\|^2 + \|\psi_- h\|^2 \\ &\leq \frac{C_8}{k} \|h\|^2 + \sum_{1 \leq j \leq \nu(k)} |\langle h, \psi v_{j,k}\rangle|^2 \end{aligned} \tag{5.18}$$

ce qui entraîne $h = 0$ dès lors que $k > C_8$ et $\langle h, \psi v_{j,k}\rangle = 0$, $1 \leq j \leq \nu(k)$. Pour $k > C_8$ il vient

$$\dim H^q(X, E^k \otimes F) \leq \nu(k) \leq \binom{n}{q} r\, N(\sqrt{4n+1}) k^n \, \mathrm{Vol}(K) + o(k^n) \ .$$

D'après (5.13) on a

$$\mathrm{Vol}(K) = \frac{1}{2^n n!}\int_K \omega^n < \frac{1}{2^n n!}\left(\int_{X(q)} |c(E)^n| + \varepsilon\right) .$$

Comme $\binom{n}{q} \leq 2^n$ il s'ensuit

$$\dim H^q(X, E^k \otimes F) \leq \frac{1}{n!} N(\sqrt{4n+1}) r k^n \left(\int_{X(q)} |c(E)^n| + \varepsilon\right) + o(k^n) ,$$

et l'estimation asymptotique 0.1 est donc démontrée avec

$$C(n) = \frac{1}{n!} N\left(\sqrt{4n+1}\right) . \blacksquare$$

Le théorème 0.1 entraîne une minoration du nombre de sections holomorphes de $E^k \otimes F$; plus précisément, on a l'énoncé suivant qui généralise le corollaire 0.4.

COROLLAIRE 5.19. - Supposons que la courbure $c(E)$ n'admette aucun point d'indice pair $\neq 0$. Alors

$$\dim H^0(X, E^k \otimes F) \geq r \frac{k^n}{n!} c_1(E)^n - o(k^n) .$$

Démonstration. - Par hypothèse $X(2) = X(4) = \ldots = \emptyset$, donc le théorème 0.1 donne $H^{2q}(X, E^k \otimes F) = o(k^n)$. Par suite

$$\chi(X, E^k \otimes F) = \dim H^0 - (\dim H^1 + \dim H^3 + \ldots) + o(k^n) ,$$

et le corollaire résulte de la formule de Riemann-Roch (0.3). ■

6. MAJORATION DU NOMBRE DE SECTIONS HOLOMORPHES ET DIMENSION DE KODAIRA.

Tous les résultats de ce paragraphe sont archi-classiques. Nous les rappelons simplement afin de donner un exposé complet et autonome.

Si E est un fibré en droites au-dessus de la variété X (supposée connexe), on notera $V_k = H^0(X, E^k)$ et $h_k = \dim V_k$. Si h_k est > 0 , les sections globales $s \in V_k$ définissent une application holomorphe naturelle

$$\Phi_k : X \setminus Z_k \longrightarrow \mathbb{P}(V_k^*) \simeq \mathbb{P}^{h_k - 1}$$

où $Z_k \subset X$ est le sous-ensemble analytique de leurs zéros communs : pour tout $x \in X \setminus Z_k$, l'image $\Phi_k(x)$ est définie comme droite épointée de V_k^* par

$$\Phi_k(x) = \left\{ (V_k \ni s \mapsto \xi . s(x)) \ ; \ \xi \in E_x^{-k} , \ \xi \neq 0 \right\} \in \mathbb{P}(V_k^*) .$$

Soit ρ_k le rang maximum de Φ_k sur $X \setminus Z_k$.

DÉFINITION 6.1. - On appelle dimension de Kodaira de E l'entier

$\varkappa(E) = \max\{\rho_k \,;\, k \geq 1 \text{ et } h_k \neq 0\}$

si $h_k \neq 0$ pour au moins un $k \geq 1$, et $\varkappa(E) = -\infty$ sinon.

On a alors la majoration suivante pour les dimensions h_k .

THÉORÈME 6.2. - Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout entier $k \geq 1$ on ait

$h_k = \dim H^0(X, E^k) \leq C k^{\varkappa(E)}$.

Démonstration. - Nous reprenons pour l'essentiel les arguments de Siegel [S] tels qu'ils sont exposés dans [Siu 1]. Soit $\{\Omega_\ell\}$ un recouvrement de X par des ouverts de coordonnées $\Omega_\ell \subset \mathbb{C}^n$ et $B_j = B(a_j, R_j)$, $1 \leq j \leq m$, une famille de boules relativement compactes dans les ouverts Ω_ℓ , telles que les boules concentriques $B'_j = B(a_j, \frac{1}{7} R_j)$ recouvrent X . Munissons E d'une métrique hermitienne, et soit $\exp(-\varphi_j)$ le poids représentant cette métrique dans une trivialisation de E au voisinage de $\overline{B}_j$.

Soit alors $s \in H^0(X, E^k)$ une section holomorphe qui s'annule à l'ordre p en un point $x_j \in B'_j$. Les inclusions

$$B'_j \subset B\left(x_j, \tfrac{2}{7} R_j\right) \subset B\left(x_j, \tfrac{6}{7} R_j\right) \subset B_j$$

et le lemme de Schwarz appliqué aux deux boules intermédiaires entraînent l'inégalité

$$\sup_{B'_j} |s| \leq \exp(Ak) 3^{-p} \sup_{B_j} |s| \tag{6.3}$$

où $A = \max_{1 \leq j \leq m} \operatorname{diam} \varphi_j(\overline{B}_j)$ est l'oscillation maximale des poids φ_j sur les boules B_j .

Cela étant, on peut supposer $h_k > 0$. Choisissons pour tout $j = 1, \ldots, m$ un point $x_j \in B'_j \setminus Z_k$ tel que $d\Phi_k$ soit de rang maximum $= \rho_k$ en x_j , et soit $s_0 \in H^0(X, E^k)$ une section qui ne s'annule en aucun point x_j . Pour tout $s \in H^0(X, E^k)$ le quotient s/s_0 est bien défini en tant que fonction méromorphe sur

X , et de plus s/s_0 est une fonction holomorphe au voisinage de x_j , constante le long des fibres de Φ_k . Comme Φ_k est une subimmersion au voisinage de chaque point x_j (théorème du rang), on peut choisir localement une sous-variété complexe M_j de dimension ρ_k passant par x_j et transverse à la fibre $\Phi_k^{-1}(\Phi_k(x_j))$. La section s s'annulera à l'ordre p en chaque point x_j , $1 \leq j \leq m$, si et seulement si les dérivées partielles d'ordre $< p$ de s/s_0 le long de M_j s'annulent en x_j . Ceci correspond au total à l'annulation d'au plus mp^{ρ_k} dérivées. Si nous choisissons $p = ([A]+1)k$, alors l'inégalité (6.3) entraîne

$$\sup_X |s| \leq (e/3)^p \sup_X |s|$$

d'où $s = 0$. Comme $\rho_k \leq \varkappa(E)$, nous obtenons par conséquent

$$\dim H^0(X, E^k) \leq mp^{\rho_k} \leq Ck^{\varkappa(E)} \quad . \blacksquare$$

Pour achever la preuve du théorème 0.7 et donc de la conjecture de Grauert-Riemenschneider, il suffit maintenant de combiner le théorème 6.2 avec le résultat élémentaire (6.5) ci-dessous.

THÉORÈME 6.4. - Soit $a(X) = \mathrm{deg.tr}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{M}(X)$ la dimension algébrique de X . Alors :

- $\varkappa(E) \leq a(X)$ pour tout fibré en droites E sur X ; (6.5)
- $0 \leq a(X) \leq n$, et il existe un diviseur positif D sur X tel que $\varkappa(\mathcal{O}(D)) = a(X)$. (6.6)

Démonstration de (6.5). - Avec les notations du début, soit $x \in X \setminus Z_k$ un point où le rang de $d\Phi_k$ est égal à ρ_k . Pour tout voisinage U de x assez petit, $\Phi_k(U)$ est une sous-variété analytique de dimension ρ_k de $\mathbb{P}(V_k^*)$. Il existe donc des coordonnées homogènes $s_0, s_1, \ldots, s_{\rho_k} \in V_k^{**} \simeq V_k$ sur V_k^* telles que $\dfrac{s_1}{s_0}, \ldots, \dfrac{s_{\rho_k}}{s_0}$ forment un système de coordonnées locales sur $\Phi_k(U)$. Ceci entraîne que le point $\left(\dfrac{s_1}{s_0}(x), \ldots, \dfrac{s_{\rho_k}}{s_0}(x)\right)$ où $x \in U$ décrit un ouvert de $\mathbb{C}^{\rho_k}$, et donc que les fonctions méromorphes $\dfrac{s_1}{s_0}, \ldots, \dfrac{s_{\rho_k}}{s_0}$ sont algébriquement indépendantes sur X . Par conséquent $\rho_k \leq a(X)$ et $\varkappa(E) \leq a(X)$.

Démonstration de (6.6). - Soient $f_1,\dots,f_N$ des fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur X et soit D la borne supérieure (ou la somme) des diviseurs polaires des f_j. Rappelons que $\mathcal{O}(D)$ désigne le faisceau inversible des fonctions méromorphes dont le diviseur des pôles est $\leq D$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_N]$ de degré $\leq k$, $P(f_1,\dots,f_N)$ est une section de $\mathcal{O}(kD) = \mathcal{O}(D)^k$, et il y a $\binom{k+N}{N} \geq \frac{k^N}{N!}$ telles sections linéairement indépendantes. D'après le théorème 6.2, on a donc $\frac{k^N}{N!} \leq Ck^{\varkappa(\mathcal{O}(D))}$, ce qui entraîne $N \leq \varkappa(\mathcal{O}(D))$ et en particulier $N \leq n$. Si on choisit N maximal, i.e. $N = a(X)$, il vient $\varkappa(\mathcal{O}(D)) = a(X)$ grâce à (6.5). ∎

7. THÉORÈME D'ANNULATION SOUS HYPOTHÈSE DE SEMI-POSITIVITÉ.

Nous démontrons ici le théorème d'annulation 0.10, qui est dû à [Siu 2] ; la preuve en est indirecte, et utilise la solution de la conjecture de Grauert-Riemenschneider.

THÉORÈME 7.1. - Soit X une variété complexe compacte et connexe, de dimension n, E un fibré hermitien en droites au-dessus de X. Si $ic(E)$ est ≥ 0 sur X et > 0 en au moins un point, alors

$$H^q(X, K_X \otimes E) = 0 = H^{n-q}(X, E^{-1})$$

pour tout $q = 1,\dots,n$.

Démonstration. - Dans le cas où X est kählérienne, on raisonne comme O. Riemenschneider [R]. Soit h une forme harmonique dans $H^{n-q}(X, E^{-1})$. L'identité 1.3 pour $F = E^{-1}$ donne

$$\|D'h\|^2 + \|\delta'h\|^2 - \langle [ic(E), \Lambda]h, h\rangle = 0 ,$$

et la formule (2.1) entraîne que h s'annule sur l'ouvert de X où $ic(E) > 0$. Le résultat de Aronszajn [Ar] sur les zéros des solutions d'équations elliptiques implique alors que h est identiquement nulle sur X.

Dans le cas général, le théorème 0.9 (b) montre que X est de Moishezon. Il existe donc d'après [Moi] une modification propre $\pi : \tilde{X} \to X$ telle que $\tilde{X}$ soit une variété projective. Le fibré $\tilde{E} = \pi^* E$ est lui aussi semi-positif et > 0 en au moins un point de $\tilde{X}$, car $c(\tilde{E}) = \pi^*(c(E))$. Par suite $H^{n-q}(\tilde{X}, \tilde{E}^{-1}) = 0$. Or le morphisme naturel

$$\pi^* : H^{n-q}(X, E^{-1}) \longrightarrow H^{n-q}(\tilde{X}, \tilde{E}^{-1})$$

est clairement injectif : on a en effet $\pi_* \circ \pi^* = \mathrm{id}$ où π_* désigne le morphisme image directe

$$\pi_* : H^{n-q}(\tilde{X}, \tilde{E}^{-1}) \longrightarrow H^{n-q}(X, E^{-1})$$

calculé au sens des courants (on utilise ici le fait que la cohomologie peut être calculée indifféremment au moyen des formes C^∞ ou au moyen des courants).

La démonstration de la nullité de $H^q(X, K_X \otimes E)$ est analogue, si on identifie cet espace à l'espace des (n,q)-formes harmoniques à valeurs dans E . On peut aussi se ramener au cas précédent en invoquant la dualité de Serre :

$$H^q(X, K_X \otimes E)^* \simeq H^{n-q}(X, E^{-1}) \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[Ar] N. ARONSZAJN, A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. J. Math. Pures Appl., 36 (1957), pp. 235-249.

[A-S] M.F. ATIYAH and I.M. SINGER, The index of elliptic operators III ; Ann. of Math. 87 (1968), pp. 546-604.

[D 1] J.P. DEMAILLY, Sur l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne. Séminaire P. Lelong - P. Dolbeault - H. Skoda (Analyse) 1983-84, Lecture Notes in Math. n° 1198, Springer-Verlag.

[D 2] J.P. DEMAILLY, Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie. C.R. Acad. Sc. Paris, t.301, Série I, n° 4, 1985, pp. 119-122.

[D 3] J.P. DEMAILLY, Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie. Ann. Inst. Fourier, t.35, fasc. 4, 1985.

[G-R] H. GRAUERT und O. RIEMENSCHNEIDER, Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf Komplexen Räume. Invent. Math. 11 (1970), pp. 263-292.

[Gri] P. GRIFFITHS, The extension problem in complex analysis II : embedding with positive normal bundle. Amer. J. of Math. 88 (1966), pp. 366-446.

[Moi] B. MOIŠEZON, On n-dimensional compact varieties with n algebraically independant meromorphic functions. Amer. Math. Soc. Transl. 63 (1967), pp. 51-177.

[R] O. RIEMENSCHNEIDER, Characterizing Moišezon spaces by almost positive coherent analytic sheaves. Math. Zeit., t. 123 (1971), pp. 263-284.

[S] C.L. SIEGEL, Meromorphe Funktionen auf kompakten Mannigfaltigkeiten. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kℓ. 1955, N°4, pp. 71-77.

[Siu 1] Y.T. SIU, A vanishing theorem for semipositive line bundles over non-Kähler manifolds. J. Diff. Geom. 19 (1984), pp. 431-452.

[Siu 2] Y.T. SIU, Some recent results in complex manifold theory related to vanishing theorems for the semi-positive case ; survey article in the Proceedings of the Math. Arbeitstagung held in Bonn (june 1984), Max Planck Inst. für Math. Lecture Notes in Math. n° 1111, Springer-Verlag.

[W] E. WITTEN, Supersymmetry and Morse theory. J. Diff. Geom. 17 (1982), pp. 661-692.
